MATEMATIKA 3

(vjerojatnost - zadaća)

Vjerojatnost

1. Kolika je vjerojatnost da bacanjem dviju kockica dobijemo zbroj veći od 6?

2. Strijelac A i strijelac B gađaju metu 3 puta. Vjerojatnost pogotka strijelca A je 50%, strijelca B 75%. Što je vjerojatnije - da strijelac A pogodi metu barem jednom ili da strijelac B pogodi metu barem dvaput?

3. U kutiji je 30 kuglica: 10 crvenih, 10 plavih i 10 bijelih. Izvlačimo nasumce tri kuglice. Kolika je vjerojatnost da ćemo imati po jednu od svake boje?

4. Strijelac A ima vjerojatnost pogotka 0.5 i gađa metu jedanput. Strijelac B ima vjerojatnost pogotka 0.25 i gađa dvaput. Za kojeg je strijelca vjerojatnije da će pogoditi metu?

5. Ante i Boris gađaju metu. Svaki ima dva pokušaja. Vjerojatnost pogotka za Antu je 0.6, za Borisa 0.5. Koja je vjerojatnost da će Ante pogoditi (strogo) više puta nego Boris?

Uvjetna vjerojatnost

6. Tri stroja proizvode vijke. Polovina svih vijaka proizvedena je na I. stroju, petina na II., a ostatak na III. Postotak defektnih proizvoda na I. je 2% , na II. 4% , a na III. 3% . Kolika je vjerojatnost da je vijak za kojeg je kontrola utvrdila da je neispravan proizveden na III. stroju?

7. Izvlačimo 4 karte iz špila od 32.

a) Koja je vjerojatnost da niti jedna od njih nije srce?

b) Koja je vjerojatnost da su izvučena 4 asa?

8. Ante i Boris gađaju metu. Svaki ima dva pokušaja. Vjerojatnost pogotka za Antu je 0.6, za Borisa 0.5. Koja je vjerojatnost da će Ante pogoditi (strogo) više puta nego Boris ako znamo da je Ante u prvom gađanju pogodio metu?

9. Ptica slijeće na slučajno izabrano gnijezdo, od tri moguća u blizini. Svako gnijezdo sadrži dva jaja i to: dva dobra su u prvom, jedno dobro i jedan mućak u drugom, i dva su mućka u trećem. Ptica sjedi na samo jednom jajetu u gnijezdu. Naći vjerojatnost da sjedi na mućku! Ako je sjela na mućak, koja je vjerojatnost da sjedi u drugom gnijezdu?

10. U sljedećoj tablici prikazana je podjela radnih mjesta u tvrtki ABC po spolu i po odjelima.

	Muškaraca	Žena
Uprava	7	3
Prodaja	10	11
Proizvodnja	25	40

Odredite vjerojatnost da je slučajno odabrana osoba

a) član uprave;
b) član uprave ako znamo da je žena;
c) radnik u proizvodnji;
d) radnik u proizvodnji ako znamo da je žena;
e) radnik u proizvodnji ili žena.

11. U dvije kutije stavili smo bijele i crne kuglice. U prvoj kutiji nalazi se 6 bijelih i 5 crnih kuglica, u drugoj 4 bijele i 4 crne kuglice. Kolika je vjerojatnost da se izvuče bijela kuglica iz druge kutije nakon što smo prenijeli dvije kuglice iz prve u drugu kutiju.

12. U svakoj od dvije kutije nalaze se po tri bijele kuglice. U prvoj kutiji se nalaze tri crne kuglice, u drugoj dvije. Prenesemo dvije kuglice iz prve u drugu kutiju. Zatim prenesemo dvije kuglice iz druge u prvu kutiju. Nakon toga izvucemo dvije kuglice iz druge kutije.

a) Kolika je vjerojatnost su kuglice bijele?

b) Kolika je vjerojatnost da je u prvoj kutiji samo jedna bijela kuglica ako smo izvukli dvije bijele kuglice?

13.* Pouzdanost testa na bolest B je 90%. Učestalost bolesti u općoj populaciji je 1%.

a) Koja je vjerojatnost da osoba koja je pozitivna na test zaista boluje od bolesti B?
b) Koliko je puta porasla vjerojatnost da osoba boluje od bolesti B nakon što je njen test pozitivan?

14. Jedna serija od 100 proizvoda ima 4, a druga serija od 81 proizvoda ima 9 neispravnih proizvoda. Iz prve serije slučajno se bira 3, a iz druge 5 proizvoda: oni se izmiješani stavljaju u jednu kutiju. Zatim se iz te kutije slučajno bira jedan proizvod. Kolika je vjerojatnost da je odabrani proizvod ispravan?

Slučajne varijable i distribucije

15. Četiri novčića bacaju se istovremeno. Naći funkciju vjerojatnosti (zakon razdiobe vjerojatnosti) za slučajnu varijablu X koja predstavlja broj grbova. Kolike su vjerojatnosti da se pojavi jedan grb, najmanje jedan grb, ne više od tri grba?

16. Strijelac gađa cilj s vjerojatnošću 0.7. Naći funkciju vjerojatnosti za slučajnu varijablu X koja predstavlja broj pogodaka u 5 gađanja.

17. 10% proizvoda su neispravni. Naći vjerojatnost da su u uzorku od 10 proizvoda bar 2 neispravna.

18. Bacaju se dvije kocke. Kolika je vjerojatnost da se dobije suma brojeva veća od 10 ili djeljiva sa 6?

19. Bacaju se dvije kocke. Slučajna varijabla X računa zbroj vrijednosti na kockama. Odredite razdiobu od X te izračunajte očekivanje EX i varijancu $\mathrm{Var}\, X$.

20. Strijelac pogađa metu s vjerojatnošću $p = 0.8$. Ima dva metka. Kada ih potroši dobije još onoliko metaka koliko je imao pogodaka u prvoj seriji i također ih ispaljuje u metu. Kolika je vjerojatnost da je cilj pogođen? Naći razdiobu broja pogodaka X, očekivanje i varijancu od X.

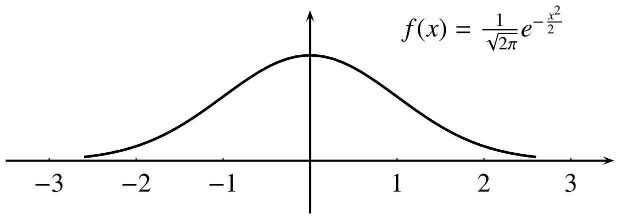
Kontinuirane distribucije

21. Neka je $f(x)$ gustoća slučajne varijable X zadana s $f(x) = ax^2$ na segmentu $[-1, 2]$ (0 inače). Odredite a i izračunajte $\mathrm{Var}\, X$ i $p(0 \leq X \leq 3)$.

22. Slučajna varijabla ima gustoću razdiobe $f(x) = \frac{k}{1+x^2}$ na cijelom skupu $\mathbb{R}$. Odrediti k, naći očekivanje i varijancu.

23. Neka je $f(x)$ funkcija vjerojatnosti slučajne varijable X, zadana s $\sin x$ na intervalu $(0, \pi)$, a 0 inače. Odredite parametar a, izračunati μ, σ i $p(\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{2})$.

Normalna razdioba



24. Pomoću tablica za Φ_0 (vidi str. 4) izračunajte:

a) $\Phi(1)$;

b) $\Phi(0.5)$;

c) $\Phi(0.25)$;

d) $\Phi(-0.1)$;

e) $\Phi(-0.25)$;

f) $\Phi(-0.75)$.

25. X_1 i X_2 su slučajne varijable s normalnim razdiobama sa sredinom $\mu = 10$ i pripadnim standardnim devijacijama $\sigma_1 = 2$ i $\sigma_2 = 3$. Skicirajte grafove njihovih funkcija vjerojatnosti i izračunajte $p(X_1 \leq 9)$ i $p(9 \leq X_2 \leq 11)$. Skicirajte površine koje odgovaraju ovim vjerojatnostima.

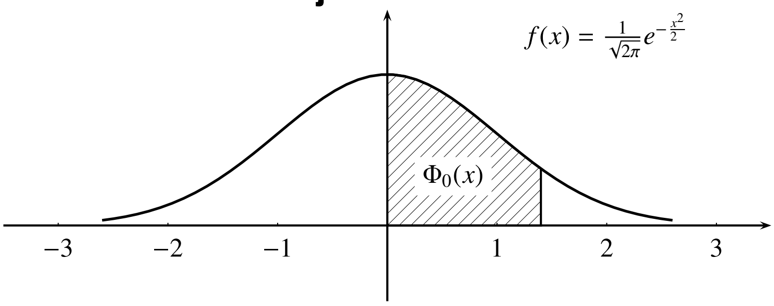
26. Stroj proizvodi matice čija je idealna širina $2cm$. Tolerira se odstupanje od ±2mm. Pretpostavljamo da slučajna varijabla X koja mjeri širinu matice ima normalnu razdiobu. Kolika treba biti standardna devijacija σ tako da stroj proizvodi ispravne matice s vjerojatnošću od barem 96% (uz pretpostavku $\mu = 2$cm)?

FiXme P
do
zad
norn
distrib

MATEMATIKA 3

(tablica normalne razdiobe Φ_0)

Površine ispod normalne krivulje



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0.1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0.2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0.3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0.4	15542	15909	16275	16640	17003	17364	17724	18082	18438	18793
0.5	19146	19497	19846	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0.6	22574	22906	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25174	25490
0.7	25803	26114	26423	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28523
0.8	28814	29103	29389	29673	29954	30233	30510	30785	31057	31326
0.9	31594	31858	32121	32381	32639	32894	33147	33397	33645	33891
1.	34134	34375	34613	34849	35083	35314	35542	35769	35992	36214
1.1	36433	36650	36864	37076	37285	37492	37697	37900	38100	38297
1.2	38493	38686	38876	39065	39251	39435	39616	39795	39972	40147
1.3	40320	40490	40658	40824	40987	41149	41308	41465	41620	41773
1.4	41924	42073	42219	42364	42506	42647	42785	42921	43056	43188
1.5	43319	43447	43574	43699	43822	43942	44062	44179	44294	44408
1.6	44520	44630	44738	44844	44949	45052	45154	45254	45352	45448
1.7	45543	45636	45728	45818	45907	45994	46079	46163	46246	46327
1.8	46407	46485	46562	46637	46711	46784	46855	46925	46994	47062
1.9	47128	47193	47257	47319	47381	47441	47500	47558	47614	47670
2.	47725	47778	47830	47882	47932	47981	48030	48077	48123	48169
2.1	48213	48257	48299	48341	48382	48422	48461	48499	48537	48573
2.2	48609	48644	48679	48712	48745	48777	48808	48839	48869	48898
2.3	48927	48955	48983	49009	49035	49061	49086	49110	49134	49157
2.4	49180	49202	49224	49245	49265	49285	49305	49324	49343	49361
2.5	49379	49396	49413	49429	49445	49461	49476	49491	49506	49520
2.6	49533	49547	49560	49573	49585	49597	49609	49620	49631	49642
2.7	49653	49663	49673	49683	49692	49702	49711	49719	49728	49736
2.8	49744	49752	49759	49767	49774	49781	49788	49794	49801	49807
2.9	49813	49819	49825	49830	49835	49841	49846	49851	49855	49860
3.	49865	49869	49873	49877	49881	49885	49889	49893	49896	49899
3.1	49903	49906	49909	49912	49915	49918	49921	49923	49926	49928
3.2	49931	49933	49935	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49949
3.3	49951	49953	49955	49956	49958	49959	49961	49962	49963	49965
3.4	49966	49967	49968	49969	49970	49972	49973	49974	49974	49975
3.5	49976	49977	49978	49979	49980	49980	49981	49982	49982	49983
4.	49996	49997	49997	49997	49997	49997	49997	49997	49997	49997
4.5	49999	49999	49999	49999	49999	49999	49999	49999	49999	49999

Vrijednostima u tablici prethodi decimalni zarez, pa je tako npr. $\Phi_0(1.71) = 0.45543$.

Uzorci – oznake

X	slučajna varijabla koja mjeri populaciju
$\overline{X}$	slučajna varijabla na uzorcima, računa ar. sredinu uzorka
N	veličina uzorka
$x = (x_1, \dots, x_N)$	uzorak veličine N
s^2	varijanca (pojedinog) uzorka
μ	sredina cijele populacije (EX)
σ^2, σ_X^2	varijanca sl. varijable X na populaciji ($\mathrm{Var}\,X$)
$\mu_{\overline{X}}$	sredina populacije uzoraka ($E\overline{X}$)
$\sigma_{\overline{X}}$	varijanca cijele populacije uzoraka ($\mathrm{Var}\,\overline{X}$)
c	pouzdanost
z_c	koeficijent pouzdanosti

Intervali pouzdanosti

c	99.73%	99%	96%	95%	90%	68.27%	50%
z_c	3	2.58	2.05	1.96	1.65	1	0.67

$$\Phi_0(z_c) = \frac{c}{2}$$

MATEMATIKA 3

(statistika - zadaća)

Normalna razdioba

1. Slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu sa parametrima $\mu = 15$, i standardnom devijacijom $\sigma = 5$. Nađi interval $\mu \pm c$ takav da je

$$p(\mu - c \leq X \leq \mu + c) \approx 50\%.$$

2. Slučajna varijabla X sa normalnom razdiobom ima sredinu $\mu = 0$ i nepoznatu standardnu devijaciju σ. Kolika je standardna devijacija σ ako znamo da je vjerojatnost da X budu u intervalu $[-10, 10]$

$$p(-10 \leq X \leq 10) = 0.91 \text{ ?}$$

3. Trudnoća kod ljudi traje u prosjeku 266 dana sa standardnom devijacijom od 14 dana. Trajanje trudnoće može se dobro aproksimirati normalnim modelom.

a) Odredite koliki postotak trudnoća traje između 270 i 280 dana.
b) Odredite minimalno trajanje 25% najduljih trudnoća.

Statistika

4. Izračunajte EX i $\operatorname{Var} X$ za

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
X &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \\
X - EX &\sim \begin{pmatrix} 1 - \frac{11}{6} & 2 - \frac{11}{6} & 3 - \frac{11}{6} & 5 - \frac{11}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} \frac{-5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{7}{6} & \frac{19}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \\
(X - EX)^2 &\sim \begin{pmatrix} \frac{25}{36} & \frac{1}{36} & \frac{49}{36} & \frac{361}{36} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad E(X - EX)^2 &= \frac{47}{6} \approx 1.3
\end{aligned}$$

□

5. Za uzorak populacije studenata sa težinama 72, 77, 81, 83 kg izračunajte sredinu i varijancu.

6. Proučavanjem visina muške populacije pomoću uzoraka od po 1000 muškaraca došlo se do sljedećih podataka: standardna devijacija uzoraka je 0.3cm, prosječna visina uzoraka je 178cm. Procijenite koliki dio populacije je niži od 170cm i koliki je dio populacije viši od 2m, uz pretpostavku da visina muške populacije ima normalnu razdiobu.

7. Slučajna varijabla X ima parametre $\mu = 100$, $\sigma = 3$. Koja je vjerojatnost da je sredina slučajnog uzorka veličine $N = 36$ u granicama $[99.25, 100.2]$?

8. Koja je vjerojatnost da pri 100 bacanja (pravednog) novčića dobijemo više od 60 glava?

9. Parametri populacije su $\mu = 1500$, $\sigma = 20$. Koja je vjerojatnost da je sredina slučajnog uzorka veličine $N = 30$ u intervalu $\mu \pm 3$?

10. Na raspolaganju nam je 6 danskih doga, od toga 4 imaju kupirane uši, a 2 nemaju. Napravite sve moguće uzorke od po tri psa (bez vraćanja!), i izračunajte očekivanje i disperziju za proporciju uzorka P (vjerojatnost kupiranog psa u uzorku). Usporedite te podatke sa sredinom i disperzijom za broj pasa s kupiranim ušima na nivou uzorka.

11. Lhasa apso ima njušku duljine $\mu = 4$cm, a očekivano je odstupanje $\sigma = 0.5$cm. Promatramo uzgajivačnice sa po 30 jedinki. S kojom će vjerojatnošću srednja vrijednost duljine njuške takvog uzorka biti između 3.7cm i 4.3cm, što su za tu vrstu dozvoljene veličine na natjecanjima?

12. Pretpostavimo da prosječan 70-godišnjak neke populacije ima $\mu = 25$ vlastitih zubiju, i neka je varijanca $\sigma = 1.39$. Iz populacije od 1500 70-godišnjaka radimo uzorke od po 100, bez vraćanja. Koliko je vjerojatnost da će sredina broja zubiju u slučajnom uzorku biti veća ili jednaka 25.2? U kolikom broju uzoraka pretpostavljamo da će se to dogoditi?

13. Predsjednički kandidat A pobijedio je na izborima sa 60% glasova. Kolika je vjerojatnost da u slučajnom uzorku od 200 glasača kandidat George dobije manje od 50% glasova?

14. Kolika je vjerojatnost da u 50 bacanja novčića padne između 20 i 30 glava (uključivo)[1]?

FiXme P

pojavi
fu.
zadacima
nesto st

Intervali pouzdanosti

15. Azori su jedino mjesto u Europi gdje raste ananas. Od ananasa plasiranog na tržište 95% je prvoklasno. Rade se pošiljke od po 3000 ananasa. U kojim će se granicama nalaziti proporcija prvoklasnog ananasa u pošiljci s koeficijentom pouzdanosti $z_c = 2.40$?

16. Mjerenje dijametara slučajnog uzorka od 200 kugličnih ležajeva dalo je sredinu od 2.09cm i standardnu grešku od 0.11cm. Naći očekivani dijametar ležajeva s pouzdanošću: a) 90%; b) 99.73%

17. U 40 bacanja novčića dobivene su 24 glave. Naći interval u kojem se nalazi proporcija broja glavi dobivena za beskonačni broj bacanja novčića s pouzdanošću:

a) 95%

b) 98%

18. Veliki uzorak muške studentske populacije ima prosječnu visinu 180cm. Standardna devijacija ovog uzorka je 5cm. Procijenite srednju visinu muške studentske populacije uz pouzdanost 90%. Možete li uz ovu procjenu odrediti vjerojatnost da sljedeći slučajni uzorak od 50 studenata ima prosječnu visinu manju od 179cm?

MATEMATIKA 3

(vektorska analiza)

Koordinatizacije krivulja

1. Za pravocrtno gibanje parametrizirana s $\vec{r}(t) = (1, 2, -1) + f(t)(-3, 0, 1)$, gdje je

a) $f(t) = t + 2$,
b) $f(t) = 3t$,
c) $f(t) = at^2 + bt + c$,

odredite $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$, $|\vec{v}(2)|$, $|\vec{a}(2)|$.

2. Nađite vektorsku jednadžbu opisa jednolikog gibanja po kružnici $y^2 + z^2 = 4$, $x = 2$. Pokažite da su u svakom trenutku vektori $\vec{v}(t)$ i $\vec{a}(t)$ ortogonalni.

3.* Tijelo je ispaljeno iz točke $(0, 0, 0)$ brzinom $\vec{v_0} = (1, \sqrt{2}, 1)$ (m/s) u gravitacijskom polju s akceleracijom $\vec{g} = (0, 0, -9.8)$ (u m/s^2). Koordinatizirajte putanju tog tijela od ispaljivanja do trenutka pada na tlo (ravnina $z = 0$). Vrijeme mjerimo (u sekundama) od trenutka ispaljivanja ($t = 0$).

4. Nađite $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$ za ovako opisano gibanje po helikoidu: $\vec{r}(t) = (R\cos kt, R\sin kt, t)$ (R i k su konstante).

5. Koordinatizirajte krivulju koja nastaje presjecanjem ploha

a) plohe $xy = 1$ i ravnine $z = 2x$,
b) cilindra $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ i sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

6. Koordinatizirajte krivulju koja nastaje presjecanjem cilindra $x^2 + y^2 = 1$ i ravnine $x + 2y + z = 2$.

Parametrizacije ploha

7. Parametrizirajte površinu jedinične kugle u sfernim koordinatama pomoću zemljopisne širine i visine, odnosno tako da koordinate točke u toj parametrizaciji odgovaraju njezinoj geometrijskoj širini i visini.

8. Napravite koordinatizaciju oplošja cilindra $x = z^2$.

9. Nađite vektor normale na plohu $z = 2x^2 - y + 3$ u točki $T(1, 2, 3)$.

10. Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na 1-sferu u točkama

a) $T(1, 0, 0)$,
b) $T(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

11. Naći vektor normale tangencijalne ravnine u proizvoljnoj točki cilindra $x^2 + y^2 = 1$. Naći jednadžbu tangencijalne ravnine u $T(1, 0, 2)$.

Parametrizacije tijela

12. Parametrizirajte paralelepiped razapet vektorima $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (-1, 2, 1)$, $\vec{c} = (0, 1, 5)$.

13. Parametrizirajte osminu kugle radijusa 2 sa središtem u ishodištu koja se nalazi u prvom oktantu.

14. Parametrizirajte kuglu radijusa 2 sa središtem u točki $A(2, 2, 2)$.

Skalarna i vektorska polja

15. Odredite gravitacijsko polje točke $A(2,0,1)$ ako za svaku točku P vrijedi da je

- $\overrightarrow{F}(P)$ kolinearno s $\overrightarrow{PA}$
- $\left|\overrightarrow{F}(P)\right|$ je obrnuto proporcinalno kvadratu udaljenosti P i A
- Vrijedi da je $\overrightarrow{F}(0,0,1) = (4,0,2)$.

16. Naći derivaciju skalarnog polja $U(\vec{r}) = x^3 + y + 2z^3$ duž parabole $\vec{r}(t) = (t, 1, t^2)$.

Integrali

17. Naći integral skalarnog polja $U(\vec{r}) = x + \sqrt{y} + \sqrt[3]{z}$ po paraboli $y = x^2$, od $A(0,0,0)$ do $B(1,1,0)$.

18. Naći integral vektorskog polja $\vec{F}(\vec{r}) = (-2x^3, 2y^3)$ po dijelu centrirane jedinične kružnice u četvrtom kvadrantu od točke $A(1,0)$ do $B(0,-1)$.

FiXme P
dovrsiti za

19. Pokažite da su vektorska polja

$\vec{F}(\vec{r}) = (3x^2 + y^2, 2xy, -\frac{1}{z})$;

$\vec{G}(\vec{r}) = (z\sin x, ze^y, \sin^2 x + e^y)$

konzervativna i izračunajte $\int_A^B \vec{F}d\vec{r}$, $\int_A^B \vec{G}d\vec{r}$ gdje su

a) $A(1,0,1)$, $B(0,-1,e)$;

b) $A(0,0,0)$, $B(0,0,1)$.

20. Pokazati da je polje $\vec{F} = (3x^2 + 3y, 3x + \frac{z}{y}, \ln y)$ konzervativno i izračunati rad (integral) tog polja od točke $A(0,0,1)$ do točke $B(1,1,1)$.

21. Neka je U skalarno polje zadano s

$$U = xy + yz + zx.$$

Izračunajte

$$\int_K U|d\vec{r}|$$

gdje je K dužina koja spaja točke $A(0,0,1)$ i $B(0,1,2)$.

22. Izračunati masu paralelepipeda razapetog iz ishodišta vektorima $(0,1,1)$, $(1,0,2)$, $(-1,-1,5)$ čija je gustoća zadana sa $\rho(x,y,z) = y + z$.

23. Izračunati masu sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ čija je gustoća zadana sa $\rho = z^2$.

24. Izračunati $\int \vec{F}d\vec{P}$ ako je $\vec{F}(\vec{r}) = (x^2, 0, 3y^2)$ brzina protoka kroz ravninu $x + y + z = 1$ u prvom oktantu.

25. Pokažite da je polje $\overrightarrow{F} = (6xy + z\sin x, 3x^2 + z^2, 2zy - \cos x)$ konzervativno i izračunajte integral (rad) tog polja od točke $A(0,0,0)$ do točke $B(0,1,2)$.

26. Izračunajte masu plohe paraboloida $z = 2x^2 + 2y^2$ od $z = 0$ do $z = 1$ ako je (površinska) gustoća plohe zadana s $\rho(x,y,z) = xyz + 1$.

Stokesova formula

27. Pomoću Stokesove formule izračunajte integral

$$\oint_C \vec{F}\,d\vec{r}$$

gdje je $\overrightarrow{F} = (-z, y, x)$ i C je kružnica dobivena presjecanjem sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ i stošca $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Uzmite da je ploha po kojoj integrirate (čiji je rub kružnica C)

a) krug,

b) dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$,

c) dio stošca $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Gauss-Green

28. Izračunajte tok polja $\overrightarrow{F} = (x, y, xy)$ kroz oplošje kvadra omeđenog ravninama $z = 0$, $z = -2$, $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$ i $y = 3$.

29. Izračunati tok polja $\vec{F} = (xy, y^2, zy)$ kroz plohu omeđenu ravninama $z = -1$, $z = 1$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$ i $y = 2$.