VEKTORSKA ANALIZA — kolokvij (A)

10. 12. 2007.

1. (25) Zadano je skalarno polje

$$U(x, y, z) = x^2y + y^2z + z,$$

i vektorsko polje

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2z, xy^2z, yz).$$

Nađite:

(a) ∇U u proizvoljnoj točki;

(b) derivaciju $\dfrac{dU}{dt}$ skalarnog polja U po krivulji $\vec{r}(t) = (t, t^2, -t)$,

(c) $\operatorname{div} \vec{F}$ u proizvoljnoj točki.

2. (15) Parametrizirajte četvrtinu kružnice koju dobivamo kao presjek sfere radijusa 2 sa središtem u ishodištu i ravnine $x = y$, s tim da parametriziramo onu četvrtinu kružnice za koju je $x \geq 0$ i $z \leq 0$.

3. (20) Izračunajte rad sile

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2 + y, -z)$$

po luku krivulje

$$\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

4. (20) Nađite masu (šupljeg) cilindra $x^2 + y^2 = 4$, $-1 \leq z \leq 2$, ako mu je gustoća zadana s $\rho(x, y, z) = (x^2 + y^2)(z + 2)$.

5. (20) Korištenjem Stokesovog teorema izračunajte

$$\oint_{\partial P} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

ako je

$$\vec{F}(x, y, z) = (2y + z, x + z, x^2 + y),$$

a ∂P pozitivno orijentiran rub pravokutnika s vrhovima $A(-1, -2, 1)$, $B(2, -2, 1)$, $C(2, 1, 1)$, $D(-1, 1, 1)$.

Dozvoljena pomagala: Formule i kalkulator.

VEKTORSKA ANALIZA — kolokvij (B)

10. 12. 2007.

1. (25) Zadano je skalarno polje

$$U(x,y,z) = xy^2 + yz^2 + xz,$$

i vektorsko polje

$$\vec{F}(x,y,z) = (xz^2, xyz^2, xz).$$

Nađite:

(a) ∇U u proizvoljnoj točki;

(b) derivaciju $\dfrac{dU}{dt}$ skalarnog polja U po krivulji $\vec{r}(t) = (t^2, -t, t)$,

(c) $\operatorname{div} \vec{F}$ u proizvoljnoj točki.

2. (15) Parametrizirajte četvrtinu kružnice koju dobivamo kao presjek sfere radijusa 3 sa središtem u ishodištu i ravnine $x = -y$, s tim da parametriziramo onu četvrtinu kružnice za koju je $x \geq 0$ i $z \geq 0$.

3. (20) Izračunajte rad sile

$$\vec{F}(x,y,z) = (-x, y^3 + y, z^2)$$

po luku krivulje

$$\vec{r}(t) = (t^2, t, t^3), \quad 0 \leq t \leq 2.$$

4. (20) Nađite površinu dijela (šuplje) sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4^2$ koja se nalazi iznad ravnine $z = 2\sqrt{2}$.

5. (20) Korištenjem Stokesovog teorema izračunajte

$$\oint_{\partial P} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

ako je

$$\vec{F}(x,y,z) = (y+z, 2x+z^2, x+y^2),$$

a ∂P pozitivno orijentiran rub pravokutnika s vrhovima $A(-2,-3,2)$, $B(2,-3,2)$, $C(2,2,2)$, $D(-2,2,2)$.

Dozvoljena pomagala: Formule i kalkulator.

VEKTORSKA ANALIZA — kolokvij (C)

10. 12. 2007.

1. (25) Zadano je skalarno polje

$$U(x, y, z) = xyz + xy^2 + yz^2,$$

i vektorsko polje

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2yz, xz^2, xz^2).$$

Nađite:

(a) ∇U u proizvoljnoj točki;

(b) derivaciju $\dfrac{dU}{dt}$ skalarnog polja U po krivulji $\vec{r}(t) = (-t, t^3, t)$,

(c) $\operatorname{rot} \vec{F}$ u proizvoljnoj točki.

2. (15) Parametrizirajte četvrtinu kruga koju dobivamo kao presjek (pune) kugle radijusa 3 sa središtem u ishodištu i ravnine $x - y = 0$, s tim da parametriziramo onu četvrtinu kruga za koju je $x \geq 0$ i $z \leq 0$.

3. (20) Izračunajte rad sile

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy, -xyz, -z^2)$$

po luku krivulje

$$\vec{r}(t) = (t + 1, t, t^2), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

4. (20) Nađite površinu (šupljeg) cilindra $x^2 + y^2 = 9$, omeđenog ravninama $z = -2$ i $z = x + y + 6$.

5. (20) Korištenjem Gaussovog teorema izračunajte

$$\oiint\limits_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{P},$$

ako je

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + 2y + z, x + z^2, x^2 + z^2),$$

a ∂V oplošje kvadra omeđenog ravninama $z = -1$, $z = 2$, $x = -2$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 4$.

Dozvoljena pomagala: Formule i kalkulator.

VEKTORSKA ANALIZA — kolokvij (D)

10. 12. 2007.

1. (25) Zadano je skalarno polje

$$U(x,y,z) = 2xz + xy + xyz^2,$$

i vektorsko polje

$$\vec{F}(x,y,z) = (xyz, xy^2z, yz^2).$$

Nađite:

(a) ∇U u proizvoljnoj točki;

(b) derivaciju $\dfrac{dU}{dt}$ skalarnog polja U po krivulji $\vec{r}(t) = (-t, t^3, t^2)$,

(c) $\operatorname{rot}\vec{F}$ u proizvoljnoj točki.

2. (15) Parametrizirajte četvrtinu kruga koju dobivamo kao presjek (pune) kugle radijusa 2 sa središtem u ishodištu i ravnine $x+y=0$, s tim da parametriziramo onu četvrtinu kruga za koju je $x \geq 0$ i $z \geq 0$.

3. (20) Izračunajte rad sile

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2y, yz, -xz^2)$$

po luku krivulje

$$\vec{r}(t) = (t^2, t+1, t^2), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

4. (20) Nađite masu (šuplje) sfere $x^2+y^2+z^2 = 9$, ako joj je gustoća zadana s $\rho(x,y,z) = z^2$.

5. (20) Korištenjem Gaussovog teorema izračunajte

$$\oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{P},$$

ako je

$$\vec{F}(x,y,z) = (2x+2y, x+y+z^2, x^2z),$$

a ∂V oplošje kvadra omeđenog ravninama $z=-2$, $z=3$, $x=-3$, $x=0$, $y=1$, $y=2$.

Dozvoljena pomagala: Formule i kalkulator.

VEKTORSKA ANALIZA — kolokvij (E)

10. 12. 2007.

1. (25) Zadano je skalarno polje

$$U(x,y,z) = 2xyz + x^2 + y^2z^2,$$

i vektorsko polje

$$\vec{F}(x,y,z) = (yz, xyz^2, xy).$$

Nađite:

(a) ∇U u proizvoljnoj točki;

(b) derivaciju $\dfrac{dU}{dt}$ skalarnog polja U po krivulji $\vec{r}(t) = (-t, t^3, t^2)$,

(c) $\operatorname{div} \vec{F}$ u proizvoljnoj točki.

2. (15) Parametrizirajte polovinu kruga koju dobivamo kao presjek (pune) kugle radijusa 4 sa središtem u ishodištu i ravnine $x + y = 0$, s tim da parametriziramo onu polovinu kruga za koju je $z \geq 0$.

3. (20) Izračunajte rad sile

$$\vec{F}(x,y,z) = (xy, 2xyz, -xz)$$

po luku krivulje

$$\vec{r}(t) = (t^2, t^3, t-1), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

4. (20) Nađite površinu (šupljeg) cilindra $x^2 + y^2 = 4$, omeđenog ravninama $z = x + y - 5$ i $z = 2$.

5. (20) Korištenjem Stokesovog teorema izračunajte

$$\oint_{\partial P} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

ako je

$$\vec{F}(x,y,z) = (2y + z, x + z^2, x^2 + y),$$

a ∂P se sastoji od pozitivno orijentiranog ruba polukružnice $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$ (u ravnini $z = 0$) i dijela pravca od točke $(-1,0,0)$ do $(1,0,0)$.

Dozvoljena pomagala: Formule i kalkulator.

VEKTORSKA ANALIZA — kolokvij (F)

10. 12. 2007.

1. (25) Zadano je skalarno polje

$$U(x,y,z) = 2x^2yz + x^2y + x^2z^2,$$

i vektorsko polje

$$\vec{F}(x,y,z) = (xyz, xy, yz).$$

Nađite:

(a) ∇U u proizvoljnoj točki;

(b) derivaciju $\dfrac{dU}{dt}$ skalarnog polja U po krivulji $\vec{r}(t) = (t, -t, t^2)$,

(c) $\operatorname{div} \vec{F}$ u proizvoljnoj točki.

2. (15) Parametrizirajte polovinu kruga koju dobivamo kao presjek (pune) kugle radijusa 3 sa središtem u ishodištu i ravnine $x - y = 0$, s tim da parametriziramo onu polovinu kruga za koju je $z \leq 0$.

3. (20) Izračunajte rad sile

$$\vec{F}(x,y,z) = (xz, 2xy, -xy^2)$$

po luku krivulje

$$\vec{r}(t) = (t+1, t^2, t-1), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

4. (20) Nađite površinu dijela (šuplje) sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 16^2$ koja se nalazi ispod ravnine $z = 8\sqrt{2}$.

5. (20) Korištenjem Stokesovog teorema izračunajte

$$\oint_{\partial P} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

ako je

$$\vec{F}(x,y,z) = (y^2 + z, x, x + y^2),$$

a ∂P se sastoji od pozitivno orijentiranog ruba polukružnice $x^2 + y^2 = 4$, $x \leq 0$ (u ravnini $z = 0$) i dijela pravca od točke $(0, -2, 0)$ do $(0, 2, 0)$.

Dozvoljena pomagala: Formule i kalkulator.

VEKTORSKA ANALIZA — ponovljeni kolokvij (G)

28. 1. 2008.

1. (20) Neka su $\vec{w}_1$ i $\vec{w}_2$ dvije vektorske funkcije

$$\vec{w}_1 = (t^2, \sin t, 1), \quad \vec{w}_2 = (e^t, \cos t, t).$$

Nađite:

(a) $\dfrac{d(\vec{w}_1 + \vec{w}_2)}{dt}$ u točki t;

(b) $\dfrac{d(\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2)}{dt}$ u točki t.

2. (20) Nađite integral funkcije $U(x,y,z) = x + y + z$ duž luka spirale

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

od $t = 0$ do $t = 4\pi$.

3. (20) Ispitajte je li polje

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + y, y^2 + y + x + 1, -z)$$

konzervativno.

4. (20) Napišite parametarske jednadžbe površine koja se sastoji od gornjeg dijela (šuplje!) sfere $x^2+y^2+z^2 = 4$ (tj. onog dijela za koji je $z \geq 0$) koju isijeca cilindar $x^2+y^2 = 3$.

5. (20) Korištenjem Gaussovog teorema, za vektorsko polje

$$\vec{F} = (x, y, z)$$

izračunajte tok tog polja kroz oplošje zatvorenog paraboloida (koji ima gornju bazu!)

$$z = x^2 + y^2$$

omeđenog ravninom $z = 4$.

Dozvoljena pomagala: Formule i kalkulator.