

NUMERIČKA MATEMATIKA — kolokvij (A)

16. 12. 2005.

1. Funkciju $f(x) = x \cos x - x$ aproksimiramo na računalu, tako da prvo izračunamo
(15) $\cos x$ korištenjem početnog komada Taylorovog reda za $\cos x$ oko 0, zatim red pomnožimo s x i oduzmemo x . Članove dobivenog reda zbrajamo sve dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti ε , $0 < \varepsilon \ll 1$. Hoće li za $x = 10\pi$ takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

2. Zadana je matrica

(25)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P , te matrice L i R tako da je $PA = LR$.

3. Ako interpolacijski polinom interpolira funkciju $f(x) = e^{-x}$ u točkama s x -koordinatama -2 , -1 , 0 i 1 , ocijenite grešku tog interpolacijskog polinoma u točki s x -koordinatom -0.5 .
(20)

4. Produljenom trapeznom metodom približno izračunajte integral
(25)

$$\int_{0.5}^1 x^{1/3} \cos x \, dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$. Uputa:

$$f''(x) = -\frac{2 \cos x}{9x^{5/3}} - \frac{2 \sin x}{3x^{2/3}} - x^{1/3} \cos x.$$

5. Ako integrirate funkciju koja na nekom intervalu brzo oscilira, kako morate postaviti
(15) čvorove integracije, tako da biste na tom intervalu dobili približno točan rezultat? Objasnite zašto treba postupiti tako kako ste naveli.

Dozvoljena pomagala: Formule i kalkulator.

Obvezno predajte papir sa zadacima zajedno s rješenjima.

NUMERIČKA MATEMATIKA — kolokvij (A)

16. 12. 2005.

1. Funkciju $f(x) = x \cos x - x$ aproksimiramo na računalu, tako da prvo izračunamo
(15) $\cos x$ korištenjem početnog komada Taylorovog reda za $\cos x$ oko 0, zatim red pomnožimo s x i oduzmemo x . Članove dobivenog reda zbrajamo sve dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti ε , $0 < \varepsilon \ll 1$. Hoće li za $x = 10\pi$ takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

2. Zadana je matrica

(25)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P , te matrice L i R tako da je $PA = LR$.

3. Ako interpolacijski polinom interpolira funkciju $f(x) = e^{-x}$ u točkama s x -koordinatama -2 , -1 , 0 i 1 , ocijenite grešku tog interpolacijskog polinoma u točki s x -koordinatom -0.5 .
(20)

4. Produljenom trapeznom metodom približno izračunajte integral
(25)

$$\int_{0.5}^1 x^{1/3} \cos x \, dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$. Uputa:

$$f''(x) = -\frac{2 \cos x}{9x^{5/3}} - \frac{2 \sin x}{3x^{2/3}} - x^{1/3} \cos x.$$

5. Ako integrirate funkciju koja na nekom intervalu brzo oscilira, kako morate postaviti
(15) čvorove integracije, tako da biste na tom intervalu dobili približno točan rezultat? Objasnite zašto treba postupiti tako kako ste naveli.

Dozvoljena pomagala: Formule i kalkulator.

Obvezno predajte papir sa zadacima zajedno s rješenjima.

NUMERIČKA MATEMATIKA — kolokvij (D)

16. 12. 2005.

1. Funkciju $f(x) = \sin x - x$ aproksimiramo na računalu, tako da prvo izračunamo $\sin x$ korištenjem početnog komada Taylorovog reda za $\sin x$ oko 0, zatim red pomnožimo s x i oduzmemo x . Članove dobivenog reda zbrajamo sve dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti ε , $0 < \varepsilon \ll 1$. Hoće li za $x = 10\pi$ takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

2. Zadana je matrica

$$(25) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P , te matrice L i R tako da je $PA = LR$.

3. Ako interpolacijski polinom interpolira funkciju $f(x) = \ln(x - 1)$ u točkama s x -koordinatama 2, 3 i 4, ocijenite grešku tog interpolacijskog polinoma u točki s x -koordinatom 2.5.

4. Produljenom trapeznom metodom približno izračunajte integral

$$(25) \quad \int_{0.5}^1 x^{1/4} \sin x \, dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$. Uputa:

$$f''(x) = -\frac{3 \sin x}{16x^{7/4}} + \frac{\cos x}{2x^{3/4}} - x^{1/4} \sin x.$$

5. U kojoj su vezi (zatvorene) Newton–Cotesove formule na intervalu $[a, b]$ s interpolacijskim polinomima na ekvidistantnoj mreži (na istom intervalu)? Na temelju toga objasnite zašto podizanje reda Newton–Cotesove ne mora nužno dati bolju aproksimaciju vrijednosti integrala?

Dozvoljena pomagala: Formule i kalkulator.

Obvezno predajte papir sa zadacima zajedno s rješenjima.

NUMERIČKA MATEMATIKA — kolokvij (C)

16. 12. 2005.

1. Funkciju $f(x) = x^2 \sin x - x^3$ aproksimiramo na računalu, tako da prvo izračunamo
(15) $\sin x$ korištenjem početnog komada Taylorovog reda za $\sin x$ oko 0, zatim red pomnožimo s x^2 i oduzmemo x^3 . Članove dobivenog reda zbrajamo sve dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti ε , $0 < \varepsilon \ll 1$. Hoće li za $x = 10\pi$ takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

2. Zadana je matrica
(25)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P , te matrice L i R tako da je $PA = LR$.

3. Ako interpolacijski polinom interpolira funkciju $f(x) = e^x$ u točkama s x -koordinatama $-2, -1, 0$ i 1 , ocijenite grešku tog interpolacijskog polinoma u točki s x -koordinatom -0.5 .
(20)

4. Produljenom trapeznom metodom približno izračunajte integral
(25)

$$\int_{0.5}^1 x^{1/3} \cos x \, dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$. Uputa:

$$f''(x) = -\frac{2 \sin x}{9x^{5/3}} + \frac{2 \cos x}{3x^{2/3}} - x^{1/3} \sin x.$$

5. Ako Newtonova metoda za nalaženje nultočaka konvergira linearno, što možete reći
(15) o kakvoj se nultočki radi. Napišite popravak za Newtonovu metodu tako da se ubrza konvergencija.

Dozvoljena pomagala: Formule i kalkulator.

Obvezno predajte papir sa zadacima zajedno s rješenjima.

NUMERIČKA MATEMATIKA — kolokvij (B)

16. 12. 2005.

1. Funkciju $f(x) = x^2 \operatorname{sh} x - x^3$ aproksimiramo na računalu, tako da prvo izračunamo
(15) $\operatorname{sh} x$ korištenjem početnog komada Taylorovog reda za $\operatorname{sh} x$ oko 0, zatim red pomnožimo s x^2 i oduzmemo x^3 . Članove dobivenog reda zbrajamo sve dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti ε , $0 < \varepsilon \ll 1$. Hoće li za $x = 10\pi$ takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

2. Zadana je matrica

(25)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} .$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P , te matrice L i R tako da je $PA = LR$.

3. Ako interpolacijski polinom interpolira funkciju $f(x) = \ln(x+1)$ u točkama s x -
(20) koordinatama 0, 1 i 2, ocijenite grešku tog interpolacijskog polinoma u točki s x -koordinatom 0.5.

4. Produljenom trapeznom metodom približno izračunajte integral

(25)
$$\int_{0.5}^1 x^{1/4} \cos x \, dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$. Uputa:

$$f''(x) = -\frac{3 \cos x}{16x^{7/4}} - \frac{\sin x}{2x^{3/4}} - x^{1/4} \cos x.$$

5. Kad ćete za diferencijalnu jednadžbu reći da je kruta. Objacnite na jednom primje-
(15) ru.

Dozvoljena pomagala: Formule i kalkulator.

Obvezno predajte papir sa zadacima zajedno s rješenjima.

NUMERIČKA MATEMATIKA — kolokvij (C)

16. 12. 2005.

1. Funkciju $f(x) = x^2 \sin x - x^3$ aproksimiramo na računalu, tako da prvo izračunamo
(15) $\sin x$ korištenjem početnog komada Taylorovog reda za $\sin x$ oko 0, zatim red pomnožimo s x^2 i oduzmemo x^3 . Članove dobivenog reda zbrajamo sve dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti ε , $0 < \varepsilon \ll 1$. Hoće li za $x = 10\pi$ takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

2. Zadana je matrica
(25)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} .$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P , te matrice L i R tako da je $PA = LR$.

3. Ako interpolacijski polinom interpolira funkciju $f(x) = e^x$ u točkama s x -koordinatama -2 , -1 , 0 i 1 , ocijenite grešku tog interpolacijskog polinoma u točki s x -koordinatom -0.5 .
(20)

Samo ocjena greške

4. Produljenom trapeznom metodom približno izračunajte integral
(25)

$$\int_{0.5}^1 x^{1/3} \cos x \, dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$. Uputa:

$$f''(x) = -\frac{2 \sin x}{9x^{5/3}} + \frac{2 \cos x}{3x^{2/3}} - x^{1/3} \sin x.$$

5. Ako Newtonova metoda za nalaženje nultočaka konvergira linearno, što možete reći
(15) o kakvoj se nultočki radi. Napišite popravak za Newtonovu metodu tako da se ubrza konvergencija.

Dozvoljena pomagala: Formule i kalkulator.

Obvezno predajte papir sa zadacima zajedno s rješenjima.

NUMERIČKA MATEMATIKA — kolokvij (C)

16. 12. 2005.

1. Funkciju $f(x) = x^2 \sin x - x^3$ aproksimiramo na računalu, tako da prvo izračunamo
(15) $\sin x$ korištenjem početnog komada Taylorovog reda za $\sin x$ oko 0, zatim red pomnožimo s x^2 i oduzmemo x^3 . Članove dobivenog reda zbrajamo sve dok prvi odbaćeni član ne padne ispod zadane točnosti ε , $0 < \varepsilon \ll 1$. Hoće li za $x = 10\pi$ takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

2. Zadana je matrica

(25)
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} .$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P , te matrice L i R tako da je $PA = LR$.

3. Ako interpolacijski polinom interpolira funkciju $f(x) = e^x$ u točkama s x -koordinatama -2 , -1 , 0 i 1 , ocijenite grešku tog interpolacijskog polinoma u točki s x -koordinatom -0.5 .
(20)

4. Produljenom trapeznom metodom približno izračunajte integral
(25)

$$\int_{0.5}^1 x^{1/3} \cos x \, dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$. Uputa:

$$f''(x) = -\frac{2 \sin x}{9x^{5/3}} + \frac{2 \cos x}{3x^{2/3}} - x^{1/3} \sin x.$$

5. Ako Newtonova metoda za nalaženje nultočaka konvergira linearno, što možete reći
(15) o kakvoj se nultočki radi. Napišite popravak za Newtonovu metodu tako da se ubrza konvergencija.

Dozvoljena pomagala: Formule i kalkulator.

Obvezno predajte papir sa zadacima zajedno s rješenjima.

NUMERIČKA MATEMATIKA — kolokvij (C)

16. 12. 2005.

1. Funkciju $f(x) = x^2 \sin x - x^3$ aproksimiramo na računalu, tako da prvo izračunamo
(15) $\sin x$ korištenjem početnog komada Taylorovog reda za $\sin x$ oko 0, zatim red pomnožimo s x^2 i oduzmemo x^3 . Članove dobivenog reda zbrajamo sve dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti ε , $0 < \varepsilon \ll 1$. Hoće li za $x = 10\pi$ takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

2. Zadana je matrica
(25)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} .$$

Nadite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nadite matricu permutacije P , te matrice L i R tako da je $PA = LR$.

3. Ako interpolacijski polinom interpolira funkciju $f(x) = e^x$ u točkama s x -koordinatama -2 , -1 , 0 i 1 , ocijenite grešku tog interpolacijskog polinoma u točki s x -koordinatom -0.5 .
(20)

4. Produljenom trapeznom metodom približno izračunajte integral
(25)

$$\int_{0.5}^1 x^{1/3} \cos x \, dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$. Uputa:

$$f''(x) = -\frac{2 \sin x}{9x^{5/3}} + \frac{2 \cos x}{3x^{2/3}} - x^{1/3} \sin x.$$

5. Ako Newtonova metoda za nalaženje nultočaka konvergira linearno, što možete reći
(15) o kakvoj se nultočki radi. Napišite popravak za Newtonovu metodu tako da se ubrza konvergencija.

Dozvoljena pomagala: Formule i kalkulator.

Obvezno predajte papir sa zadacima zajedno s rješenjima.

NUMERIČKA MATEMATIKA — kolokvij (C)

16. 12. 2005.

1. Funkciju $f(x) = x^2 \sin x - x^3$ aproksimiramo na računalu, tako da prvo izračunamo (15) $\sin x$ korištenjem početnog komada Taylorovog reda za $\sin x$ oko 0, zatim red pomnožimo s x^2 i oduzmemo x^3 . Članove dobivenog reda zbrajamo sve dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti ε , $0 < \varepsilon \ll 1$. Hoće li za $x = 10\pi$ takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

2. Zadana je matrica

(25)
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} .$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P , te matrice L i R tako da je $PA = LR$.

3. Ako interpolacijski polinom interpolira funkciju $f(x) = e^x$ u točkama s x -koordinatama -2 , -1 , 0 i 1 , ocijenite grešku tog interpolacijskog polinoma u točki s x -koordinatom -0.5 . (20)

4. Produljenom trapeznom metodom približno izračunajte integral

(25)
$$\int_{0.5}^1 x^{1/3} \cos x \, dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$. Uputa:

$$f''(x) = -\frac{2 \sin x}{9x^{5/3}} + \frac{2 \cos x}{3x^{2/3}} - x^{1/3} \sin x.$$

5. Ako Newtonova metoda za nalaženje nultočaka konvergira linearno, što možete reći (15) o kakvoj se nultočki radi. Napišite popravak za Newtonovu metodu tako da se ubrza konvergencija.

Dozvoljena pomagala: Formule i kalkulator.

Obvezno predajte papir sa zadacima zajedno s rješenjima.

NUMERIČKA MATEMATIKA — kolokvij (D)

16. 12. 2005.

1. Funkciju $f(x) = x \operatorname{ch} x - x$ aproksimiramo na računalu, tako da prvo izračunamo $\operatorname{ch} x$ korištenjem početnog komada Taylorovog reda za $\operatorname{ch} x$ oko 0, zatim red pomnožimo s x i oduzmemo x . Članove dobivenog reda zbrajamo sve dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti ε , $0 < \varepsilon \ll 1$. Hoće li za $x = 10\pi$ takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

2. Zadana je matrica

$$(25) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P , te matrice L i R tako da je $PA = LR$.

3. Ako interpolacijski polinom interpolira funkciju $f(x) = \ln(x - 1)$ u točkama s x -koordinatama 2, 3 i 4, ocijenite grešku tog interpolacijskog polinoma u točki s x -koordinatom 2.5.

4. Produljenom trapeznom metodom približno izračunajte integral

$$(25) \quad \int_{0.5}^1 x^{1/4} \sin x \, dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$. Uputa:

$$f''(x) = -\frac{3 \sin x}{16x^{7/4}} + \frac{\cos x}{2x^{3/4}} - x^{1/4} \sin x.$$

5. U kojoj su vezi (zatvorene) Newton–Cotesove formule na intervalu $[a, b]$ s interpolacijskim polinomima na ekvidistantnoj mreži (na istom intervalu)? Na temelju toga objasnite zašto podizanje reda Newton–Cotesove ne mora nužno dati bolju aproksimaciju vrijednosti integrala?

Dozvoljena pomagala: Formule i kalkulator.

Obvezno predajte papir sa zadacima zajedno s rješenjima.

KOLOKVIJ IZ NUMERIKE

(08. prosinca 2006.)

1. Funkciju $f(x) = x \cdot \ln(1+x)$ aproksimiramo na računalu, tako da izračunamo $\ln(1+x)$ korištenjem početnog komada Taylorovog reda za tu funkciju oko 0. Članove reda zbrajamo sve dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti ε , $0 < \varepsilon \ll 1$. Na kraju dobivenu vrijednost pomnožimo sa x . Hoće li za $x = -10$ takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

2. Sustav

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ -x - 4y + z &= -5 \\ y - 2z &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

rješite Gaussovom metodom.

3. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata odredite funkciju oblika

$$\varphi = a\sqrt{x} + b$$

koja najbolje aproksimira točke $T_0(0, 1)$, $T_1(1, 3)$, $T_2(4, 3)$ i $T_3(9, 5)$.

4. Metodom raspolavljanja nađite nultočku funkcije

$$f(x) = -x + 0,1 + \sin x$$

na intervalu $[\frac{1}{2}, 1]$ s točnošću $\varepsilon = 10^{-2}$.

5. Za diferencijalnu jednadžbu

$$y' = y^2 + x^2, \quad y(0) = 0,5$$

nađite aproksimaciju rješenja u $x = 0,4$ koristeći RK-2 metodu sa korakom $h = 0,2$.

Dozvoljena pomagala: formule i kalkulator

grupa C

KOLOKVIJ IZ NUMERIKE

(08. prosinca 2006.)

1. Funkciju $f(x) = x \cdot \ln(1+x)$ aproksimiramo na računalu, tako da izračunamo $\ln(1+x)$ korištenjem početnog komada Taylorovog reda za tu funkciju oko 0. Članove reda zbrajamo sve dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti ε , $0 < \varepsilon \ll 1$. Na kraju dobivenu vrijednost pomnožimo sa x . Hoće li za $x = -10$ takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

2. Sustav

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 2 \\ -x - 4y + z &= -5 \\ y - 2z &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

rješite Gaussovom metodom.

3. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata odredite funkciju oblika

$$\varphi = a\sqrt{x} + b$$

koja najbolje aproksimira točke $T_0(0, 1)$, $T_1(1, 3)$, $T_2(4, 3)$ i $T_3(9, 5)$.

4. Metodom raspolavljanja nađite nultočku funkcije

$$f(x) = -x + 0,1 + \sin x$$

na intervalu $[\frac{1}{2}, 1]$ s točnošću $\varepsilon = 10^{-2}$.

5. Za diferencijalnu jednadžbu

$$y' = y^2 + x^2, \quad y(0) = 0,5$$

nađite aproksimaciju rješenja u $x = 0,4$ koristeći RK-2 metodu sa korakom $h = 0,2$.

Dozvoljena pomagala: formule i kalkulator

PONOVLJENI KOLOKVIJ - NUMERIKA

(6. lipnja 2006.)

1. Funkciju $f(x) = x^3 \sin x - x^2$ aproksimiramo na računalu korištenjem početnog komada Taylorovog reda za tu funkciju oko 0. Članove reda zbrajamo dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti ε , $0 < \varepsilon \ll 1$.

Hoće li za $x = -10$ takva aproksimacija biti približnao točna ili ne? Objasnite.

2. Pomoću LR faktorizacije bez pivotiranja riješite sustav:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Napišite sustav jednažbi koji se mora riješiti kako bi se metodom najmanjih kvadrata našla funkcija oblika

$$y(x) = a + b \ln x$$

koja aproksimira podatke (x_k, f_k) , $k = 0, \dots, n - 1$.

4. U Newtonovom obliku nađite interpolacijski polinom koji interpolira funkciju

$$f(x) = \frac{18}{2x - 1}$$

u točkama s x -koordinatama $-1, 2, 5$.

5. Metodom bisekcije nađite nultočku funkcije

$$f(x) = \sin x - x$$

na intervalu $[0.5, 1]$ s točnošću $\varepsilon = 2^{-6}$.

NUMERIČKA MATEMATIKA — kolokvij (F)

3. 2. 2006.

1. Funkciju $f(x) = xe^x - x - x^2$ aproksimiramo na računalu, tako da prvo izračunamo (15) e^x korištenjem početnog komada Taylorovog reda za e^x oko 0, zatim red pomnožimo s x i oduzmemo što piše. Članove dobivenog reda zbrajamo sve dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti ε , $0 < \varepsilon \ll 1$. Hoće li za $x = -10$ takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

2. Zadana je LR faktorizacija matrice (s pivotiranjem), $PA = LR$ (25)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & \\ & 3 & 0 & \\ & & 1 & \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Korištenjem zadane faktorizacije nađite rješenje sustava $Ax = b$.

3. Metodom najmanjih kvadrata nađite pravac koji prolazi kroz prolazi točkom (5, -5) (25) i aproksimira podatke:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_k & 1.0 & 2.0 & 3.0 & 4.0 \\ \hline y_k & -1.1 & -1.9 & -3.1 & -4.2 \end{array}.$$

4. U Newtonovom obliku nađite interpolacijski polinom koji interpolira funkciju (20)

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

u točkama s x -koordinatama 0, 1 i 3. Ima li takav interpolacijski polinom smisla?

5. Ispitajte integrira li egzaktno osnovna (neproduljena) trapezna formula na intervalu (15) $[0, 1]$ funkciju $f(x) = ax^3$, $a \neq 0$.

Dozvoljena pomagala: Formule i kalkulator.

PONOVLJENI KOLOKVIJ - NUMERIKA

(6. lipnja 2006.)

1. Funkciju $f(x) = x^3 \sin x - x^2$ aproksimiramo na računalu korištenjem početnog komada Taylorovog reda za tu funkciju oko 0. Članove reda zbrajamo dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti ε , $0 < \varepsilon \ll 1$.

Hoće li za $x = -10$ takva aproksimacija biti približnao točna ili ne? Objasnite.

2. Pomoću LR faktorizacije bez pivotiranja riješite sustav:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Napišite sustav jednadžbi koji se mora riješiti kako bi se metodom najmanjih kvadrata našla funkcija oblika

$$y(x) = a + b \ln x$$

koja aproksimira podatke (x_k, f_k) , $k = 0, \dots, n - 1$.

4. U Newtonovom obliku nađite interpolacijski polinom koji interpolira funkciju

$$f(x) = \frac{18}{2x - 1}$$

u točkama s x -koordinatama $-1, 2, 5$.

5. Metodom bisekcije nađite nultočku funkcije

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{2}x$$

na intervalu $[1.5, 2]$ s točnošću $\varepsilon = 2^{-6}$.

KOLOKVIJ IZ NUMERIKE

(08. prosinca 2006.)

1. Funkciju $f(x) = \frac{x}{1+x}$ aproksimiramo na računalu, tako da izračunamo $\frac{x}{1+x}$ korištenjem početnog komada Taylorovog reda za tu funkciju oko 0. Članove reda zbrajamo sve dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti ε , $0 < \varepsilon \ll 1$. Hoće li za $x = -10$ takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

2. Sustav $Ax = b$ rješavamo LR-faktorizacijom s parcijalnim pivotiranjem.

Zadani su vektor $b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, matrica permutacija $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

te matrice $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, gdje je $LR = PA$.

Izračunajte x .

3. Newtonovom metodom nađite nultočku funkcije

$$f(x) = x - 4 + \ln x$$

na intervalu $[2, 3]$ s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$.

4. Odredite Newtonov oblik interpolacijskog polinoma koji interpolira funkciju $f(x) = x^3 - 2$ u točkama s x-koordinatama $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ i $x_3 = 2$.
Kolika je aproksimacija, a kolika stvarna vrijednost funkcije u točki $x = 0,5$?
Dobiveni polinom ne treba sređivati.

5. Poznato je opće rješenje neke diferencijalne jednadžbe koje glasi

$$y(x) = c_1 \cdot \sin(x + 1) + x^2 + x - 5.$$

Zadan je početni uvjet $y(2) = 0$. Je li ta jednadžba kruta ako napredujemo po x ? Objasnite.

Dozvoljena pomagala: formule i kalkulator

NUMERIČKA MATEMATIKA — kolokvij (A)

25. 5. 2004.

1. Funkciju $\operatorname{th} x$ aproksimiramo na računalu, tako da izračunamo $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{ch} x$ korištenjem početnih komada Taylorovih redova za te funkcije oko 0. Članove svakog red zbrajamo (posebno) sve dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti ε , $0 < \varepsilon \ll 1$. Na kraju, podijelimo dobivenu vrijednost $\operatorname{sh} x$ s $\operatorname{ch} x$. Hoće li za $x = -10$ takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite. Što će se dogoditi ako izaberemo “preveliki” x ?

2. Može li matrica L ,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 3 & 2 & 1 & \end{bmatrix},$$

biti rezultat LR faktorizacije

- (a) bez pivotiranja,
- (b) s parcijalnim pivotiranjem

za neku matricu A ? Detaljno objasnite odgovore.

3. Napišite sustav jednadžbi koji morate riješiti da biste metodom najmanjih kvadrata našli parabolu

$$\varphi(x) = ax^2 + x + c$$

koja aproksimira podatke (x_k, f_k) , $k = 0, \dots, n$.

4. Metodom bisekcije nađite nultočku funkcije

$$f(x) = \operatorname{ctg} x - x$$

na intervalu $[0.5, 1.5]$ s točnošću 10^{-2} . Uputa: $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} - 1$, $f''(x) = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$.

5. Napišite kako treba transformirati diferencijalnu jednadžbu

$$y''' + y'' + y' + y + x = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 5,$$

tako da se može riješiti, na primjer, Runge–Kutta metodom za sustave diferencijalnih jednadžbi.

Dozvoljena pomagala: Formule i kalkulator.

Obvezno predajte papir sa zadacima zajedno s rješenjima.

MATEMATIKA 3

(20. siječnja, 2006.)

Napomena. Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4-9.

1. Vrijednost funkcije $f(x) = (x + 10)^5$ za negativan x takav da je $|x| \approx 0$ računamo na dva načina. Prvi način je direktna upotreba formule $(x + 10)^5$. Drugi način koristi Taylorov razvoj oko nule funkcije f , a nakon uvrštavanja x -a članovi se zbrajaju. Ako se oba načina provode u realnoj aritmetici računala, koji je točniji i zašto?

2. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite pravac koji prolazi točkom $(1, 1.5)$ i aproksimira sljedeći skup podataka $(-1, 0.5), (0, 1.1), (2, 2.1)$.

3. Produljenom trapeznom metodom približno izračunajte integral

$$\int_4^5 \sqrt{x} \ln x \, dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka $\varepsilon = 10^{-3}$.

Uputa: $f''(x) = -(x^{-3/2} \ln x)/4$.

4. Žena rađa djevojčicu s vjerojatnošću 0.45, a dječaka s vjerojatnošću 0.55. Kolika je vjerojatnost da su među troje rođene djece dvije djevojčice? Napraviti raspodjelu vjerojatnosti za slučajnu varijablu koja predstavlja broj djevojčica među troje djece.

5. U prvoj kutiji imamo dvije kuglice, crnu i bijelu, a u drugoj samo bijelu. Iz prve prebacimo jednu kuglicu u drugu, i nakon toga iz druge izvučemo kuglicu. Ako je ta kuglica bijela, kolika je vjerojatnost da smo iz prve u drugu prebacili crnu?

6. Prosječna dužina novorođenčeta je 53cm, uz standardnu devijaciju 1.5cm. Izračunajte koliki će se postotak novorođenih nalaziti u granicama od 51cm do 55cm.

7. Odredite vektor normale i tangencijalnu ravninu na plohu koja je paramerizirana s $\vec{r}(u, v) = (u + v, uv, v^2)$ u točki s koordinatama $T(1, 0, 1)$.

8. Pokažite da je polje $\vec{F} = (2yz + 6xz, 2xz + \frac{1}{y}, 2xy + 3x^2)$ te izračunajte

$$\int_K \vec{F} \, d\vec{r}$$

gdje je K krivulja koja spaja točke $A(0, 1, 0)$ i $B(1, 1, 1)$.

9. Izračunajte masu tijela gustoće $\rho = xz$ koje se nalazi iznad ravnine $z = 0$, ispod ravnine $z = y$, a omeđeno je ravninama $y = -1, y = 1, x = 1$.

Rezultati ispita: sljedeći radni dan u 13:00 sati