MATEMATIKA 3

(11. studenog 2003.)

DODATNI ZADACI: ANALITIČKE FUNKCIJE, DERIVACIJE

1. Ispitati da li je $f(z) = ze^z$ analitička i i ako je naći derivaciju.

$f(x+iy) = (x+iy)e^{x+iy} = e^x(x+iy)(\cos y + i\sin y) = e^x(x\cos y - y\sin y + i(y\cos y + x\sin y))$
$u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$
$v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y)$

$u_x = e^x(x\cos y - y\sin y) + e^x\cos y$
$u_y = e^x(-x\sin y - \sin y) + e^x\cos y$
$v_y = e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y)$
$v_x = e^x(y\cos y + x\sin y) + e^x\sin y$

$u_x = v_y$ i $u_y = -v_x$, zadovoljeni su Cauchy-Riemann uvjeti pa je funkcija analitička.

Derivacija $f'(z) = (ze^z)' =$ (npr.) $u_x + iv_x =$
$= e^x(x\cos y - y\sin y) + e^x\cos y + ie^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) =$ (već ovo je OK)
$= e^x(x+iy)\cos y + e^x(-y+ix)\sin y + e^x(\cos y + i\sin y) =$
$= e^x z\cos y + e^x(iz)\sin y + e^x e^{iy} =$
$= e^x z(\cos y + i\sin y) + e^z =$
$= e^x z e^{iy} + e^z = ze^z + e^z$

N.B funkcija $f(z) = ze^z$ je produkt dvije analitičke funkcije (z i e^z) pa je i sama analitička!!!!
$f'(z) = ze^z + e^z$ – to je kao derivacija realne funkcije! (derivirate po z...)
Slično bi npr. $f(z) = e^{z^2}$ bila derivabilna kao kompozicija dvije derivabilne, i derivacija joj je $f'(z) = 2ze^{z^2}$.
Živ bili pa riješili.

Tako su i npr $(\sin z)' = \cos z$, i $(\cos z)' = \sin z$.
Noh, da to dobijete morate znati $u(x,y)$ i $v(x,y)$ što ćete napraviti na sljedeći način:

2. Pokazati da je $\sin z = \sin x ch y + i\cos x sh y$. (Slično dobijete $\cos z = \cos x ch y - i\sin x sh y$ – pokušajte!).

Treba samo raspisivati...

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2i} =$$

$= \frac{1}{2i}[(e^{-y} - e^y)\cos x + i(e^{-y} + e^y)\sin x] =$
$= chy\cos x - ishy\sin x$

I sad provjerite Cauchy-Riemanna, nađete derivaciju...

3. Provjeriti da li je $f(z) = Re(z^2)$ analitička.

Možete provjeriti pješice, ali i odmah zaključiti kako će $u(x,y)$ biti različit od 0, dakle ovisiti o x i y, a $v(x,y) = 0$. Pak nije analitička.