Matematika 4

pismeni ispiti

Sadržaj

MATEMATIKA 4, 4A

(23. lipnja, 2005.)

Napomena. *Matematika 4 rješava zadatke 1–6, a Matematika 4A zadatke 4–8.*

1. Bilinearnim preslikavanjem

$$f(z) = \frac{z + 2i}{z}$$

nađite sliku realne osi.

2. Korištenjem Cauchyjeve integralne formule izračunajte vrijednost integrala

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-3)(z+1)}\, dz,$$

gdje je Γ pozitivno orijentirana kružnica sa središtem u 2, radijusa 2.

3. Za $0 < |z + 1| < 3$, razvijte u Laurentov red (po potencijama od $z + 1$) funkciju

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z+1)}.$$

4. Nađite interpolacijski polinom u Newtonovom obliku, koji interpolira funkciju

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

u točkama s x–koordinatama 1, 9, 27. Izračunajte vrijednost interpolacijskog polinoma u točki $x = 6$ i nađite pripadnu pogrešku.

5. Nađite koliko je podintervala potrebno (po ocjeni greške) da bi se trapeznom metodom izračunala približna vrijednost integrala

$$\int_0^2 \left(\frac{x^5}{60} - \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{6} + x^2 + x + 1 \right) dx$$

tako da greška bude manja od 10^{-6}.

6. Zadan je sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 - x_2 - t \\ x_2' &= x_1 - t x_2 \end{aligned}$$

uz početne uvjete $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$. Runge–Kutta metodom 2. reda nađite približno rješenje ovog sustava za $t = 0.2$ uz korak $h = 0.2$.

7. Funkciju $\frac{1}{1+x^2}$ aproksimiramo na računalu, tako da izračunamo korištenjem početnog komada Taylorovog reda za tu funkcije oko 0. Uputa: red se dobiva iz reda za $\frac{1}{1+x}$ zamjenom $x \to x^2$. Članove svakog red zbrajamo sve dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti ε, $0 < \varepsilon \ll 1$. Hoće li za $x = 0.5$ takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

8. Gaussovim eliminacijama s parcijalnim pivotiranjem nađite rješenje linearnog sustava $Ax = b$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rezultati ispita*: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 4, 4A

(07. srpnja 2005.)

Matematika 4 rješava zadatke 1–6, a Matematika 4a zadatke 4–8.

1. Nađite sve točke u kojima je funkcija
$$f(z) = \bar{z}|z|^2$$
analitička.

2. Korištenjem teorema o reziduumu izračunajte
$$\oint_\Gamma \cos\left(\frac{5}{z}\right) dz,$$
gdje je Γ pozitivno orijentirana elipsa sa središtem u 0, velikom poluosi 5 i malom poluosi 2.

3. Za $0 < |z-3| < 2$, razvijte u Laurentov red (po potencijama od $z-3$) funkciju
$$f(z) = \frac{2}{(z-3)(z-1)}.$$

4. Metodom bisekcije nađite nultočku funkcije
$$f(x) = \ln(x+5) + 2x + 9$$
koja se nalazi u intervalu $[-4.5, -4]$, tako da greška bude manja ili jednaka od 10^{-3}.

5. Nađite interpolacijski polinom u Lagrangeovoj formi, koji interpolira funkciju
$$f(x) = 10^x$$
u točkama s x-koordinatama 1, 2 i 4. Nađite vrijednost tog polinoma u točki 3 i ocijenite grešku u toj točki (ne stvarnu grešku!).

6. Produljenom Simpsonovom metodom približno izračunajte integral
$$\int_4^5 \sqrt{x}\ln x\, dx$$
tako da greška bude manja ili jednaka $\varepsilon = 10^{-6}$.
Uputa: $f^{(4)}(x) = x^{-7/2}\left(1 - \frac{15}{16}\ln x\right)$.

7. Zadana je matrica
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$
Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$.

8. Poznato je opće rješenje neke diferencijalne jednadžbe koje glasi
$$y(x) = c_1 e^{-20x} + 3x - 3.$$
Zadan je početni uvjet $y(1) = 0$. Je li ta diferencijalna jednadžba kruta ako napredujemo po x? Objasnite!

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 4 (STARA)

(01. listopad 2005.)

1. Pretpostavimo da je 5% vijaka proizvedenih na nekom stroju defektno. Ako se vijci pakiraju u kutije od 50 komada, kolika je Poissonova aproksimacija vjerojatnosti da će kutija sadržavati najviše 2 loša komada?

2. (a) Skicirajte funkciju gustoće
$$f(x) = \begin{cases} 0.5, & \text{za } 3 < x < 5, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$
te skicirajte funkciju distribucije $F(x)$.
   (b) Nađite $P\{0 \leq x \leq 3.5\}$.
   (c) Nađite c takav da je $P\{X \leq c\} = \dfrac{3}{4}$.

3. X je varijabla normalne razdiobe $N(\mu = 3, \sigma^2 = 1)$. Kolika je vjerojatnost da od 100 nasumce odabranih vrijednosti varijable X barem dvije budu iz intervala 3 ± 0.05?

4. Nađite interpolacijski polinom u Lagrangeovom obliku koji interpolira funkciju
$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$
u točkama s x-koordinatama 1, 8, 27 i 64. Tim interpolacijskim polinomom nađite aproksimaciju za $\sqrt[3]{50}$, ocjenu greške i pravu grešku u toj točki.

5. Nađite koliko je podintervala potrebno (po ocjeni greške) da bi se Simpsonovom metodom izračunala približna vrijednost integrala
$$\int_0^4 \left(\frac{x^5}{10} - x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1 \right) dx$$
tako da greška bude manja od 10^{-6}.

6. Zadan je sustav diferencijalnih jednadžbi
$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 - t \\ x_2' &= x_1 + t x_2 \end{aligned}$$
uz početne uvjete $x_1(2) = 1, x_2(2) = -1$. Runge–Kutta metodom 2. reda nađite približno rješenje ovog sustava za $t = 2.1$ uz korak $h = 0.1$.

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 4 (STARA)

(01. listopad 2005.)

Matematika 4 rješava zadatke 1–6, a Matematika 4a zadatke 4–8.

1. Nađite sva rješenja jednadžbe
$$\sqrt{z} = \bar{z}.$$

2. Izračunajte
$$\oint_\Gamma |z|^2 \, dz,$$
gdje je Γ četvrtina luka kružnice $|z| = 3$ od točke $(3, 0)$ do $(0, 3)$.

3. Za $|z - 1| > 0$, razvijte u Laurentov red (po potencijama od z) funkciju
$$f(z) = \frac{\cos(z-1)}{(z-1)^4}.$$
Iz Laurentovog reda odredite tip singulariteta u točki 1. Uputa: koristite poznati Taylorov red.

4. Funkciju $x/\cos x$ aproksimiramo na računalu, tako da koristimo početni komad Taylorovog reda za funkciju cos oko 0, a zatim izvršimo naznačenu operaciju dijeljenja. Članove reda zbrajamo sve dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti ε. Hoće li za $x = 15$ takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

5. Nađite koliko je podintervala potrebno (po ocjeni greške) da bi se Simpsonovom metodom izračunala približna vrijednost integrala
$$\int_0^4 \left(\frac{x^5}{10} - x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1 \right) dx$$
tako da greška bude manja od 10^{-6}.

6. Zadan je sustav diferencijalnih jednadžbi
$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 - t \\ x_2' &= x_1 + t x_2 \end{aligned}$$
uz početne uvjete $x_1(2) = 1, x_2(2) = -1$. Runge–Kutta metodom 2. reda nađite približno rješenje ovog sustava za $t = 2.1$ uz korak $h = 0.1$.

7. Nađite interpolacijski polinom u Lagrangeovom obliku koji interpolira funkciju
$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$
u točkama s x-koordinatama 1, 8, 27 i 64. Tim interpolacijskim polinomom nađite aproksimaciju za $\sqrt[3]{50}$, ocjenu greške i pravu grešku u toj točki.

8. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite pravac
$$\varphi(x) = ax + b$$
koji na intervalu $[0, 2]$ aproksimira funkciju
$$f(x) = x^3.$$
Uputa: neprekidna metoda najmanjih kvadrata na intervalu $[c, d]$ minimizira integral, a ne sumu, tj. traži se
$$\int_c^d (f(x) - \varphi(x))^2 \, dx \to \min.$$

Rezultati ispita*: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 4 (STARA)

(06. srpnja 2006.)

Napomena. *Matematika 4 rješava zadatke 1–6, a Matematika 4A zadatke 4–8.*

1. Ispitajte gdje je funkcija $ze^{\bar{z}}$ analitička.

2. Odredite singularitete funkcije

$$f(x) = \frac{1}{e^z} + \frac{1}{z}.$$

Koliki je radijus konvergencije Taylorovog razvoja funkcije f oko točke $z_0 = 1$?
(ne treba razvijati funkciju u red)

3. Izračunajte integral

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z^2 - 5}$$

gdje je Γ pozitivno orijentirana kružnica sa središtem u 2, radijusa 2.

4. Funkciju $\sin x + \operatorname{sh} x$ aproksimiramo u računalu, korištenjem početnih komada Taylorovih redova oko 0 za te funkcije. Članove svakog reda zbrajamo sve dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti ε, $0 < \varepsilon \ll 1$. Hoće li za $x = 10$ takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

5. Profesor Senilković našao se u problemima, jer je zaboravio je li LR faktorizaciju matrice radio s parcijalnim pivotiranjem ili bez njega. Dobivena matrica L bila je

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pomozite prof. Senilkoviću i objasnite mu zbog čega je odmah vidljivo je li koristio pivotiranje ili ne.

6. Nađite koliko je podintervala potrebno (po ocjeni greške), a zatim produljenom Simpsonovom metodom izračunajte približnu vrijednost integrala

$$\int_1^2 \left(\frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{4} + 2x^2 - x \right) dx$$

tako da greška bude manja od 10^{-4}.

7. Poznato je opće rješenje neke diferencijalne jednadžbe koje glasi

$$y(x) = c_1 e^{10x} + 1.$$

Zadan je početni uvjet $y(0) = 2$. Je li ta diferencijalna jednadžba kruta ako napredujemo po x? Objasnite!

8. Napišite linearni sustav koji treba riješiti da izračunate koeficijente a i b ako točke (x_k, y_k), $x_k, y_k > 0$, $k = 0, \ldots, n$ aproksimiramo funkcijom oblika

$$\varphi(x) = (a \ln x + b)^2$$

po diskretnoj metodi najmanjih kvadrata, uz uvjet da funkcija φ prolazi točkom $(1, 1)$. Uputa: linearizirajte funkciju.

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 4 (STARA)

(11. rujna 2006.)

1. Jedna serija od 100 proizvoda ima 4% neispravnih, a druga serija od 81 proizvoda ima 9% neispravnih. Iz prve serije slučajno se bira 15, a iz druge 36 proizvoda: oni se izmiješani stavljaju u jednu kutiju. Zatim se iz te kutije slučajno bira jedan proizvod. Kolika je vjerojatnost da je on dobar?

2. Jedna obitelj ima petero djece. Ako je vjerojatnost rođenja dječaka i djevojčice jednaka, izračunajte vjerojatnost da je u toj obitelji

(a) 3 dječaka i 2 djevojčice,

(b) broj dječaka nije manji od 2.

3. Težina kave pakirane u omote distribuirana je po normalnom zakonu s očekivanjem 250 g i standardnom devijacijom od 5 g. Nađite granice u kojima će se kretati težina kave tako da vjerojatnost ishoda izvan tih granica bude 7%.

4. Za matricu A napravimo LR faktorizaciju s parcijalnim pivotiranjem, tj. nađemo matricu permutacije P, te L i R takve da vrijedi $PA = LR$. Mogu li tako dobivene matrice L i R biti jednake

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix}?$$

Objasnite – ako da zašto da, ako ne zašto ne.

5. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite polinom stupnja 1 koji aproksimira funkciju

$$f(x) = \ln(ax)$$

na intervalu $[1, 2]$, gdje je $a > 0$ zadani realni parametar. (Uputa: neprekidna metoda znači da se minimizira integral, a ne suma!)

6. Zadana je diferencijalna jednadžba drugog reda

$$y'' - 2y' + y = x$$

uz početne uvjete $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$. Diferencijalnu jednadžbu napišite kao sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda i nađite aproksimaciju njenog rješenja u $x = 1.1$, korištenjem RK–1 metode s korakom $h = 0.1$.

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 4 (STARA)

(02. listopada 2006.)

Napomena. *Matematika 4 rješava zadatke 1–6, a Matematika 4A zadatke 4–8.*

1. Odredite brojeve za koje vrijedi:

$$z\overline{z} = 1, \qquad \arg z = \arg \overline{z}$$

2. Ispitajte derivabilnost funkcije $|z|^2$.

3. Odredite singularitete funkcije

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

4. Izračunajte:

$$\int_C \frac{e^{2z}}{(z-i)(z-1)}dz,$$

C je pozitivno orjentirana kružnica oko $z_0 = 4$ radijusa 5.

5. Metodom raspolavljanja nađite rješenje jednadžbe

$$\cos x = 2x$$

na segmentu $[0, 1]$ s točnošću $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-2}$.

6. Sustav

$$\begin{aligned} 2x + 5y - 3z &= 2 \\ 2x + 5y + 2z &= 7 \\ -x - 2y - z &= -4 \end{aligned}$$

riješite Gaussovom metodom. Da li ta metoda daje rješenje?
Ako ne, objasnite zašto! Koju metodu upotrijebiti da bi dobili rješenje?

7. Odredite Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma koji interpolira funkciju

$$f(x) = \sin(x\frac{\pi}{2})$$

u točkama $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ i $x_2 = 1$.
Napomena: Dobiveni polinom nije potrebno uređivati.

8. Produljenom trapeznom formulom izračunajte vrijednost integrala

$$\int_1^2 \ln x \quad dx$$

s točnosšću $\varepsilon = 10^{-2}$.

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 4 (STARA)

(02. listopada 2006.)

1. U svakoj od dvije kutije nalaze se po 2 bijele kuglice. U prvoj kutiji se nalaze tri crne kuglice, u drugoj 4 crne. Prenesemo dvije kuglice iz prve u drugu kutiju. Zatim prenesemo dvije kuglice iz druge u prvu kutiju. Nakon toga izvucemo dvije kuglice iz druge kutije.

a) Kolika je vjerojatnost su kuglice bijele?

b) Kolika je vjerojatnost da je u prvoj kutiji samo jedna bijela kuglica ako smo izvukli dvije bijele kuglice?

2. Trudnoća kod ljudi traje u prosjeku 266 dana sa standardnom devijacijom od 14 dana. Trajanje trudnoće može se dobro aproksimirati normalnim modelom.

a) Odredite koliki postotak trudnoća traje između 270 i 280 dana.
b) Odredite minimalno trajanje 25% najduljih trudnoća.

3. U uzorku od 36 studenata prolaznost na ispitu iz Matematike III bila je 61%. O kojim granicama prolaznost očekujemo za sve studente s pouzdanošću 99.73%?

4. Sustav

$$\begin{aligned} 2x + 5y - 3z &= 2 \\ 2x + 5y + 2z &= 7 \\ -x - 2y - z &= -4 \end{aligned}$$

riješite Gaussovom metodom. Da li ta metoda daje rješenje?
Ako ne, objasnite zašto! Koju metodu upotrijebiti da bi dobili rješenje?

5. Odredite Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma koji interpolira funkciju

$$f(x) = \sin(x\frac{\pi}{2})$$

u točkama $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ i $x_2 = 1$.
Napomena: Dobiveni polinom nije potrebno uređivati.

6. Produljenom trapeznom formulom izračunajte vrijednost integrala

$$\int_1^2 \ln x \quad dx$$

s točnosšću $\varepsilon = 10^{-2}$.

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 4, 4A

(15. veljače 2007.)

Napomena. *Matematika 4 rješava zadatke 1–6, a Matematika 4A zadatke 4–8.*

1. Nađite sva rješenja jednadžbe

$$e^z = \frac{1}{e^z}.$$

2. Izračunajte

$$\oint_\Gamma |z|^2 \, dz,$$

gdje je Γ dio pravca koji povezuje točke $(-2, 0)$ i $(0, -2)$.

3. Za $|z - 1| > 0$, razvijte u Laurentov red (po potencijama od $z - 1$) funkciju

$$f(z) = \frac{\sin(z-1)}{(z-1)^3}.$$

Iz Laurentovog reda odredite tip singulariteta u točki 1. Uputa: koristite poznati Taylorov red.

4. Gaussovom metodom s parcijalnim pivotiranjem riješite sustav

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6z &= 5 \\ 6x - 12z &= -7 \\ -4x - 6y + 6z &= 1 \end{aligned}$$

5. Odredite zaustavni kriterij za Newtonovu metodu kojom tražimo nultočku funkcije

$$f(x) = -3 + x \cdot \ln x$$

na intervalu $[1, 3]$ s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$.
Da li je interval $[\frac{1}{10}, 3]$ pogodan za traženje nultočke istom metodom? Objasnite zašto!

6. Odredite Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma koji prolazi kroz točke $T_0(-1, 0)$, $T_1(0, 2)$, $T_2(1, 2)$ i $T_3(2, 0)$.

7. Produljenom trapeznom formulom izračunajte vrijednost integrala

$$\int_1^3 (-3 + x \cdot \ln x) dx$$

s 8 podintervala.

8. Nađite broj podintervala potreban da se produljenom trapeznom formulom postigne točnost $\varepsilon = 10^{-4}$ prilikom računanja vrijednosti integrala

$$\int_1^3 (-3 + x \cdot \ln x) dx.$$

Koliki je broj podintervala potreban da bi se ista točnost postigla upotrebom produljene Simpsonove formule?

Rezultati ispita: *sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 4, 4A

(05. svibnja 2007.)

Napomena. *Matematika 4 rješava zadatke 1–6, a Matematika 4A zadatke 4–8.*

1. Izračunajte $\sin(2\pi + i)$. Koristite da za kompleksne brojeve z vrijedi

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} .$$

2. Razvijte funkciju $\frac{z+1}{z^2+1}$ u Taylorov red oko $z_0 = 0$.

3. Izračunajte integral

$$\oint_{\Gamma} z^2 + \bar{z} dz$$

po pozitivno orjentiranoj jediničnoj kružnici Γ.

4. Pomoću LR-faktorizacije odredite matrice L i R tako da vrijedi A=LR, ako je matrica A zadana s

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. Metodom raspolavljanja odredite nultočku funkcije

$$f(x) = e^x - 2 \cdot \cos(x)$$

na intervalu $[0, 1]$, tako da greška u izračunatom rješenju bude manja ili jednaka od $\varepsilon = 10^{-2}$.

6. Odredite jednadžbe za računanje skalara $a, b \in \mathbb{R}$, ako u diskretnoj metodi najmanjih kvadrata, ako skup točaka (x_k, y_k), $k = 0, ..., n$, aproksimiramo funkcijom oblika

$$\varphi = a \cdot \ln(x) + b.$$

7. Produljenom Simpsonovom formulom izračunajte vrijednost integrala

$$\int_0^{0,6} (e^x - 2 \cdot \cos x) dx$$

s 6 podintervala.

8. Poznato je opće rješenje neke diferencijalne jednadžbe koje glasi

$$y(x) = A \cdot \cos(x) + 2e^x + 3.$$

Zadan je početni uvjet $y(0) = 5$. Je li ta jednadžba kruta ako napredujemo po x? Objasnite.

Rezultati ispita*: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 4, 4A

(14. lipnja 2007.)

Napomena. *Matematika 4 rješava zadatke 1–6, a Matematika 4A zadatke 4–8.*

1. Izračunajte realni i imaginarni dio broja

$$e^{1+2\pi i}.$$

2. Razvijte funkciju

$$\frac{2z+1}{z^3+1}$$

u Taylorov red oko $z_0 = 2$. Napišite barem prva četiri člana.

3. Izračunajte integral

$$\oint_\Gamma i \cdot \bar{z}\, dz$$

po pozitivno orjentiranoj jediničnoj kružnici Γ.

4. Pomoću LR faktorizacije s parcijalnim pivotiranjem, za zadanu matricu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

odredite matrice L, R i P, tako da vrijedi $LR = PA$.

5. Odredite Newtonov oblik interpolacijskog polinoma koji interpolira točke $T_1(-1, 0)$, $T_2(0, 1)$, $T_3(1, 2)$ i $T_4(2, 1)$.

6. Metodom raspolavljanja nađite nultočku funkcije

$$f(x) = \ln(x) - 2$$

na intervalu $[7, 8]$ s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$.

7. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = \frac{a}{x} + 3$$

koja najbolje aproksimira skup točaka: $T_1(1, 1)$, $T_2(2, 2)$, $T_3(3, 2)$ i $T_4(4, 1)$.

8. Eulerovom metodom s korakom $h = 0,2$ nađite rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = x^2 + xy, \qquad y(0) = 0,5$$

u točki $x = 0,6$.

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 4, 4A

(29. lipnja 2007.)

Napomena. *Matematika 4 rješava zadatke 1–6, a Matematika 4A zadatke 4–8.*

1. Nađite sva rješenja jednadžbe

$$e^{z+1} = \frac{1}{e^{z+1}}.$$

2. Razvijte funkciju

$$\frac{z+1}{z^3+1}$$

u Taylorov red oko $z_0 = 2$. Napišite barem prva četiri člana.

3. Izračunajte integral

$$\oint_\Gamma 1 + \overline{i \cdot z}\, dz$$

po pozitivno orjentiranoj jediničnoj kružnici Γ.

4. Broj $\frac{\sin(25)}{e^{-15}}$ aproksimiramo na računalu korištenjem početnih komada Taylorovih redova za funkcije $f_1(x) = \sin(x)$ i $f_2 = e^x$ oko točke 0. Članove zbrajamo dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti ε, a nakon toga podijelimo dobivene vrijednosti. Hoće li takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite svoj odgovor!

5. Sa matricama

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dana je LR-faktorizacija matrice A dobivena pomoću parcijalnog pivotiranja. Riješite sustav $Ax = b$, odnosno $LRx = Pb$, ako je desna strana matrične jednadžbe dana s vektorom

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6. Odredite Newtonov oblik interpolacijskog polinoma koji interpolira funkciju

$$f(x) = \sin\left(x\frac{\pi}{2}\right)$$

u točkama $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ i $x_2 = 1$.
Napomena: Dobiveni polinom nije potrebno uređivati.

7. Pomoću diskretne metode najmanjih kvadrata odredite parabolu

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

koja prolazi kroz točke $A(0,3)$ i $B(1,4)$, te najbolje aproksimira skup točaka
$T_1(-1,2)$, $T_2(2,4)$ i $T_3(3,1)$.

8. Poznato je opće rješenje neke diferencijalne jednadžbe koje glasi

$$y(x) = A \cdot \cos(x) + 2e^x + 3.$$

Zadan je početni uvjet $y(0) = 5$. Je li ta jednadžba kruta ako napredujemo po x? Objasnite.

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*