MATEMATIKA 4

(kompleksna analiza, vježbe 1)

ime i prezime	

1. Izračunajte

a) $(1+i)\cdot(1-i) =$
b) $(2i+1)^2 =$
c) $i^2 + i^4 =$
d) $i + i^2 + i^3 + i^4 =$
e) $(a+bi)(a-bi) =$
f) $(2+i)(i-2) =$

Skicirajte rješenja u kompleksnoj ravnini.

2. Pokažite da za konjugiranje ($\overline{a+bi} = a - bi$) vrijedi

a) $\overline{\overline{z}} = z$
b) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
c) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
d) $z\cdot\overline{z} = |z|^2$

3. Izračunajte

a) $\mathrm{Re}(1 + 2i + 4i^2) =$

b) $\mathrm{Im}(1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5) =$

c) $\overline{2i(i-1)(1-i)} =$
d) $\dfrac{1-i}{1+i} =$

4. Skicirajte rješenja jednadžbe

a) $z^2 + 2z + 2 = 0$;
b) $z^4 = 1$;

u kompleksnoj ravnini.

5. Riješite jednadžbe

a) $z^2 = -4$
b) $z + \overline{z} = 1,\ z\overline{z} = \frac{1}{4}$
c) $\dfrac{1}{i+z} = 1 + i$

6.* $z_1 = 1$ i $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ su dva od ukupno tri različita rješenja jednadžbe $z^3 - 1 = 0$. Odredite treće rješenje (ili korijen) ove jednadžbe. Skicirajte sva tri rješenja u kompleksnoj ravnini.

7. Skicirajte brojeve $z_1 = -1$, $z_2 = 1 + i$ i $z_3 = 1 - i$ u kompleksnoj ravnini. Neka je $f(z) = i\cdot z$. Izračunajte i skicirajte $f(z_1)$, $f(z_2)$, $f(z_3)$.

8. Izračunajte

a) $\sqrt{-2}$
b) $\sqrt{i}$

MATEMATIKA 4

(kompleksna analiza, vježbe 2)

ime i prezime	

1. Prebacite sljedeće kompleksne brojeve u trigonometrijski zapis (eulerovu formu):

a) π

b) $1 + i$

c) $(1 - i)^2$

d) -1

e) $2i$

2. Izračunajte

a) $(i + 1)^{11}$

b) $\sqrt[3]{i + 1}$ (sve korijene)

c) $\sqrt[4]{-i}$ (skicirajte rješenja)

3. Neka je

$$a = 1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$b = 2i + 2\sqrt{3}$$

Izračunajte $c = a^5 \sqrt{b} + \frac{1}{a^2}$.
Skicirajte a, b, c u kompleksnoj ravnini.

> *Za računske operacije koristite odgovarajući zapis kompleksnog broja:*
> *– za zbrajanje i oduzimanje je bolji kartezijev zapis $a + bi$;*
> *– za množenje, dijeljenje i potenciranje je bolja eulerova forma $r \cdot e^{i\varphi}$.*

4. Riješite jednadžbu

$$iz^2 - (1 - i)z - 1 = 0\ .$$

5.* Riješite jednadžbu

$$z^5 + z^3 + z = 0\ .$$

6. Izračunajte

a) $\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$

b) $\mathrm{Arg}\,\dfrac{1 - i}{1 + i} =$

7.* Odredite funkciju $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ oblika $f(z) = az + b$ koja

1. rotira z oko ishodišta za $120°$ (u pozitivnom smjeru)
2. zatim radi translaciju za vektor $(1, 2)$ u kompleksnoj ravnini.

MATEMATIKA 4

(kompleksna analiza, vježbe 3)

ime i prezime	

1. Prebacite sljedeće brojeve u polarnu (eulerovu) formu:

a) $-1 + i$

b) $-2 - 2i$

c) $-3 - 4i$

d) -10

e) $3i, -3i$

f) $\dfrac{1 - i}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$

g) $\left(\dfrac{6 + 8i}{4 - 3i}\right)^2$

h) $\dfrac{i}{3 + 3i}$

i) $\dfrac{2 + i}{5 - 3i}$

j) $\dfrac{7 - 5i}{4i}$

2. Riješite jednadžbe

a) $$z^2 - iz + 1 = 0$$

b) $$(z^3 - 1)(z^2 - 1) = 0$$

c) $$(z^2 - 2i + 1)(z^2 + 1) = 0$$

3. Skicirajte u kompleksnoj ravnini (bez rješavanja) rješenja jednadžbe

a) $$z^5 = 32 = 2^5$$

b) $$z^5 = -32$$

MATEMATIKA 4

(kompleksna analiza, vježbe 4)

ime i prezime	

1.* Skicirajte sljedeća područja u kompleksnoj ravnini:

a) $1 \le |z| \le 2$

b) $1 \le \operatorname{Im} z \le 2$

c) svi z za koje je $|z-1| < 2$ i $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$

d) $1 \le |\overline{z}| \le 2$

2. Za $w = u + iv = f(x + iy)$ izrazite u i v kao funkcije $u(x, y)$ i $v(x, y)$.

a) $f(z) = (\overline{z})^2$;

b) $f(z) = i \cdot (z^2 - 2z)$;

c) $f(z) = 1 + \overline{z} + 2z^2$;

d) $f(z) = \operatorname{Re}(z^2 + 1) + \operatorname{Im}((i + 1)z)$.

3. Preslikajte

a) pravac $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ funkcijom $f(z) = z^2$;

b) područje $\operatorname{Re} z < 1$ funkcijom $f(z) = i \cdot z$;

c) područje $|z| < 1$ funkcijom $f(z) = 2 - \overline{z}$;

Opišite skup točaka $w = u + iv = f(x + iy)$ za ova preslikavanja.
Izrazite u i v kao koordinatne funkcije od x i y.

4. Izračunajte

a) e^{i+1}

b) $i \cdot e^{\pi i}$

MATEMATIKA 4

(kompleksna analiza, vježbe 5)

ime i prezime	

1. Polinom $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots a_n z^n$ izrazite $f(z_0 + \Delta z)$ kao polinom u Δz:

$$b_0 + b_1 \Delta z + b_2 (\Delta z)^2 + \cdots + b_n (\Delta z)^n$$

oko zadane točke z_0.

a) $f(z) = 3 + z + 2z^2$ razviti (izraziti) kao polinom oko $z_0 = 1$, odnosno kao polinom u potencijama $\Delta z = (z - 1)$

b) $f(z) = 1 + z + z^2 + z^3$ razviti kao polinom oko $z_0 = -1$;

c) $f(z) = 3z^3 - 2z^2 + 3z - 1$ oko $z = 1$;

d) $f(z) = z + z^3$ razviti kao polinom po potencijama od $(z - 1)$ i polinom po potencijama $(z + 1)$.

2. Funkcija f oko točke $z_0 = 3$ ima sljedeći razvoj u red potencija:

$$1 + 2\Delta z - 3(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 .$$

Pomoću ovog razvoja odredite vrijednost funkcije u točkama a) $z = 0$; b) $z = 3 + i$.

3. Prikažite racionalne funkcije

a) $\dfrac{1}{1 - z}$

b) $\dfrac{1}{1 - 2z}$;

c) $\dfrac{z}{1 + z}$;

d) $\dfrac{1}{z^2 - z}$;

kao beskonačne polinome (odnosno kao redove potencija) u z.

Primjer 1. *Na primjer, za $\Delta z = (z - 2)$ funkcija $3/(4 - z)$ može se razviti u beskonačni polinom na sljedeći način:*

$$\frac{3}{4 - z} = \frac{3}{4 - (\Delta z + 2)} = \frac{3}{2 - \Delta z} \cdot \frac{1/2}{1/2} = \frac{3/2}{1 - (\Delta z/2)} = \frac{3}{2}\left(1 + (\Delta z/2) + (\Delta z/2)^2 + \dots\right)$$

Koeficijenti ovog beskonačnog polinoma u Δz su redom

$$\frac{3}{2}, \quad \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad \dots$$

4. Prikažite racionalne funkcije

a) $\dfrac{1}{1 - 2z}$

b) $\dfrac{1}{3 - z}$

c) $\dfrac{z}{z - 3}$

d) $\dfrac{2z + 1}{5 - z^2}$

e) $\dfrac{z - 1}{z^2 - z + 1}$

f) $\dfrac{1}{1 + z + z^2}$

kao beskonačne polinome oko $z_0 = 2$, odnosno kao beskonačne polinome u potencijama od $\Delta z = (z - 2)$.

MATEMATIKA 4

(kompleksna analiza, vježbe 6)

ime i prezime	

1. Neka je K jednostavna zatvorena krivulja u kompleksnoj ravnini, P je polinom. $P(K)$ je krivulja nastala preslikavanjem od K s polinomom P.

a) Ako krivulja $P(K)$ zakrene 4 puta oko $z = 0$ u kompleksnoj ravnini, koliko se nultočaka od P nalazi unutar K?
b) Ako krivulja $P^2(K)$ zakrene 2 puta oko $z = 0$, koliko se nultočaka od P nalazi unutar K?
c) Koliko i-točaka ima polinom drugog stupnja Q? Ako je L jednostavna zatvorena krivulja koja okružuje sve i-točke, koliko puta $Q(L)$ zakrene oko i?

Nultočke brojimo s njihovim višestrukostima – npr. dvostruku nultočku brojimo dva puta.

2. Za $w = u + iv$ koji je slika $f(z)$ od $z = x + iy$ odredite funkcije $u(x, y)$ i $v(x, y)$:

a) $w = z^3$
b) $w = z^2 + \bar{z}^2 + 1$
c) $\dfrac{z-1}{z+2}$
d) $w = e^z$
e) $w = \overline{e^{iz}}$

3. Funkcije sin i cos na kompleksnim brojevima računaju se prema sljedećim formulama:

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \qquad \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

Izračunajte

a) $\sin \pi i$
b) $\sin \dfrac{\pi}{2}$
c) $\cos i$

Rješenja zadataka

kompleksna analiza, vježbe 1 . . . . *str. 1*

1. a) 2, b) $-4 + 4i + 1 = -3 + 4i$, c) 0

4. a) $z_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$, b) $z_{1,2,3,4} = 1, i, -1, -i$ (vrhovi kvadrata)

5. a) $\pm 2i$, b) $z = a + bi$, $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$

8. a) $\pm i\sqrt{2}$

kompleksna analiza, vježbe 2 . . . . *str. 2*

2. $(i+1)^{11} = 2^5\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$

4. $z_{1,2} = \frac{1-i\pm\sqrt{2i}}{2i} = -i\left(\frac{1-i\pm\frac{(i-1)}{2}\sqrt{2}}{2}\right) = \ldots$

7. $f(z) = e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot z + (1+2i)$

kompleksna analiza, vježbe 3 . . . . *str. 3*

1. a) $\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$

2. a) $z_{1,2} = \frac{i\pm\sqrt{-1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{5}}{2}$; b) $z_{1,2,3}$ su korijeni $\sqrt[3]{-1}$, $z_{4,5} = \pm 1$

kompleksna analiza, vježbe 4 . . . . *str. 4*

1. a) kružni vijenac s malim radijusom $r = 1$ i velikim $R = 2$,
b) horizontalna pruga između $y = 1$ i $y = 2$, c)

3. a) slika je imaginarna os; b) slika je poluravnina $\operatorname{Im} z < 1$;
c) slika je kružnica radijusa $r = 1$ sa središtem u 2

4. a) $re^{i\varphi}$, $r = e, \varphi = 1$; b) $e^{3\pi/2i} = -i$;

kompleksna analiza, vježbe 5 . . . . *str. 5*

2. Ako je $z_0 = 3$ slijedi da je $\Delta z = z - 3$.
a) Za $z = 0$ je $\Delta z = -3$;
b) Za $z = 3 + i$ je $\Delta z = 3 + i - 3 = i$

4. b) $\frac{1}{3-(2+(z-2))} = \frac{1}{1-\Delta z} = 1 + \Delta z + (\Delta z)^2 + \ldots$

kompleksna analiza, vježbe 6 . . . . *str. 6*

1. vidi predavanja, pod "Princip argumenta"; c) 2 puta

2. c) najprije racionalizirajte nazivnik d) $u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = e^x \sin y$; e) $u(x,y) = e^{-y}\cos x$, $v(x,y) = -e^{-y}\sin x$

3. a) $-{}^{i}\!/_{2}(e^{-\pi} - e^{\pi})$; b) iskoristite da je $e^{i\pi/2} = i$ pa je $\sin{}^{\pi}\!/_{2} = {}^{1}\!/_{2}$, što znamo i otprije