

NEKI RIJEŠENI (TEORIJSKI) ZADACI IZ NUMERIKE

(16. travnja 2009.)

1. Kad ćete reći da je diferencijalna jednačba kruta? Objasnite to na jednom primjeru.

Rješenje. Reći ćemo da je diferencijalna jednačba kruta ako mala perturbacija početnih uvjeta dovodi do velike perturbacije u rješenju.

Npr. neka je opće rješenje diferencijalne jednačbe

$$y = Ce^x + x + 1 .$$

Početni uvjet za koji dobijemo da je $C = 0$ bitno mijenja rješenje koje tada postaje $y = x + 1$ (e^x sumand je nestao).

Za ovaj primjer takav početni uvjet je $y(0) = 1$. □

2. Opišite što morate napraviti da biste Runge-Kutta metodom riješili početni problem za diferencijalnu jednačbu višeg reda.

Rješenje. Diferencijalne jednačbe višeg reda najprije se pretvore u sustav jednačbi prvog reda: Npr. stavimo da je

$$z = y', \text{ pa je } y'' = z' .$$

Ovime se jednačba drugog reda može zapisati kao sustav dvije jdbbe prvog reda. Sustavi se zatim približno rješavaju Runge-Kutta metodom za sustave jednačbi prvog reda (vidi sljedeći zadatak). □

3. Zadan je sustav jednačbi prvog reda. Opišite kako izgledaju Runge-Kutta metode za taj sustav.

Rješenje. Općenito RK metode računaju sistem čvorova (x_i, y_i) koji aproksimiraju rješenju jdbbe $y(x)$. Općeniti oblik metode je da se sljedeći čvor y_{n+1} računa prema formuli oblika

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^p w_i k_i ,$$

gdje su w_i konstante, a k_i vrijednosti koje za svaki korak izračunavaju tako da formula što bolje aproksimira rješenje jdbbe.

Prema konstantama w_i i načinu računanja k_i razlikujemo RK metode. □

4. Zašto koristimo varijabilni korak kod Runge-Kutta metoda?

Rješenje. Ako se vrijednosti pri računanju s varijabilnim korakom "dosta razlikuju", onda se korak smanji. Za neke se funkcije može dobiti dobro rješenje s puno manje računanja nego kod fiksnog koraka (koji ne kontrolira točnost). □

5. Opišite zašto se koristi linearizacija kod metode najmanjih kvadrata? Objasnite na jednom primjeru.

Rješenje. Ako φ ne ovisi linearno o svojim parametrima tada metoda najmanjih kvadrata dovodi do sustava nelinearnih jednadžbi koje za razliku od linearnih sustava nije lako riješiti. Npr. aproksimacijska funkcija oblika

$$\varphi(x) = a_0 e^{a_1 x},$$

ne ovisi linearno o parametrima a_0 i a_1 i sustav koji se dobije traženjem minimuma funkcije

$$S(a_0, a_1) = \sum_i (\varphi(x_i) - f_i)^2$$

neće biti linearan. □

6. Usporedite brzinu nalaženja jednostrukih nultočaka Newtonovom metodom i metodom bisekcije. Koja od te dvije metode će sigurno konvergirati?

Rješenje. Red konvergencije Newtonove metode je 2, dok je red konvergencije za metodu bisekcije 1. Metoda bisekcije sigurno konvergira (ali je bitno sporija od Newtonove metode). □

7. Koji su uvjeti da biste mogli primijeniti metodu bisekcije za nalaženje nultočke funkcije na intervalu $[a, b]$?

Rješenje. Uvjeti su da je funkcija neprekidna i da na tom intervalu postoji nultočka te funkcije. Ekvivalentno je da se uz uvjet neprekidnosti od f nađe interval $[a, b]$ na kojem vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

□

8. Uz koje uvjete će Newtonova metoda za nalaženje nultočaka funkcija sigurno konvergirati? Odakle morate startati početnu iteraciju?

Rješenje. Newtonova metoda sigurno konvergira na intervalu $[a, b]$ ako f' i f'' na tom intervalu ne mijenjaju predznak i ako započnemo iteraciju iz strmijeg kraja intervala, odnosno iz točke za koju vrijedi

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

Primijetimo da funkcija mora biti klase C^2 , odnosno 2-puta derivabilna. □

9. Koji stupanj polinoma egzaktno integrira osnovna Simpsonova metoda? Objasnite!

Rješenje. Simpsonova metoda egzaktno integrira polinome do najviše 3. stupnja. □

10. Uz koje dodatne uvjete na derivacije neprekidne funkcije f će Newtonova metoda za nalaženje nultočka na intervalu $[a, b]$ (u kojem postoji nultočka) sigurno konverirati, ako krenemo sa strmijeg ruba?

Rješenje. Uz uvjet da je funkcija 2-puta derivabilna i da f' i f'' na tom intervalu ne mijenjaju predznak. □

11. Koji stupanj polinoma egzaktno integrira trapezna metoda?

Rješenje. Trapezna metoda egzaktno integrira samo polinome 1. stupnja (čiji su grafovi pravci). □