Logika

Zvonimir Šikić

Sadržaj

1

Uvod

Osnovna tema logike su argumenti i njihova valjanost. Razmotrimo sljedeći argument:

> *Zagreb je u Hrvatskoj ili je u Sloveniji. Zagreb nije u Hrvatskoj.*
> *Dakle, Zagreb je u Sloveniji.*

Taj argument sadrži dvije premise i konkluziju. Preglednije ćemo ga zapisati tako da premise crtom odvojimo od konkluzije i sve tvrdnje numeriramo.

(1)	*Zagreb je u Hrvatskoj ili u Sloveniji.*
(2)	*Zagreb nije u Hrvatskoj.*
(3)	*Zagreb je u Sloveniji.*

Konkluzija ovog argumenta nije istinita, a nisu istinite ni sve njegove premise. Premisa (1) je istinita, a premisa (2) nije. Ipak, ovaj argument je valjan. Zašto?

Zato što ima valjanu formu:

(F1)	P ili Q
(F2)	Nije P
(F3)	Q

Ta forma je valjana jer svaka interpretacija (od P i Q) koja premise čini istinitima i konkluziju čini istinitom.

Uočimo da naš konkretni argument (1)(2)/(3) logički valjanim čini njegova logička forma (F1)(F2)/(F3). Zato je ključna zadaća logike otkriti formu argumenta koji nas zanima i utvrditi da je ona valjana.

Tisućljetna je tradicija da se logičke forme apstrahiraju iz prirodnih jezika, kao u gornjim primjerima, što je logiku čvrsto vezalo uz sintaksu prirodnih jezika. Pogledajmo još neke primjere.

(4)	Nijedan logičar nije zao.
(5)	Neki Hrvati su logičari.
(6)	Neki Hrvati nisu zli.

Aristotel, i mnogi drugi poslije njega, apstrahirali su sljedeće forme iz premisa (4), (5) i konkluzije (6):

(A4)	Nijedan M nije P.
(A5)	Neki S su M.
(A6)	Neki S nisu P.

Matematički orijentirani Boole apstrahirao je jednadžbe i nejednadžbe:

(B4)	$M \cdot P = 0$
(B5)	$S \cdot M \neq 0$
(B6)	$S \cdot \overline{P} \neq 0$

Frege je, u okviru mnogo šireg projekta formalizacije logike koja se koristi u matematici (i konačne redukcije matematike na logiku), došao do sljedećih formi:

(F4)	$\forall x\,(Mx \to -Px)$
(F5)	$\exists x\,(S\,x \land Px)$
(F6)	$\exists x\,(S\,x \land -Px)$

Bitna novost Booleovog i Fregeovog pristupa jest da oni (obojica inspirirani sličnim postupcima u matematici) induktivno definiraju beskonačne skupove formi *neovisno* od toga jesu li one forme iskaza prirodnih jezika. Drugim riječima, oni definiraju artificijelne formalne jezike. U tako definiranim formalnim jezicima možemo egzaktno definirati postupke za utvrđivanje valjanosti njihovih formalnih argumenata, a neformalne argumente smatramo valjanima tek ako su konkretne interpretacije valjanih formalnih argumenata.

Slijedeći ovu tradiciju naše ćemo logičke teorije razvijati u tri koraka.

I *Definirat ćemo forme i njihove interpretacije, te što znači da je forma istinita u nekoj interpretaciji.* Stručnije kazano definirat ćemo sintaksu i semantiku formalnog jezika svake od naših logika. Razne logike, kojima ćemo se baviti, zapravo će biti određene različitim formalnim jezicima koje ćemo definirati.

Uočimo da je interpretacija forme uvijek istinita ili neistinita tj. uvijek ima jednu od dvije vrijednosti: **istinu** koju označavamo s $\top$ ili **neistinu** koju označavamo s $\bot$. Dakle, interpretacija forme u prirodnom jeziku uvijek će biti deklarativna rečenica (izjava, sud, tvrdnja), a ne pitanje, uzvik, naredba, molba ili neki drugi iskaz koji po svom značenju nije ni istinit ni neistinit. (U tom smislu su formalni jezici, kojima ćemo se baviti, siromašniji od prirodnih jezika.)

II *Definirat ćemo ključne logičke pojmove: implikaciju, ekvivalenciju, konzistentnost, valjanost (logičku istinitost) itd.* Te će definicije biti iste za sve formalne jezike, tj. za sve logike kojima ćemo se baviti. Zato ih odmah ističemo.

IMPLIKACIJA

Forme A, B, C, ... (koje zovemo premisama) **impliciraju** formu K (koju zovemo konkluzijom), ako je konkluzija K istinita u svakoj interpretaciji u kojoj su istinite sve premise A, B, C, ...

To zapisujemo: $A, B, C, \ldots \Rightarrow K$.

KONZISTENTNOST

Forme A, B, C, ... su međusobno **konzistentne** ako postoji interpretacija u kojoj su sve one istinite.

To zapisujemo: $\Diamond A, B, C, \ldots$.

VALJANOST (LOGIČKA ISTINITOST)

Forma A je **valjana (logički istinita)** ako je istinita u svakoj interpretaciji.

To zapisujemo: $\Box A$.

EKVIVALENCIJA

Forme A i B su međusobno **ekvivalentne** ako u svakoj interpretaciji imaju istu vrijednost istinitosti.
(To znači da A implicira B i B implicira A).

To zapisujemo: $A \Leftrightarrow B$.

Uočimo da ove definicije pretpostavljaju da je već obavljen korak I (tj. definirane su forme, njihove interpretacije i što znači da je forma istinita u nekoj interpretaciji). Nadalje, vidjet emo da su ovi ključni pojmovi interdefinabilni u svim logikama kojima ćemo se baviti.

Na primjer, premise A, B, C, ... ne impliciraju konkluziju K akko (tj. ako i samo ako) postoji interpretacija u kojoj su sve premise A, B, C, ... istinite, a u kojoj konkluzija K ipak nije istinita. No to znači da postoji interpretacija u kojoj je istinita negacija konkluzije $\overline{K}$, i sve premise $A, B, C, \ldots$. Dakle, $A, B, C, \ldots \nRightarrow K$ akko $\Diamond \overline{K}, A, B, C, \ldots$. To možemo iskazati i ovako:

FiXme
negaci
samo ma
Negaciju
se t

VEZA IMPLIKACIJE I KONZISTENTNOSTI

Premise A, B, C, ... impliciraju konkluziju K akko su forme $\overline{K}$, A, B, C, ... međusobno inkonzistentne.
(Forma $\overline{K}$ je negacija forme K.)

Zapisano simbolički: $A, B, C, \ldots \Rightarrow K$ akko $\not\Diamond\, \overline{K}, A, B, C, \ldots$.

Slično, forma A nije konzistentna akko je neistinita u svim interpretacijama. No to znači da je njezina negacija $\overline{A}$ istinita u svim interpretacijama, tj. $\overline{A}$ je valjana. Uz $F = \overline{A}$ i $\overline{F} = \overline{\overline{A}} = A$ dobivamo:

VEZA VALJANOSTI I KONZISTENTNOSTI

Forma F je valjana akko njezina negacija $\overline{F}$ nije konzistentna.

Zapisano simbolički: $\Box F$ akko $\not\Diamond\, \overline{F}$.

III *Pokušat ćemo naći algoritme uz pomoć kojih možemo testirati implikaciju, ekvivalenciju, konzistentnost, valjanost itd.* Za neke ćemo ih logike naći lako, za neke će to biti teže, a za neke ćemo dokazati da takvih algoritama nema.

Sve definicije i dokaze opisane u ova tri koraka provodit ćemo matematički egzaktno. S druge strane, primjena tako izgrađene matematičke logike neće biti matematički egzaktna ako takav nije i sam predmet primjene (što sigurno nije svakodnevna argumentacija). Kao i uvijek, primjena matematičke teorije posebno je umijeće. U našem slučaju posebno je umijeće neformalni argument iz prirodnog jezika pretvoriti u konkretnu interpretaciju odgovarajućeg formalnog argumenta (kojim se tada možemo koristiti u analizi početnog neformalnog argumenta). Neformalni argumenti (1)(2)/(3) i (4)(5)/(6) bili su u tom smislu krajnje jednostavni, ali to nije uvijek tako. Promotrimo sljedeći argument:

(7) *Ako su svi kandidati koji su dobili obavijest visokokvalificirani, onda neki kandidati nisu dobili obavijest.*

(8) *Ili su svi kandidati dobili obavijest ili su svi kandidati visokokvalificirani.*

---

(9) *Ako su svi visokokvalificirani kandidati dobili obavijest onda su neki kandidati koji nisu visokokvalificirani također dobili obavijest.*

Taj je argument valjan iako su izuzetno rijetki oni koji to odmah vide. U sljedećim poglavljima pokazat ćemo kako se on može prevesti u konkretnu interpretaciju formalnog bulovskog argumenta, koji je dokazivo valjan, pa time dokazujemo i valjanost početnog neformalnog argumenta. Bit će to tipični primjer uspješne primjene matematizirane formalne logike na neformalnu argumentaciju.

S druge strane postoje trivijalni neformalni argumenti, koje svi i odmah prepoznaju kao valjane, a čija je matematizirana logička forma dosta složena. Na primjer, neformalni argument

(10) *Sve elipse su krivulje.*

---

(11) *Svi crtači elipsa su crtači krivulja.*

očito je valjan, iako nema bulovske forme koja bi to dokazala. To dokazuje tek bitno složenija Fregeova formalizacija. Neki to smatraju nedostatkom formalizacija koje su se udaljile od prirodnih jezika, a neki pak stvarnom složenošću koja se krije duboko ispod katkada samo prividno jednostavne površine prirodnih jezika.

Mi ćemo slijediti Boole-Fregeovu tradiciju matematizirane logike. Njenu vezu s neformalnim argumentima prirodnih jezika tumačit ćemo kao uobičajenu primjenu matematičke teorije, što ne znači da uvođenje mnogih logičkih pojmova nećemo motivirati baš pomoću njihovih primjena. To je još uvijek najbolja metoda poduke bilo koje matematičke teorije, pa tako i matematičke logike.

U skladu s gore zacrtanim planom počet ćemo s najjednostavnijim tzv. *istinosno-funkcionalnim formama* i njima odgovarajućom *IF–logikom*. Zatim ćemo uvesti Boolove *monadske kvantifikacijske forme* i njihovu *MQ-logiku*, te još općenitije Fregeove *(poliadske) kvantifikacijske forme* i njihovu *Q–logiku*.

2

Logika istinosno funkcionalnih formi

2.1 Istinosno funkcionalni veznici

Svi prirodni jezici sadrže veznike pomoću kojih se iz jednostavnijih deklarativnih rečenica grade složenije. Neki od tih veznika su istinosno funkcionalni, što znači da je vrijednost istinitosti složene rečenice jednoznačno određena vrijednostima istinitosti komponenti koje su vezane takvim veznikom. (Drugim riječima, vrijednost istinitosti složene rečenice je funkcija vrijednosit istinitosti njezinih komponenti; otud termin "istinosno funkcionalni".) Na primjer, binarni veznici "i", "ili", kao i unarni operator "nije" (koji ćemo radi jednostavnosti također zvati veznikom), u hrvatskom su jeziku najčešće istinosno funkcionalni. U logici ih nazivamo **konjunkcijom**, **alternacijom** i **negacijom** i označavamo simbolima $\wedge$, $\vee$ i $-$.

Sljedeće tablice istinosnih vrijednosti definiraju kako vrijednosti istinitosti konjunkcije $P \wedge Q$, alternacije $P \vee Q$ i negacije $-P$ (koju još zapisujemo $\overline{P}$) ovise o vrijednostima istinitosti njihovih komponenti P i Q, odnosno P.

DEFINICIJA KONJUNKCIJE $\wedge$, ALTERNACIJE $\vee$ I NEGACIJE $-$

P	Q	$P \wedge Q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

P	Q	$P \vee Q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

P	$-P$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Mnogi veznici prirodnih jezika nisu istinosno funkcionalni (ili katkad jesu, a katkad nisu). Na primjer, veznik "jer", kao ni unarni veznici "nužno je" i "moguće je", očito nisu istinosno funkcionalni.

P	Q	P jer Q
$\top$	$\top$	?
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

P	Nužno je P
$\top$	?
$\bot$	$\top$

P	Moguće je P
$\top$	$\top$
$\bot$	?

Naime, iako je istina da je Ivan umro ($P = \top$) i da je prije smrti pojeo sladoled ($Q = \top$), to ipak ne znači da je Ivan umro jer je pojeo sladoled (P jer $Q = \top$); možda je doživio infarkt (P jer $Q = \bot$).

Nadalje, neke faktične istine su nužne, a neke nisu ("Nužno je 2 + 2 = 4" je istina, ali "Nužno je bilo da Dražen Petrović pogine u prometnoj nesreći" nije.). Slično, neke bi faktične neistine mogle biti istinite, a neke ne bi ("Moguće je bilo da Dražen Petrović ne pogine u prometnoj nesreći" je istina, ali "Moguće je da je 2 + 2 ≠ 4" nije.).

Logika istinosno funkcionalnih formi ograničava se samo na istinosno funkcionalne veznike i time je ograničena u odnosu na prirodne jezike. S druge strane, prirodni jezici sadrže mali broj veznika (dakle, i mali broj IF–veznika), dok IF–logika uključuje sve moguće IF–veznike, tj. sve unarne, binarne, ternarne, itd. funkcije iz $\{\top, \bot\}$ u $\{\top, \bot\}$.

Sve unarne istinosne funkcije definirane su sljedećim tablicama:

P	$\top$
$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$

P	P
$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$

P	$-P$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

P	$\bot$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$

Ukupno ih je $2^{(2^1)} = 4$. Prva je **konstanta** $\top$ ($f_1(P) = \top$), druga je **identitet** ($f_2(P) = P$), treća je **negacija** ($f_3(P) = -P$) i četvrta je **konstanta** $\bot$ ($f_4(P) = \bot$).

Binarnih istinosnih funkcija ima $2^{(2^2)} = 16$ (dvije od njih su **konjunkcija** i **alternacija**). Ternarnih ima $2^{(2^3)} = 256$ i, općenito, n-arnih istinitosnih funkcija ima 2^{2^n}. Dakle, istinosnih funkcija ima beskonačno mnogo:

$$2^{(2^1)} + 2^{(2^2)} + 2^{(2^3)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(2^n)} = \infty$$

Ipak, sve se one mogu realizirati pomoću samo tri: konjunkcije $\wedge$, alternacije $\vee$ i negacije $-$.

Promotrimo, na primjer, jednu od 256 ternarnih istinosnih funkcija $F(P, Q, R)$ koja je zadana sljedećom tablicom istinosnih vrijednosti:

P	Q	R	F
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

A_1	A_2	A_3	A_4
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

Funkcija $F(P, Q, R)$ jednoznačno određuje funkcije $A_i(P, Q, R)$ koje imaju samo po jednu vrijednost $\top$ i to na točno onim argumentima na kojima $F(P, Q, R)$ prima vrijednost $\top$. (Dakle, koliko puta F primi vrijednost $\top$ toliko imamo i funkcija A_i, u našem slučaju 4.) Te su funkcije također prikazane u gornjoj tablici.

Iz definicije funkcija A_i odmah slijedi

$$F(P, Q, R) = A_1(P, Q, R) \vee A_2(P, Q, R) \vee A_3(P, Q, R) \vee A_4(P, Q, R). \tag{2.1}$$

Osim toga, očito je da konjunkcija $P \wedge Q \wedge \overline{R}$ prima vrijednost $\top$ isključivo na argumentu $(\top, \top, \bot)$, konjunkcija $P \wedge \overline{Q} \wedge R$ isključivo na argumentu $(\top, \bot, \top)$, $\overline{P} \wedge Q \wedge R$ isključivo na $(\bot, \top, \top)$ a $\overline{P} \wedge \overline{Q} \wedge \overline{R}$ isključivo na $(\bot, \bot, \bot)$. To znači da vrijedi

$$A_1 = P \wedge Q \wedge \overline{R}, \quad A_2 = P \wedge \overline{Q} \wedge R, \quad A_3 = \overline{P} \wedge Q \wedge R, \quad A_4 = \overline{P} \wedge \overline{Q} \wedge \overline{R}. \tag{2.2}$$

Iz (2.1) i (2.2) slijedi

$$F(P, Q, R) = (P \wedge Q \wedge \overline{R}) \vee (P \wedge \overline{Q} \wedge R) \vee (\overline{P} \wedge Q \wedge R) \vee (\overline{P} \wedge \overline{Q} \wedge \overline{R}), \tag{2.3}$$

tj. F je konačno realizirana pomoću konjunkcija $\wedge$, alternacija $\vee$ i negacija $-$. Specifični oblik (2.3) kojim je predstavljena naša funkcija F zove se potpuna alternacijska normalna forma.

ATOMI I LITERALI

Atom je osnovna neanalizirana forma. Atome označavamo s P, Q, R,...

Literal je atom ili njegova negacija. (Dakle, literali su P, $\overline{P}$, Q, $\overline{Q}$, R, $\overline{R}$,...)

ALTERNACIJSKA NORMALNA FORMA

Konjunktivni blok je konjunkcija literala proizvoljne duljine (dakle, i sami literali su blokovi duljine 1). Konjunktivne blokove najčešće zapisujemo tako da ispuštamo znak $\wedge$, tj. konjunkciju zapisujemo kao konkatenaciju. (Na primjer, $P \wedge Q \wedge \overline{R}$ zapisujemo kao $PQ\overline{R}$.)

Alternacijska normalna forma je alternacija konjunktivnih blokova koje zovemo njenim komponentama. Broj komponenti je proizvoljan. (Dakle, jedan jedini konjunktivni blok smatramo alternacijskom normalnom formom.)

Potpuna alternacijska normalna forma u svakoj svojoj komponenti sadrži sve svoje atome. (Na primjer, 2.3 je potpuna, a $PQ \vee \overline{P}QR$ nije.)

Očito je da se postupak koji smo proveli s našom istinosnom funkcijom $F(P, Q, R)$ može na isti način provesti s bilo kojom istinosnom funkcijom. (Ako $F(P, Q, \ldots, R)$ ne prima vrijednost $\top$ ni na jednom argumentu, onda je $F = P\overline{P}Q \ldots R$.) Dakle, vrijedi sljedeći teorem:

TEOREM O ALTERNACIJSKOJ NORMALNOJ FORMI

Svaka istinosna funkcija može se prikazati u potpunoj alternacijskoj normalnoj formi.

Polazeći od $\bot$-vrijednosti naše funkcije F dolazimo do drugog postupka.

P	Q	R	F	K_1	K_2	K_3	K_4
$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Sada funkcija $F(P, Q, R)$ jednoznačno određuje funkcije $K_i(P, Q, R)$ koje imaju samo po jednu vrijednost $\perp$ i to na točno onim mjestima na kojima $F(P, Q, R)$ prima vrijednost $\perp$. (Dakle, koliko puta F primi vrijednost $\perp$ toliko imamo funkcija K_i, u našem slučaju 4.) Te su funkcije također prikazane u gornjoj tablici.

Iz definicije funkcija K_i odmah slijedi

$$F(P, Q, R) = K_1(P, Q, R) \wedge K_2(P, Q, R) \wedge K_3(P, Q, R) \wedge K_4(P, Q, R). \tag{2.4}$$

Osim toga, očito je da alternacija $\overline{P}\vee\overline{Q}\vee\overline{R}$ prima vrijednost $\perp$ isključivo na argumentu $(\top, \top, \top)$, alternacija $\overline{P}\vee Q\vee R$ isključivo na argumentu $(\top, \perp, \perp)$, $P \vee \overline{Q} \vee R$ isključivo na $(\perp, \top, \perp)$, a $P \vee Q \vee \overline{R}$ isključivo na $(\perp, \perp, \top)$. To znači da vrijedi

$$K_1 = \overline{P} \vee \overline{Q} \vee \overline{R}, \quad K_2 = \overline{P} \vee Q \vee R, \quad K_3 = P \vee \overline{Q} \vee R, \quad K_4 = P \vee Q \vee \overline{R}. \tag{2.5}$$

Iz (2.4) i (2.5) slijedi

$$F = (\overline{P} \vee \overline{Q} \vee \overline{R})(\overline{P} \vee Q \vee R)(P \vee \overline{Q} \vee R)(P \vee Q \vee \overline{R}), \tag{2.6}$$

gdje smo konjunkciju od K_1, K_2, K_3 i K_4 opet zapisali kao konkatenaciju (tj. ispuštajući znakove $\wedge$). Oblik (2.6) kojim je sada predstavljena naša funkcija F zove se potpuna konjunkcijska normalna forma.

KONJUNKCIJSKA NORMALNA FORMA

Alternacijski blok je alternacija literala proizvoljne duljine (dakle, i sami literali su blokovi duljine 1).

Konjunkcijska normalna forma je konjunkcija alternacijskih blokova koje zovemo njenim komponentama (i samo jedan blok smatramo konjunkcijskom normalnom formom).

Potpuna konjunkcijska normalna forma u svakoj svojoj komponenti sadrži sve svoje atome. (Na primjer, (2.6) je potpuna, a $(P \vee Q)(\overline{P} \vee Q \vee R)$ nije.)

Očito je da se gornji postupak, koji vodi do potpune konjunkcijske normalne forme, može provesti sa svakom istinosnom funkcijom. (Ako $F(P, Q, R)$ ne prima vrijednost $\top$ ni na jednom argumentu onda je $F = P \vee \overline{P} \vee Q \vee \ldots \vee R$).) Dakle, vrijedi sljedeći teorem.

TEOREM O KONJUNKCIJSKOJ NORMALNOJ FORMI

Svaka istinosna funkcija može se prikazati u potpunoj konjunkcijskoj normalnoj formi.

Teoremi o normalnim formama jasno pokazuju da ograničenje na mali broj IF–veznika: konjunkciju, alternaciju i negaciju, zapravo i nije neko ograničenje jer se pomoću njih mogu izraziti svi drugi (njih beskonačno mnogo).

Zbog važnosti osnovnih IF–veznika, konjunkcije, alternacije i negacije, posebno ističemo njihova najvažnija svojstva.

OSNOVNA SVOJSTVA KONJUNKCIJE, ALTERNACIJE I NEGACIJE

Asocijativnost konjunkcije i alternacije:

$$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R \qquad P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$$

Komutativnost konjunkcije i alternacije:

$$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P \qquad P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$$

Idempotentnost konjunkcije i alternacije:

$$P \wedge P \Leftrightarrow P \qquad P \vee P \Leftrightarrow P$$

Distributivnost konjunkcije i alternacije:

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \qquad P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Apsorpcija:

$$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P \qquad P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$$

Involutivnost negacije:

$$- - P \Leftrightarrow P$$

De Morganovi zakoni:

$$-(P \wedge Q) \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q} \qquad -(P \vee Q) \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

Ekvivalenciju, označenu s $\Leftrightarrow$, definirali smo sasvim općenito u 1. U ovom posebnom IF–kontekstu ekvivalentnost dvaju IF–formi znači jednakost IF–funkcija koje one definiraju. Na primjer, funkcije definirane formama $-(P \wedge Q)$ i $\overline{P} \vee \overline{Q}$ su jednake, što slijedi iz jednakosti njihovih tablica istinitosti:

P	Q	$P \wedge Q$	$-(P \wedge Q)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

No, to znači da vrijedi prvi De Morganov zakon, $-(P \wedge Q) \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$. Slično se dokazuju i ostale ekvivalencije iz gornjeg okvira.

Primjetimo da nam asocijativnost konjunkcija i alternacija omogućava da ih, u slučaju više od dvije komponente, pišemo bez zagrada. Naprimjer, $(PQ)R \Leftrightarrow P(QR)$ pa možemo bez dvosmislenosti pisati PQR. Time smo se već koristili pri zapisivanju alternacijskih i konjunkcijskih normalnih formi.

Spomenimo na kraju da nam De Morganovi zakoni pokazuju da se naš osnovni skup IF–veznika, $\{\wedge, \vee, -\}$, koji generira sve IF–veznike, može reducirati na još manje skupove generatora, $\{\wedge, -\}$ i $\{\vee, -\}$. Dapače, veznici $\downarrow$ i $|$, definirani na sljedeći način:

$$P \downarrow Q \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q} \qquad P \mid Q \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$$

generiraju $\{\wedge, -\}$, odnosno $\{\vee, -\}$, jer očito vrijedi:

$$P \downarrow P \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{P} \Leftrightarrow \overline{P} \qquad P \mid P \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{P} \Leftrightarrow \overline{P}$$

$$\overline{P} \downarrow \overline{Q} \Leftrightarrow \overline{\overline{P}} \wedge \overline{\overline{Q}} \Leftrightarrow P \wedge Q \qquad \overline{P} \mid \overline{Q} \Leftrightarrow \overline{\overline{P}} \vee \overline{\overline{Q}} \Leftrightarrow P \vee Q$$

Takve IF–veznike, koji generiraju sve moguće IF–veznike, zovemo Scheferovima (jer je Schefer prvi našao takve veznike). Post je dokazao sljedeći opći teorem koji karakterizira Scheferove veznike.

POSTOV TEOREM O SCHEFEROVIM VEZNICIMA

Istinosno funkcionalni veznik je Scheferov akko

(i) $F(\overline{P}, \overline{Q}, \ldots, \overline{R}) \neq -F(P, Q, \ldots, R)$

(ii) $F(P, P, \ldots P) = \overline{P}$

2.2 Forme, interpretacije i istinitost

Naš opći plan matematički egzaktnog razvijanja logičkih teorija sada ćemo primjeniti na istinosno funkcionalnu logiku. Prvi je korak definicija istinosno funkcionalnih formi. Naravno, gradimo ih uz pomoć IF–veznika, a možemo se ograničiti na bilo koji skup IF–veznika koji generira sve IF–veznike.

ISTINOSNO FUNKCIONALNE FORME (IF–FORME)

Ako neki skup IF–veznika generira sve IF–veznike, onda IF–forme induktivno definiramo kao IF–forme generirane tim skupom veznika. Na primjer, ako je taj skup veznika $\{\wedge, \vee, -\}$ onda su IF–forme induktivno definirane s (i), (ii) i (iii).

(i) Atomi $P, Q, R, P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2, R_2, \ldots$ su IF–forme.

(ii) Ako je A IF–forma onda je to i $-A$.

(iii) Ako su A i B IF–forme onda su to također $(A \wedge B)$ i $(A \vee B)$.

(Forme često zovemo i *formulama*).

Na primjer, $-(P_1 \vee (Q \wedge -R_2))$ i $(Q_3 \wedge -(P \wedge (Q_2 \wedge R_1)))$ su IF–forme čiju induktivnu izgradnju opisuju sljedeća stabla izgradnje:

$$\cfrac{\cfrac{P_1 \qquad \cfrac{Q \qquad \cfrac{R_2}{-R_2}}{(Q \land -R_2)}}{(P_1 \lor (Q \land -R_2))}}{-(P_1 \lor (Q \land -R_2))} \qquad\qquad \cfrac{Q_3 \qquad \cfrac{\cfrac{P \qquad \cfrac{Q_2 \quad R_1}{(Q_2 \land R_1)}}{(P \land (Q_2 \land R_1))}}{-(P \land (Q_2 \land R_1))}}{(Q_3 \land -(P \land (Q_2 \land R_1)))}$$

Forme koje prethode nekoj formi u njezinom stablu izgradnje (ili su joj identične) zovemo podformama te forme. I njih možemo definirati induktivno.

PODFORME IF–FORMI

(i) Jedina podforma atomarne forme je ona sama.

(ii) Ako je forma oblika $-A$ onda su njene podforme ona sama i sve podforme od A.

(iii) Ako je forma oblika $(A \land B)$ ili $(A \lor B)$ onda su njene podforme ona sama i sve podforme od A i B.

Na primjer, podforme forme $-(-A \land -B)$ su ona sama, $(-A \land -B)$, $-A$, $-B$, A i B. (Primjetimo da $A \land -B$ nije podforma naše forme, iako je njen dio.)

Pri pisanju IF–formi često ćemo se koristiti uobičajenim pokratama. Ispuštat ćemo krajnje vanjske zagrade, kao i zagrade u neprekinutom nizu konjunkcija ili alternacija (zbog njihove asocijativnosti), a negaciju $-A$ ponekad ćemo zapisivati kao $\overline{A}$. Osim toga, ponekad ćemo ispuštati znak konjunkcije $\land$, tj. konjunkciju ćemo zapisivati kao konkatenaciju.

Dakle, $-(P_1 \lor (Q\overline{R_2}))$ je pokrata forme $-(P_1 \lor (Q \land -R_2))$, a $Q_3 \land -(P_1 Q_2 R_1)$ je pokrata forme $(Q_3 \land -(P_1 \land (Q_2 \land R_1)))$.

Koristit ćemo se i konvencijom da konkatenacija (tj. konjunkcija čiji se znak $\land$ ispušta) veže jače od svih drugih znakova, te da negacija veže jače od svih drugih neispuštenih znakova.

Dakle, $-PQ$ i $P \lor QR$ su pokrate od $-(PQ)$ i $P \lor (QR)$, dok su $-P \land Q$ i $-P \lor Q$ pokrate od $(-P) \land Q$ i $(-P) \lor Q$.

Osnovna primjena logičkih formi je da ih prepoznamo kao forme konkretnih tvrdnji. No, forma F je forma konkretne tvrdnje $\mathcal{F}$ ako se $\mathcal{F}$ (ili neki njen sinonim) dobija iz forme F interpretiranjem atoma od F odgovarajućim konkretnim tvrdnjama. U slučaju IF–formi vrijednost istinitosti koju ima interpretacija cijele forme potpuno je određena vrijednostima istinitosti koje imaju interpretacije atoma. Budući da osnovni logički pojmovi vezani uz forme i njihove interpretacije ovise samo o vrijednostima istinitosti onda je, u IF–logici, forme dovoljno interpretirati tako da odredimo vrijednosti istinitosti njihovih atoma.

IF–INTERPRETACIJA

IF–interpretacija je pridruženje vrijednosti istinitosti $\top$ ili $\bot$ atomima od kojih su izgrađene IF–forme.

Drugim riječima, to je funkcija iz skupa atoma $\mathcal{At}$ u skup $\{\top, \bot\}$. Označavamo je s **int**.

$$\textbf{int} : \mathcal{At} \to \{\top, \bot\}$$

Ta funkcija može biti totalna ili parcijalna, tj. može pridruživati vrijednosti istinitosti svim ili samo nekim atomima.

Na primjer, funkcija zadana sljedećom IF–tablicom jedna je IF–interpretacija.

P	Q	R	P_1	Q_1	R_1	P_2	Q_2	R_2	...
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	...

U toj interpretaciji forma $(\overline{P} \wedge \overline{R}) \vee (P \wedge Q)$ je neistinita, tj. ima vrijednost $\bot$. To slijedi iz definicije veznika $\wedge$, $\vee$ i $-$, jednostavnim računom:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{int}((\overline{P} \wedge \overline{R}) \vee (P \wedge Q)) = \mathbf{int}(\overline{P} \wedge \overline{R}) \vee \mathbf{int}(P \wedge Q) = \\
&=(\mathbf{int}\overline{P} \wedge \mathbf{int}\overline{R}) \vee (\mathbf{int}P \wedge \mathbf{int}Q) = (-\mathbf{int}P \wedge -\mathbf{int}R) \vee (\mathbf{int}P \wedge \mathbf{int}Q) = \\
&=(-\top \wedge -\top) \vee (\top \wedge \bot) = (\bot \wedge \bot) \vee \bot = \bot \vee \bot = \bot
\end{aligned}$$

Taj se račun temelji na sljedećoj induktivnoj definiciji.

ISTINITOST IF–FORME U IF–INTERPRETACIJI

Vrijednost istinitosti IF–forme F u IF–interpretaciji **int** (koja mora biti definirana na svim atomima forme F) označavamo s $\mathbf{int}(F)$ i definiramo je induktivno s (i) i (ii):

(i) Na atomima je **int** već definirana.

(ii) $\mathbf{int}(A \wedge B) = \mathbf{int}(A) \wedge \mathbf{int}(B)$
$\mathbf{int}(A \vee B) = \mathbf{int}(A) \vee \mathbf{int}(B)$
$\mathbf{int}(-A) = -\mathbf{int}(A)$
$\vdots$

Forma F je istinita u interpretaciji **int** akko $\mathbf{int}(F) = \top$.

Gornja definicija zapravo opisuje kako se funkcija **int**, definirana samo na atomima, induktivno proširuje do funkcije definirane na svim IF–formama izgrađenim nad tim atomima.

Računanje tablice istinosti neke forme zapravo je računanje vrijednosti istinitosti te forme u *svim* (parcijalnim) interpretacijama definiranim na atomima te forme.

P	Q	R	$\overline{P}$	$\overline{R}$	$\overline{P} \wedge \overline{R}$	$P \wedge Q$	$(\overline{P} \wedge \overline{R}) \vee (P \wedge Q)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$

Prva tri stupca gornje tablice zapravo su sve moguće (parcijalne) interpretacije atome P, Q i R. Ima ih ukupno 8, smještenih u 8 redaka prva tri stupca. Daljnje vrijednosti su vrijednosti istinitosti naznačenih formi, izračunate u odgovarajućim interpretacijama. U zadnjem stupcu izračunate su vrijednosti istinitosti forme $(\overline{P} \wedge \overline{R}) \vee (P \wedge Q)$ u svim interepretacijama atoma te forme.

Drugi i treći korak izgradnje IF–logike sada su jednostavni.

TEST VALJANOSTI

Forma A je **valjana**, tj. $\Box A$, ako je A istinita u svim interpretacijama.

Dakle, $\Box A$ testiramo tako da izgradimo tablicu istinitosti od A i provjerimo jesu li u stupcu pod A sami $\top$-ovi.

Na primjer, forma $A = Q \vee P\overline{R} \vee \overline{P}R \vee \overline{P}S \vee \overline{Q}R \vee \overline{R}\,\overline{S}$ je valjana, jer su u stupcu pod A sami $\top$-ovi.

P	Q	R	S	PQ	$P\overline{R}$	$\overline{P}R$	$\overline{P}S$	$\overline{Q}R$	$\overline{R}\,\overline{S}$	A
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$

TEST KONZISTENTNOSTI

Forma B je **konzistentna**, tj. $\Diamond B$, ako je B istinita bar u jednoj interpretaciji.

Dakle, B testiramo tako da izgradimo tablicu istinitosti od B i provjerimo je li u stupcu pod B bar jedan $\top$.

Na primjer, forma $B = PQ \vee P\overline{R} \vee \overline{P}R \vee \overline{Q}R$ je konzistentna, jer u stupcu pod B nalazimo $\top$-ove (ona nije valjana jer nalazimo i $\bot$-ove):

P	Q	R	PQ	$P\overline{R}$	$\overline{P}R$	$\overline{Q}R$	B
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

TEST IMPLIKACIJE

Forme $A_1, \ldots, A_n$ **impliciraju** formu C, tj. $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow C$, ako ne postoji interpretacija u kojoj su sve forme $A_1, \ldots, A_n$ istinite, a u kojoj je C neistinita.

Dakle, $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow C$ testiramo tako da izgradimo zajedničku tablicu istinitosti za forme $A_1, \ldots, A_n, C$ i provjerimo da ne postoji redak u kojem sve forme $A_1, \ldots A_n$ imaju vrijednost $\top$, a u kojem forma C ima vrijednost $\bot$.

Na primjer, $A_1 = \overline{P} \vee \overline{Q}$, $A_2 = \overline{P} \vee R$ i $A_3 = R \vee S$ impliciraju $C = \overline{P}R \vee \overline{P}S \vee \overline{Q}R$, jer u svakom retku u kojem A_1, A_2 i A_3 imaju vrijednost $\top$ i C ima vrijednost $\top$:

P	Q	R	S	$A_1 = \overline{P} \vee \overline{Q}$	$A_2 = \overline{P} \vee R$	$A_3 = R \vee S$	$\overline{P}R$	$\overline{P}R$	$\overline{Q}R$	C
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

TEST EKVIVALENCIJE

Forme F i G su **ekvivalentne**, tj. $F \Leftrightarrow G$ ako u svakoj interpretaciji imaju istu vrijednost istinitosti.

Dakle, $F \Leftrightarrow G$ testiramo tako da izgradimo zajedničku tablicu istinitosti za forme F i G, te provjerimo da F i G u svakom retku imaju istu vrijednost istinosti.

Na primjer, forme $F = R \vee P\overline{Q}$ i $G = (P \vee R)(\overline{Q} \vee R)$ su ekvivalentne jer u svakom retku imaju istu vrijednost istinitosti:

P	Q	R	$P\overline{Q}$	F	$P \vee R$	$\overline{Q} \vee R$	G
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$

Vidimo da tablice istinitosti možemo koristiti za testiranje osnovnih logičkih relacija. Uskoro ćemo upoznati i neke druge testove, koji su jednostavniji i mogu se lako proširiti na druge logike (što nije slučaj s tabličnim testovima).

2.3 Kondicional i bikondicional

Osim binarnih veznika "i" i "ili" u prirodnim jezicima često se koristi binarni veznik "ako–onda". Tvrdnju oblika "ako A onda B" zovemo **kondicionalom**. Njezinu A komponentu zovemo **antecendentom**, a njenu B komponentu **konzekventom**.

Kondicional najčešće nije istinosna funkcija. Naime, pod kojim bismo uvjetima kondicional držali istinitim? Čak je i postavljanje tog pitanja neobično, jer afirmaciju tvrdnje "ako A onda B" manje doživljavamo kao afirmaciju kondicionala, a više kao uvjetnu afirmaciju konzekvente. Ako se pokaže da je antecedenta istinita onda stojimo iza konzekvente (i priznat ćemo našu grešku ako se ona pokaže neistinitom). Ako se pak pokaže da je antecedenta neistinita naša afirmacija kondicionala postaje praznom, kao da nije ni učinjena. Mogli bismo reći da tako shvaćeni kondicional ima djelomičnu tablicu istinosti:

A	B	"ako A onda B"
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	
$\bot$	$\bot$	

U IF–logici odustajemo od ove prakse i kondicional držimo istinosno funkcionalnim veznikom (s potpunom tablicom). Ako je antecedenta istinita onda vrijednost istinosti kondicionala poistovjećujemo s vrijednošću istinosti konzekvente, kao u prirodnim jezicima. Ako je antecedenta neistinita onda kondicional smatramo istinitim bez obzira na vrijednost istinitosti konzekvente, suprotno praksi prirodnih jezika. Tako upotpunjeni kondicional, oznakom $A \to B$, često se zove materijalnim kondicionalom.

DEFINICIJA KONDICIONALA →

A	B	$A \to B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Očito vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$A \to B \Leftrightarrow -A\overline{B}, \quad A \to B \Leftrightarrow \overline{A} \vee B.$$

U skladu s tom IF–definicijom sljedeće su tvrdnje istinite:

(1) Ako je Zagreb u Hrvatskoj onda je more slano.

(2) Ako je Zagreb u Sloveniji onda je more slano.

(3) Ako je Zagreb u Sloveniji onda je more slatko.

To sigurno izgleda neobično, ali jednako bi neobično izgledalo da neku od tvrdnji (1), (2) ili (3) proglasimo neistinitom. Neobične su nam tvrdnje (1), (2) i (3), a ne to jesu li one istinite ili neistinite. Naprosto nije uobičajeno praviti kondicionale od jednostavnijih komponenti čije su istinosne vrijednosti (bezuvjetno) poznate. Razlog za to je očit: čemu tvrditi nešto dugo i složeno poput (1) i (2) ako smo u poziciji da iskažemo jaču i kraću tvrdnju: "More je slano"? Zašto tvrditi dugo i složeno (3) ako možemo reći kraće i jače "Zagreb nije u Sloveniji"?

Uostalom, isto vrijedi i za veznik "ili". Tvrdnja

(4) Zagreb je u Hrvatskoj ili je more slatko.

zvuči jednako neobično kao i tvrdnje (1)–(3), i to iz istih razloga. Informativnije je i jednostavnije reći "Zagreb je u Hrvatskoj" nego tvrditi (4).

Tko tvrdi "Ako A onda B" (odnosno, "A ili B") obično nije siguran u pojedinačnu istinitost ili neistinitost tvrdnji A i B, nego ima neke razloge da ne vjeruje u kombinaciju "A i nije B" (odnosno, "Nije A i nije B"). Dakle, onaj koji tvrdi:

Ako Lidija ima upalu slijepog crijeva onda hitno treba ići u bolnicu.

tvrdi to zato što zna koje su moguće komplikacije upale slijepog crijeva, a ne zato što zna ima li Lidija upalu i treba li ići u bolnicu.

Sve što smo rekli o kondicionalu "ako-onda" vrijedi i za **bikondicional** "ako i samo ako", koji skraćeno zapisujemo "akko". Naime, bikondicional "A akko B" je konjunkcija kondicionala "Ako A onda B" i "Ako B onda A". Njegova IF–varijanta označava se s $\leftrightarrow$ i često se naziva materijalnim bikondicionalom.

DEFINICIJA BIKONDICIONALA $\leftrightarrow$

A	B	$A \leftrightarrow B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$

Očito vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow AB \vee \overline{A}\,\overline{B}, \qquad A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B)(B \rightarrow A).$$

U prirodnim jezicima idiomi "ako-onda" i "ako i samo ako" također se koriste za izražavanje implikacije i ekvivalencije. U matematici je ta uporaba čak dominantna. To, nažalost, dovodi do brkanja kondicionala s implikacijom i bikondicionala s ekvivalencijom. Njihov stvarni odnos je sljedeći: A implicira B, tj. $A \Rightarrow B$, ako ne postoji interpretacija u kojoj je A istinito i B neistinito, što znači da ne postoji interpretacija u kojoj je $A \rightarrow B$ neistinito. Dakle, implikacija $A \Rightarrow B$ znači valjanost kondicionala $A \rightarrow B$. Slično, ekvivalencija $A \Leftrightarrow B$ znači valjanost bikondicionala $A \leftrightarrow B$. To je izuzetno važna veza, ali nije identitet.

Kondicional i bikondicional omogućuju nam da implikaciju i ekvivalenciju svedemo na valjanost, kao što nam je negacija omogućila da valjanost i implikaciju svedemo na konzistentnost (usp. 1 poglavlje).

VEZA KONDICIONALA, IMPLIKACIJE I VALJANOSTI

Forma A implicira formu B akko je kondicional $A \rightarrow B$ valjan.

Zapisano simbolički:

$$A \Rightarrow B \ \text{ akko } \ \Box(A \rightarrow B)$$

VEZA BIKONDICIONALA, IMPLIKACIJE I VALJANOSTI

Forma A je ekvivalentna formi B akko je bikondicional $A \leftrightarrow B$ valjan.

Zapisano simbolički:

$$A \Leftrightarrow B \ \text{ akko } \ \Box(A \leftrightarrow B)$$

Očito je da su istinosne funkcije $\rightarrow$ i $\leftrightarrow$ (kako smo ih ranije definirali) jedine istinosne funkcije koje na ovaj način implikaciju i ekvivalenciju svode na valjanost. To je još jedan razlog (možda i najvažniji) da IF–funkcije $\rightarrow$ i $\leftrightarrow$ definiramo onako kako smo ih definirali.

Osnovni fond IF–veznika kojima ćemo se ubuduće koristiti čine konjunkcija $\wedge$, alternacija $\vee$, negacija $-$, kondicional $\rightarrow$ i bikondicional $\leftrightarrow$. Dakle, naše IF–forme bit će $\{\wedge, \vee, -, \rightarrow, \leftrightarrow\}$–forme, koje definiramo kao u prethodnom odjeljku. Uz nove veznike $\rightarrow$ i $\leftrightarrow$ uvodimo i novu konvenciju da oni razdvajaju jače od starih veznika $\wedge$, $\vee$ i $-$. Dakle, $P \vee Q \rightarrow R$ je pokrata za $((P \vee Q) \rightarrow R)$, $-P \leftrightarrow Q$ je pokrata za $((-P) \leftrightarrow Q)$ itd. Forme su razumljivije kada koristimo sve te veznike, iako otprije znamo da su dovoljni $\{\wedge, -\}$ ili $\{\vee, -\}$, a lako je pokazati da su dovoljni i $\{\rightarrow, -\}$.

Naime, iz

$$\overline{A} \vee B \Leftrightarrow A \rightarrow B \quad \text{i} \quad -A\overline{B} \Leftrightarrow A \rightarrow B$$

lako slijedi

$$A \vee B \Leftrightarrow \overline{\overline{A}} \vee B \Leftrightarrow \overline{A} \rightarrow B \quad \text{i}$$

$$A \wedge B \Leftrightarrow - - A\overline{\overline{B}} \Leftrightarrow -(A \rightarrow \overline{B}),$$

tj. i alternacija i konjunkcija mogu se izraziti pomoću kondicionala i negacije.

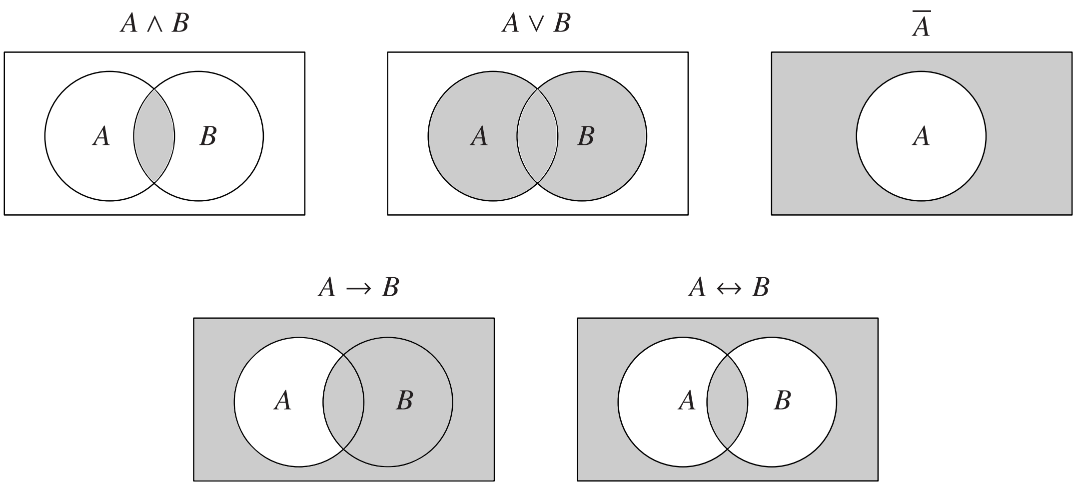
Primjetimo još da je

$$\overline{A} \Leftrightarrow A \rightarrow \perp$$

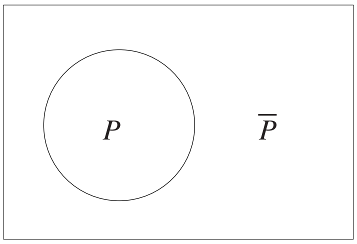
što nas dovodi do $\{\rightarrow, \perp\}$, kao još jedne zanimljive baze svih IF–veznika.

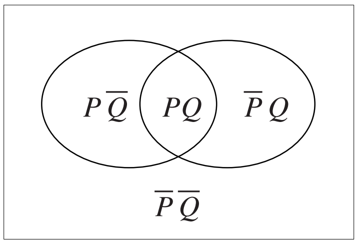
2.4 IF–logika i algebra skupova

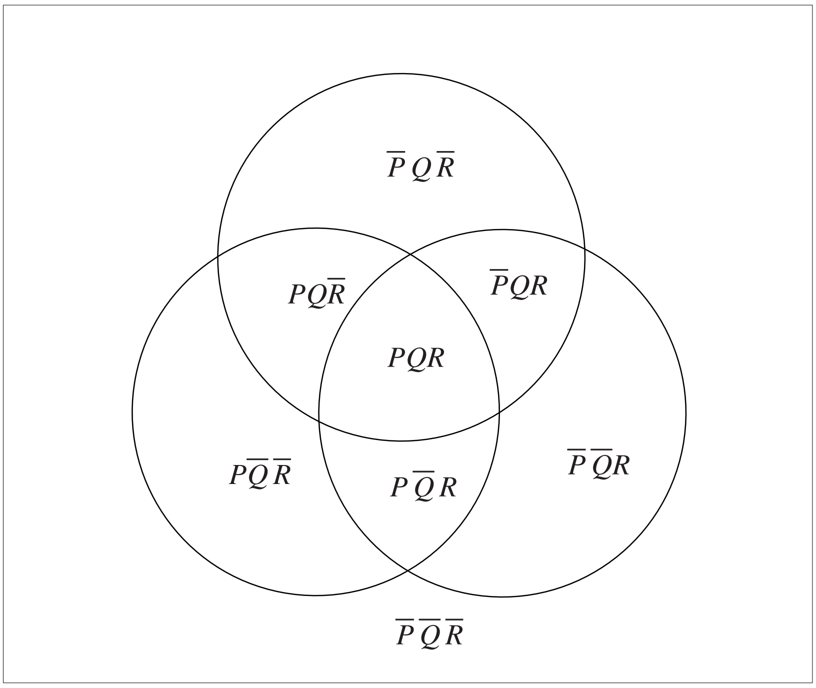
Svakoj IF–formi možemo pridružiti skup svih totalnih interpretacija u kojima je ona istinita. Taj skup predstavlja tu formu, a često ga i identificiramo s tom formom. (Budući da su međusobno ekvivalentne forme predstavljene identičnim skupovima, time identificiramo i međusobno ekvivalentne forme.) Ako su forme A i B identificirane sa skupovima totalnih interpretacija u kojima su one istinite, onda $A \wedge B$ i $A \vee B$ identificiramo s presjekom i unijom tih skupova, a $\overline{A}$ s komplementom od A. (Naime, skup interpretacija u kojima je forma A istinita je komplement skupa interpretacija u kojima je forma $\overline{A}$ istinita; skup interpretacija u kojima je forma $A \wedge B$ istinita je presjek skupova interpretacija u kojima su istinite forme A i B itd.) Kondicional $A \rightarrow B$ i bikondicional $A \leftrightarrow B$ ekvivalentni su s $\overline{A} \vee B$ i $AB \vee \overline{A}\,\overline{B}$, pa i njih identificiramo s odgovarajućim skupovima. To prikazujemo sljedećim skupovnim dijagramima, koji se još zovu Eulerovim:



Primijetimo (vidi donje dijagrame) da dijagram koji prikazuje 1 atomarnu formu P sadrži 2 područja (tzv. ćelije): P i $\overline{P}$. Dijagram koji prikazuje 2 atomarne forme P i Q sadrži 4 ćelije: PQ, $P\overline{Q}$, $\overline{P}Q$ i $\overline{P}\,\overline{Q}$. Dijagram koji prikazuje 3 atormarne forme P, Q i R sadrži 8 (tj. 2^3) ćelija: PQR, $PQ\overline{R}$, $P\overline{Q}R$, $P\overline{Q}\,\overline{R}$, $\overline{P}QR$, $\overline{P}Q\overline{R}$, $\overline{P}\,\overline{Q}R$ i $\overline{P}\,\overline{Q}\,\overline{R}$. I tako dalje.







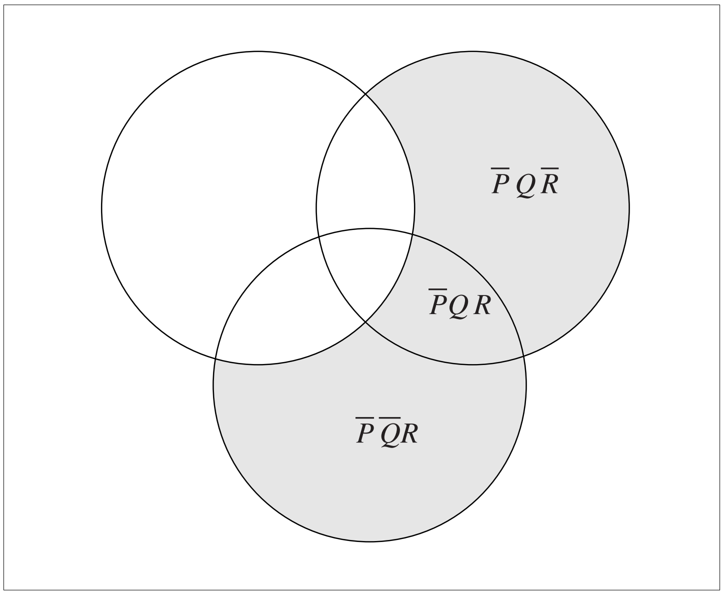
Svaka ćelija odgovara jednoj parcijalnoj interpretaciji prikazanih formi. Na primjer, ćelija $\overline{P}\,\overline{Q}R$ sadrži totalne interpretacije u kojima je $P = \bot$, $Q = \bot$ i $R = \top$, tj. predstavlja parcijalnu intepretaciju $(P, Q, R) = (\bot, \bot, \top)$. Svih 8 ćelija, u tom istom prikazu, predstavlja svih 8 parcijalnih interpretacija formi P, Q i R. Dakle, ono što je 8 redaka u tablici istinitosti za atome P, Q i R, to je 8 ćelija u skupovnom prikazu.

Nadalje, svaka istinosna funkcija $F(P, Q, R)$ je pridruženje istinosnih vrijednosti $\top$ ili $\bot$ parcijalnim interpretacijama koje interpretiraju P, Q i R. Dakle, njezin skupovni prikaz čine sve intrpretacije u kojima je $F(P, Q, R)$ istinita, tj. $F(P, Q, R)$ je prikazana unijom ćelija u kojima vrijedi $F(P, Q, R) = \top$. Na primjer, istinosna funkcija $F(P, Q, R)$ zadana sljedećom tablicom:

P	Q	R	F
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

ima sljedeći skupovni prikaz:

$F(P,Q,R)$



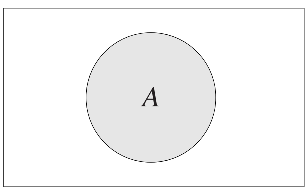
Iz oba prikaza, tabličnog i skupovnog, možemo očitati da je

$$F \Leftrightarrow \overline{P}QR \vee \overline{P}Q\overline{R} \vee \overline{P}\,\overline{Q}R,$$

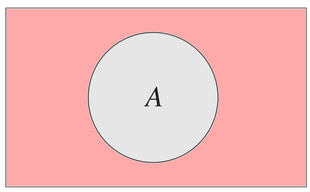
tj. iz oba prikaza lako očitavamo alternacijsku normalnu formu od F. (U skupovnom dijagramu ona je doslovno "vidljiva".)

Osim što omogućuju da vrlo zorno prikazujemo IF–forme, skupovni dijagrami (uz dolje opisane Vennove konvencije) omogućavaju zorno prikazivanje logičkih svojstava formi (npr. valjanosti i konzistentnosti) i logičkih odnosa među formama (npr. implikacije i ekvivalencije). Na primjer, što znači da je forma A valjana? To znači da nema interpretacije u kojoj je ona neistinita, tj. izvan skupa A nema ničega. To se na Vennovom dijagramu prikazuje tako da se područje izvan A iscrtka. Naime, Venn iscrtkavanjem područja označava da je ono prazno.

A



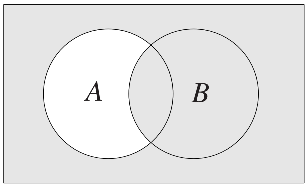
$\square A$



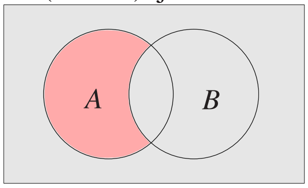
Lijevi Eulerov dijagram prikazuje jedan objekt (formu A), a desni Vennov dijagram prikazuje tvrdnju o tom objektu (da je forma A valjana, jer je sve izvan područja A prazno). To je ona ista razlika koju smo uočili između kondicionala i implikacije, te bikondicionala i ekvivalencije.

Sljedeći Eulerovi dijagrami, koji su lijevo, prikazuju kondicional i bikondicional, dok desni Vennovi dijagrami (s konvencijom o iscrtkavanju) prikazuju implikaciju i ekvivalenciju.

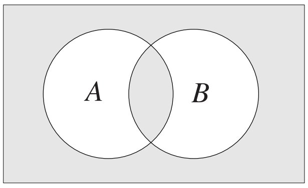
$A \to B$



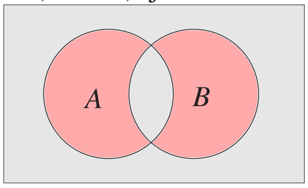
$\Box(A \to B)$ tj. $A \Rightarrow B$



$A \leftrightarrow B$

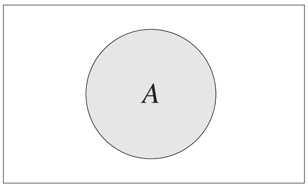


$\Box(A \leftrightarrow B)$ tj. $A \Leftrightarrow B$

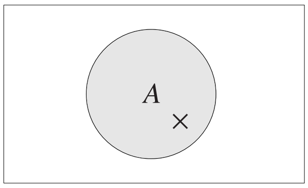


Razmotrimo, nadalje, što znači da je forma A konzistentna. To znači da postoji intepretacija u kojoj je ona istinita, tj. da skup A nije prazan. To se na Vennovom dijagramu prikazuje tako da se u područje A stavi križić $\times$. Naime, stavljanjem križića $\times$ u neko područje Venn označava da je ono neprazno. Lijevi Eulerov dijagram opet prikazuje objekt (formu A), dok desni Vennov dijagram prikazuje tvrdnju o tom objektu (da je forma A konzistentna, jer je unutar područja A križić).

A

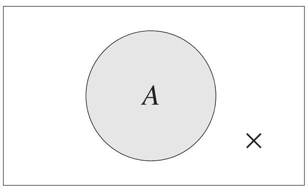


$\Diamond A$

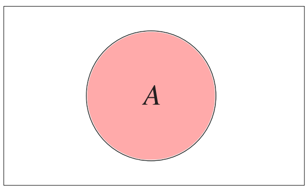


U skladu s Vennovom konvencijom nevaljanost forme A prikazuje se križićem, kao lijevo dolje, a inkonzistentnost forme A iscrtkavanjem, kao desno dolje.

$\not\Box\, A$



$\not\Diamond\, A$



U 3. poglavlju ćemo vidjeti kako ove Vennove konvencije uspješno rješavaju probleme Aristotelove silogistike.

2.5 Matematička struktura IF–formi

U ovom ćemo odjeljku nešto reći o strukturi IF–formi, i to onim čitateljima koji znaju nešto apstraktne algebre. Oni koji to ne znaju mogu preskočiti ovaj odjeljak, jer se na njega u daljnjem tekstu nećemo pozivati.

Relacija implikacije $\Rightarrow$ refleksivna je i tranzitivna na skupu IF–formi koji ćemo označiti sa $\mathcal{F}$. Dakle, ona je preduređaj na $\mathcal{F}$. Slijedi da je presjek nje i njenoga inverza tranzitivna, refleksivna i simetrična relacija (to je naravno naša relacija ekvivalencije $\Leftrightarrow$). Ona generira particiju skupa $\mathcal{F}$ na klase ekvivalencije, na kojima je $\Rightarrow$ parcijalni uređaj. Dakle, $(\mathcal{F}/\Leftrightarrow, \Rightarrow)$ je struktura parcijalnog uređaja. Klase od $\top$ i $\bot$, tj. $[\top]$ i $[\bot]$, su najveći i najmanji element u toj strukturi, jer $\bot \Rightarrow A$ i $A \Rightarrow \top$ za svaku IF–formu A. Osim toga iz $A \Rightarrow B$ i $A \Rightarrow C$ slijedi $A \Rightarrow B \wedge C$, a iz $B \Rightarrow A$ i $C \Rightarrow A$ slijedi $B \vee C \Rightarrow A$, što znači da su $\wedge$ i $\vee$ operacije infimuma i supremuma u toj strukturi. Drugim riječima $(\mathcal{F}/\Leftrightarrow, \Rightarrow, [\bot], [\top])$ je rešetka s nulom $[\bot]$ i jedinicom $[\top]$. Ona je i distributivna, jer su $\wedge$ i $\vee$ međusobno distributivni. Također je i komplementarna jer je svakoj formi A pridružena forma $\overline{A}$ sa svojstvima $A \vee \overline{A} \Leftrightarrow \top$ i $A \wedge \overline{A} \Leftrightarrow \bot$. Distributivnu komplementarnu rešetku s nulom i jedinicom kraće zovemo bulovom rešetkom, pa konačno možemo reći da je $(\mathcal{F}/\Leftrightarrow, \Rightarrow, [\bot], [\top])$ bulova rešetka.

Do sada smo $\mathcal{F}/\Leftrightarrow$ gledali kao relacijsku strukturu, s relacijom uređaja $\Rightarrow$ i konstantama $[\bot]$ i $[\top]$. Možemo je gledati i kao algebarsku strukturu s operacijama $\wedge$ i $\vee$. Njezina osnovna svojstva su komutativnost i asocijativnost operacija $\wedge$ i $\vee$, te sljedeća svojstva:

$$
\begin{array}{llll}
(A \wedge B) \vee B \Leftrightarrow B & \top \vee A \Leftrightarrow \top & \bot \vee A \Leftrightarrow A & A \vee \overline{A} \Leftrightarrow \top \\
(A \vee B) \wedge B \Leftrightarrow B & \top \wedge A \Leftrightarrow A & \bot \wedge A \Leftrightarrow \bot & A \wedge \overline{A} \Leftrightarrow \bot
\end{array}
$$

Struktura s tim svojstvima naziva se bulovom algebrom, pa zato možemo reći da je $(\mathcal{F}/\Leftrightarrow, \wedge, \vee, [\bot], [\top])$ bulova algebra.

Ova dva opisa strukture IF–formi zapravo su ekvivalentni. Naime, nije teško dokazati teorem koji tvrdi da je svaka bulova rešetka $(B, \leq, 0, 1)$ ujedno i bulova algebra $(B, \wedge, \vee, 0, 1)$ i obratno. (U kontekstu rešetke $\wedge$ i $\vee$ se definiraju sa $A \wedge B := \inf\{A, B\}$ i $A \vee B := \sup\{A, B\}$, dok se u kontekstu algebre $\leq$ definira sa $A \leq B :=\ A \wedge B = B$.)

Napomenimo još da Stoneov teorem o reprezentaciji tvrdi da se svaka bulova algebra, odnosno rešetka, može realizirati kao algebra skupova (tj. izomorfna je nekoj algebri skupova uz $\wedge = \cap$, $\vee = \cup$ i $\leq = \subseteq$). U specijalnom slučaju algebre/rešetke klasa ekvivalencije IF–formi to smo pokazali u prethodnom odjeljku.

2.6 Generalizirana implikacija

Ključni logički pojmovi implikacije, konzistentnosti i valjanosti, posebni su slučajevi pojma generalizirane implikacije koji definiramo na sljedeći način.

GENERALIZIRANA IMPLIKACIJA $\models$

Skup formi Γ (generalizirano) implicira skup formi Δ ako ne postoji interpretacija u kojoj su sve forme iz Γ istinite i sve forme iz Δ neistinite. Drugim riječima, u svakoj interpretaciji bar jedna forma iz Γ prima vrijednost $\bot$ ili bar jedna forma iz Δ prima vrijednost $\top$. To kraće zapisujemo

$$\Gamma \models \Delta$$

i čitamo "Γ implicira Δ".

Složena formula oblika $\Gamma \models \Delta$ zove se **sekventa**. Forme iz Γ zovu se premisama, a forme iz Δ konkluzijama te sekvente.

Skupove formi Γ i Δ najčešće zapisujemo kao liste formi koje odvajamo zarezima. Na primjer, $\{A, B, A\} \models \{C, D\}$ zapisujemo $A, B, A \models C, D$. (Uočimo da su $A, B, A \models C, D$ i $A, B \models D, C$ iste sekvente jer je $\{A, B, A\} = \{A, B\}$ i $\{C, D\} = \{D, C\}$.) Osim toga, umjesto oznake praznog skupa $\emptyset$ obično ne pišemo ništa. Na primjer, $\Gamma \models \emptyset$ zapisujemo $\Gamma \models\ $, $\emptyset \models \Delta$ zapisujemo $\ \models \Delta$, a $\emptyset \models \emptyset$ zapisujemo $\ \models\ $.

Ako je $\Gamma \neq \emptyset$ i Δ sadrži točno jednu formu onda $\Gamma \models \Delta$ i $\Gamma \Rightarrow \Delta$ znače isto jer im se definicije poklapaju. (U oba slučaja nema interpretacije u kojoj bi sve forme iz Γ bile istinite, a u kojoj bi Δ ipak bila neistinita.) Relacija $\models$ je općenitija jer dopušta da su Γ i Δ proizvoljni skupovi.

Na primjer, $\Gamma \models$ znači da nema interpretacije u kojoj su sve forme iz Γ istinite. To znači da je Γ inkonzistentan skup formi, što smo označavali s $\not\Diamond\, \Gamma$.

KONZISTENTNOST KAO GENERALIZIRANA IMPLIKACIJA

$\Diamond\Gamma$ znači isto što i $\Gamma \not\models \emptyset$ (tj. $\Gamma \not\models$).

Slično, $\models A$ znači da nema interpretacije koja formu A čini neistinitom. To znači da je forma A valjana, što smo označavali s $\Box A$.

VALJANOST KAO GENERALIZIRANA IMPLIKACIJA

$\Box A$ znači isto što i $\emptyset \models A$ (tj. $\models A$).

Ako su $\Gamma = \{A, \ldots, B\}$ i $\Delta = \{C, \ldots, D\}$ konačni skupovi formi onda se relacija $\models$ može svesti na relaciju $\Rightarrow$ između samo dvije forme.

SVOĐENJE GENERALIZIRANE IMPLIKACIJE NA OBIČNU

$A, \ldots, B \models C, \ldots, D$ znači isto što i $A \wedge \ldots \wedge B \Rightarrow C \vee \ldots \vee D$

Naime, interpretacija u kojoj su $A, \ldots, B$ istinite forme, a $C, \ldots, D$ neistinite forme ujedno je i interpretacija u kojoj je $A \wedge \ldots \wedge B$ istinita forma, a $C \vee \ldots \vee D$ neistinita forma.

Razmotrimo još i ekstremni slučaj $\emptyset \models \emptyset$. Bilo koja interpretacija čini sve forme s lijeve strane istinitima, a sve forme s desne strane neistinitima, jer tih formi uopće nema. No to znači da je sekventa $\emptyset \models \emptyset$ neistinita.

NEISTINA KAO GENERALIZIRANA IMPLIKACIJA

$\perp$ znači isto što i $\emptyset \models \emptyset$.

Za negaciju generalizirane implikacije $\not\models$ kažemo da je **partikularna** zato jer se njome tvrdi da **neka** interpretacija ima određeno svojstvo (u ovom slučaju svojstvo da su u toj interpretaciji sve premise istinite i sve konkluzije neistinite).

Za samu relaciju $\models$ kažemo da je **univerzalna** jer se njom tvrdi da **sve** interpretacije imaju određeno svojstvo (u ovom slučaju svojstvo da je u svim interpretacijama bar jedna premisa neistinita ili bar jedna konkluzija istinita).

Odavde odmah slijedi da su $\Box$ (valjanost) i $\not\Diamond$ (inkonzistentnost) univerzalna svojstva, a $\not\Box$ (nevaljanost) i $\Diamond$ (konzistentnost) partikularna. Naime, $\Box A$ je isto što i $\models A$, $\not\Diamond\,\Gamma$ je isto što i $\Gamma \models$; dok je $\not\Box\, A$ isto što i $\not\models A$, a $\Diamond\Gamma$ je isto što i $\Gamma \not\models$.

UNIVERZALNE I PARTIKULARNE RELACIJE

$\models$, $\Box$ i $\not\Diamond$ su univerzalne relacije.

$\not\models$, $\not\Box$ i $\Diamond$ su partikularne relacije.

Implikacija $\models$ pokorava se nekim općim pravilima koja je korisno usvojiti i njima se uspješno koristiti. Prije svega to su strukturna pravila koja vrijede za sve forme kojima ćemo se baviti, a ne samo za IF–forme.

STRUKTURNA PRAVILA

Preklapanje (P): $\dfrac{}{\Gamma, A \models A, \Delta}$

Slabljenje (S): $\dfrac{\Gamma \models \Delta}{\Gamma, A \models \Delta} \qquad \dfrac{\Gamma \models \Delta}{\Gamma \models A, \Delta}$

Rez (R): $\dfrac{\Gamma \models \Delta, A \qquad A, \Gamma \models \Delta}{\Gamma \models \Delta}$

Iz definicije relacije $\models$ neposredno slijedi da je $\Gamma, A \models A, \Delta$ uvijek istinito, jer ne postoji interpretacija u kojoj bi A mogla biti i istinita i neistinita. To se načelo zove **"preklapanje"** jer se skupovi premisa Γ, A i konkluzija Δ, A preklapaju (bar u A). Crta nad $\Gamma, A \models A, \Delta$, iznad koje nema sekventi, znači da je preklapanje pravilo bez pretpostavki (tj. da je aksiom).

Ako vrijedi $\Gamma \models \Delta$, tj. ako ne postoji interpretacija u kojoj su svi Γ istiniti i svi Δ neistiniti, onda ne postoji ni ona u kojoj su svi Γ i A istiniti i svi Δ neistiniti, pa vrijedi $\Gamma, A \models \Delta$. Ukratko, iz $\Gamma \models \Delta$ slijedi $\Gamma, A \models \Delta$. Slično, iz $\Gamma \models \Delta$ slijedi i $\Gamma \models A, \Delta$. To se pravilo zove **"slabljenje"** jer su $\Gamma, A \models \Delta$ i $\Gamma \models A, \Delta$ očito slabije implikacije od $\Gamma \models \Delta$.

Zadnje strukturno pravilo je poopćena verzija tranzitivnosti implikacije. Ono možda nije sasvim očito. Pretpostavimo, međutim, da ono ne vrijedi, tj. da imamo:

$$(1) \quad \Gamma \models \Delta, A \qquad (2) \quad A, \Gamma \models \Delta \qquad (3) \quad \Gamma \not\models \Delta.$$

Tada bi, u skladu s (3), postojala interpretacija u kojoj su svi Γ istiniti i svi Δ neistiniti. U toj interpretaciji forma A je bilo istinita bilo neistinita. U prvom slučaju imamo kontradikciju s (2), a u drugom s (1). U svakom slučaju dolazimo do kontradikcije, tj. naše pravilo ipak vrijedi. To se pravilo zove "**rez**" jer se njime forma A "izrezuje" iz konačnog zaključka.

Preklapanje i rez katkad se formuliraju i u sljedećem obliku:

$$\frac{}{A \models A} \qquad \frac{\Gamma_1 \models \Delta_2, A \qquad A, \Gamma_2 \models \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \models \Delta_1, \Delta_2}$$

Uz slabljenje je očito da su te formulacije ekvivalente našima.

Sljedeće pravilo se obično ne zove strukturnim iako i ono vrijedi za sve forme kojima ćemo se baviti, a ne samo za IF–forme. Prije nego ga iskažemo uvodimo neke oznake.

Rezultat zamjene atoma forme P formom A u formi F, na svim mjestima na kojima se P pojavljuje u F, zvat ćemo supstitucijom od A za P u F i tu ćemo formu označavati s $F(A/P)$. Rezultat supstitucije od A za P u svim formama nekog skupa Γ zvat ćemo supstitucijom od A za P u Γ i taj ćemo skup formi označavati s $\Gamma(A/P)$.

PRAVILO SUPSTITUCIJE

$$\frac{\Gamma \models \Delta}{\Gamma(A/P) \models \Delta(A/P)}$$

Forma P je atomarna, a forma A je proizvoljna.

Pravilo je očito korektno. Naime, atomarna forma P može se interpretirati s $\top$ i $\perp$, što sigurno obuhvaća i sve moguće interpretacije od A (jer su to jedine dvije mogućnosti). Dakle, ako ne postoji interpretacija koja bi oborila $\Gamma \models \Delta$ onda sigurno ne postoji niti ona koja bi oborila $\Gamma(A/P) \models \Delta(A/P)$. (Primjetimo da je za dokaz ključno da se supstituira na mjesto atomarne forme, tj. da je P atomarna forma.)

Pravilo supstitucije često izričemo tako da kažemo da supstitucija čuva implikaciju $\models$. (Ako je neka $\models$-veza vrijedila prije supstitucije vrijedi i poslije supstitucije.) Naravno, supstitucija čuva i ostala svojstva izraziva pomoću $\models$, dakle valjanost $\Box$ i inkonzistentnost $\not\Diamond$. Važno je uočiti da supstitucija ne čuva $\not\models$, kao ni svojstva izraziva pomoću $\not\models$, dakle nevaljanost $\not\Box$ i konzistentnost $\Diamond$. (Na primjer, konzistentna forma P supstitucijom $Q\overline{Q}$ za P u P postaje inkonzistentna forma $Q\overline{Q}$.) Jednom riječju supstitucija čuva univerzalna ali ne i partikularna svojstva.

SUPSTITUCIJA I UNIVERZALNOST / PARTIKULARNOST

Supstitucija čuva univerzalna svojstva $\models$, $\Box$ i $\not\Diamond$.
Supstitucija ne čuva partikularna svojstva $\not\models$, $\not\Box$ i $\Diamond$.

Postupak koji čuva i univerzalna i partikularna svojstva jest zamjena ekvivalentnih formi.

Prije nego ga definiramo uvedimo još jednu konvenciju. Oznakama $F(A)$ i $F(B)$ označavat ćemo forme koje su identične ako su A i B identične forme. (Dakle, $F(B)$ nastaje iz $F(A)$ tako da se na nekim, ali ne nužno svim mjestima podforma A u formi F zamjeni formom B.) Sada možemo formulirati naše pravilo.

PRAVILO ZAMJENE EKVIVALENTNIH FORMI

$$\frac{A \Leftrightarrow B}{F(A) \Leftrightarrow F(B)}$$

Pravilo je očito korektno. Naime, ekvivalnentne forme A i B imaju istu vrijednost istinitosti u svim interpretacijama. No onda i forme $F(A)$ i $F(B)$ imaju iste vrijednosti u svim interpretacijama, jer su $F(A)$ i $F(B)$ identične forme za identične A i B.

Očito je da se zamjenom ekvivalentnih formi čuvaju univerzalna svojstva $\models$, $\Box$ i $\not\Diamond$, ali i partikularna svojstva $\not\models$, $\not\Box$, $\Diamond$. Time ćemo se često koristiti.

Osim do sada uvedenih pravila, u IF–logici vrijede i posebna pravila čija korektnost slijedi iz definicije odgovarajućih IF–veznika.

IF–PRAVILA

$$(\models -)\ \frac{A, \Gamma \models \Delta}{\Gamma \models \Delta, -A} \qquad\qquad (- \models)\ \frac{\Gamma \models \Delta, A}{-A, \Gamma \models \Delta}$$

$$(\wedge \models)\ \frac{A, B, \Gamma \models \Delta}{A \wedge B, \Gamma \models \Delta} \qquad\qquad (\models \wedge)\ \frac{\Gamma \models \Delta, A \qquad \Gamma \models \Delta, B}{\Gamma \models \Delta, A \wedge B}$$

$$(\vee \models)\ \frac{A, \Gamma \models \Delta \qquad B, \Gamma \models \Delta}{A \vee B, \Gamma \models \Delta} \qquad\qquad (\models \vee)\ \frac{\Gamma \models \Delta, A, B}{\Gamma \models \Delta, A \vee B}$$

$$(\rightarrow\models)\ \frac{\Gamma \models \Delta, A \qquad B, \Gamma \models \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \models \Delta} \qquad\qquad (\models\rightarrow)\ \frac{A, \Gamma \models \Delta, B}{\Gamma \models \Delta, A \rightarrow B}$$

$$(\top \models)\ \frac{\Gamma, \top \models \Delta}{\Gamma \models \Delta} \qquad\qquad (\models \top)\ \frac{}{\Gamma \models \top}$$

$$(\bot \models)\ \frac{\Gamma \models \Delta, \bot}{\Gamma \models \Delta} \qquad\qquad (\models \bot)\ \frac{}{\bot \models \Delta}$$

Dvostruka crta u formuliranju pravila znači da ona vrijede u oba smjera. Na primjer, uz oznake

$$(1)\ \Gamma \models \Delta, A \qquad (2)\ \Gamma \models \Delta, B \qquad (3)\ \Gamma \models \Delta, A \wedge B$$

lako se vidi da iz (1) i (2) slijedi (3), ali i da iz (3) slijedi (1) i (2).

Naime, ako vrijede (1) i (2) to znači da je u svakoj interpretaciji bar jedna forma u Γ neistinita ili je bar jedna forma u Δ isinita ili su obje forme A i B istinite. U sva tri slučaja vrijedi (3). Obratno, ako vrijedi (3) to znači da je u svakoj interpretaciji bar jedna forma u Γ neistinita ili je bar jedna forma u Δ istinita ili je $A \wedge B$ istinita. U sva tri slučaja vrijede (1) i (2). Na sličan način se dokazuju i ostala pravila, u oba smjera.

Uočimo da svaki IF–veznik ima po dva dvosmjerna pravila. Lijevim se pravilom, lijevo od znaka $\models$, veznik uvodi (ako pravilo čitamo na dole) ili se izvodi (ako pravilo čitamo na gore). Desnim se pravilom veznik uvodi odnosno izvodi desno od znaka $\models$. (U skladu s tim su pravila i označena.) Još kažemo da lijeva pravila uvode ili izvode veznike iz premisa, a desna ih uvode ili izvode iz konkluzija. Uvođenja i izvođenja uobičajeno je još i zvati introdukcijama i eliminacijama.

Pravila koja smo do sada uveli samo su maleni (iako sistematični) izbor iz skupa svih mogućih pravila. Ipak, uskoro ćemo dokazati da sva korektna pravila slijede iz našeg izabranog skupa, tj. naš je skup pravila potpun. Za sada ćemo samo na jednom primjeru pokazati kako iz našeg skupa strukturnih i IF–pravila možemo izvesti npr. sljedeće pravilo:

$$\frac{A, \Gamma \models \Delta \qquad \overline{A}, \Gamma \models \Delta}{\Gamma \models \Delta}$$

Evo tog izvoda:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A \models A}\ (\mathrm{P})}{\models A, \overline{A}}\ (\models -)}{\models A \vee \overline{A}}\ (\models \vee) \qquad \dfrac{A, \Gamma \models \Delta \quad \overline{A}, \Gamma \models \Delta}{A \vee \overline{A}, \Gamma \models \Delta}\ (\vee \models)}{\Gamma \models \Delta}\ (\mathrm{R})$$

Dokažimo na kraju primjenom naših pravila i Craigov teorem o interpolaciji:

TEOREM O INTERPOLACIJI

Ako $A \models B$ onda postoji forma C izgrađena samo od atoma koji su zajednički formama A i B, takva da $A \models C$ i $C \models B$. (Forma C zove se "interpolant".)

Pretpostavimo da $A \models B$ te da se atomarna forma P pojavljuje u A, ali ne i u B. Tada je $B(\top/P) = B(\bot/P) = B$, pa primjenom pravila supstitucije i $(\vee \models)$ nalazimo:

$$\dfrac{\dfrac{\overline{A \models B}}{A(\top/P) \models B} \qquad \dfrac{\overline{A \models B}}{A(\bot/P) \models B}}{A(\top/P) \vee A(\bot/P) \models B}$$

Osim toga, neposredno iz definicije relacije $\models$ slijedi:

$$\dfrac{\overline{A \models A(\top/P), A(\bot/P)}}{A \models A(\top/P) \vee A(\bot/P)}.$$

Dakle, $A(\top/P) \vee A(\bot/P)$ je interpolant koji ne sadrži P. Ako postoji sljedeći atom Q koji se pojavljuje u A, dakle i u $A(\top/P) \vee A(\bot/P)$, ali ne i u B, onda na isti način možemo naći interpolant za $A(\top/P) \vee A(\bot/P) \models B$. Naravno, to je i interpolant za $A \models B$, jer je $\models$ tranzitivna relacija. Ponavljanjem ovog postupka konačno ćemo doći do interpolanta C koji sadrži samo one atome iz A koji su i u B.

Evo nekih napomena uz ovaj dokaz. Interpolant $A(\top/P) \vee A(\bot/P)$ složeniji je od forme A, ali se uvijek može pojednostaviti uz pomoć sljedećih ekvivalencija (tzv. pravila simplifikacije za $\top$ i $\bot$) i pravila zamjene ekvivalentnih.

FiXme: j
3 kolon

PRAVILA SIMPLIFIKACIJE ZA $\top$ I $\bot$

$D \wedge \top \Leftrightarrow D$	$D \wedge \bot \Leftrightarrow \bot$
$D \vee \top \Leftrightarrow \top$	$D \vee \bot \Leftrightarrow D$
$D \to \top \Leftrightarrow \top$	$D \to \bot \Leftrightarrow -D$
$\top \to D \Leftrightarrow D$	$\bot \to D \Leftrightarrow \top$
$D \leftrightarrow \top \Leftrightarrow D$	$D \leftrightarrow \bot \Leftrightarrow -D$
$-\top \Leftrightarrow \bot$	$-\bot \Leftrightarrow \top$

Na taj način interpolant će se reducirati na $\top$ ili $\bot$, ili će iz njega biti eliminirani svi primjerci od $\top$ i $\bot$. U ekstremnom slučaju, u kojem A i B nemaju zajedničkih atoma, interpolant se nužno reducira na $\top$ ili $\bot$. Tada imamo

$$(1) \quad A \models \top, \quad \top \models B \qquad \text{ili} \qquad (2) \quad A \models \bot, \quad \bot \models B.$$

Prema pravilima za konstante $\top$ i $\bot$, (1) je ekvivalentno s $\models B$, a (2) je ekvivalentno s $\models A$.

Dakle, ako A i B nemaju zajedničkih atoma, a ipak vrijedi $A \models B$, onda je A inkonzistentna forma, tj. $A \models$, ili je B valjana forma, tj. $\models B$.

Evo i jednog konkretnog primjera nalaženja interpolanta i njegove simplifikacije, Nađimo interpolant za $-((P \to Q) \to (\overline{R} \to Q)) \models (P \vee \overline{R})(S \vee \overline{P})$ i simplificirajmo ga tako da ne sadrži ni $\top$ ni $\bot$.

Uvedimo oznake $A = -((P \to Q) \to (\overline{R} \to Q))$, $B = (P \vee \overline{R})(S \vee \overline{P})$.

Jedina atomarna forma koja se pojavljuje u A, ali ne u B, je Q. Zato će traženi interpolant biti

$$\begin{aligned} C &= A(\top/Q) \vee A(\bot/Q) = \\ &= -((P \to \top) \to (\overline{R} \to \top)) \vee -((P \to \bot) \to (\overline{R} \to \bot)) \\ &\Leftrightarrow -(\top \to \top) \vee -(\overline{P} \to R) \Leftrightarrow \bot \vee \overline{P}\,\overline{R} \Leftrightarrow \overline{P}\,\overline{R} \end{aligned}$$

Dakle,

$$-((P \to Q) \to (\overline{R} \to Q)) \models \overline{P}\,\overline{R} \models (P \vee \overline{R})(S \vee \overline{P}).$$

2.7 Analiza istinosnih vrijednosti i Hornov algoritam

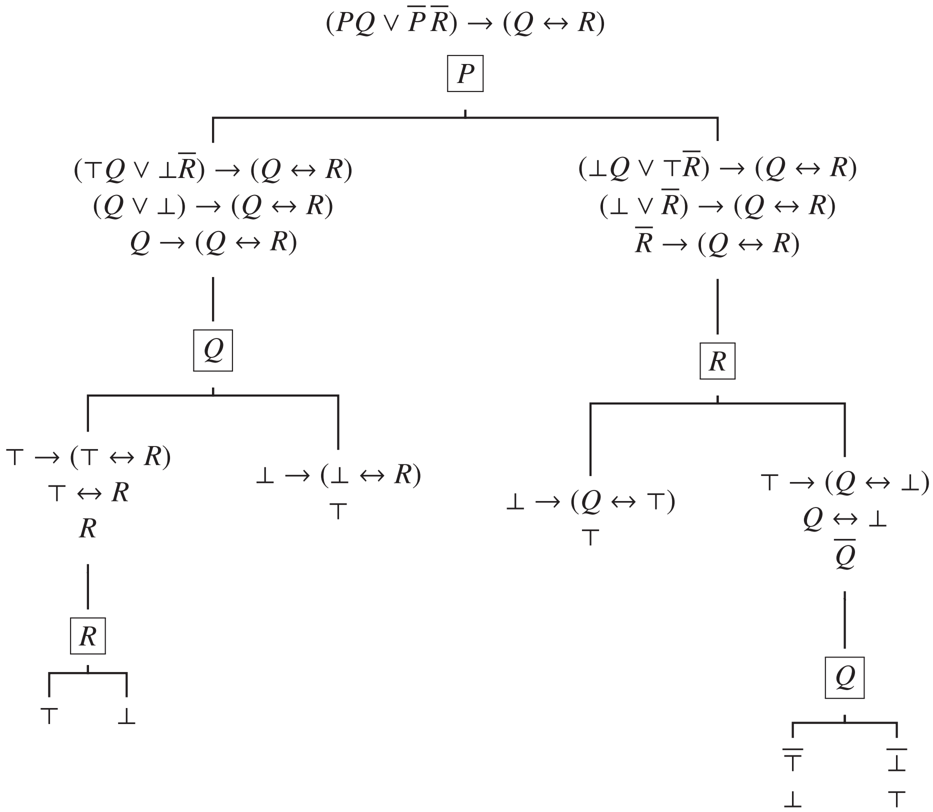
Tablica istinosnih vrijednosti forme A iscrpno analizira kako njezine vrijednosti istinitosti ovise o interpretacijama njezinih atoma.

Na primjer, ako je $A = (PQ \vee \overline{P}\,\overline{R}) \to (Q \leftrightarrow R)$ analiza izgleda ovako:

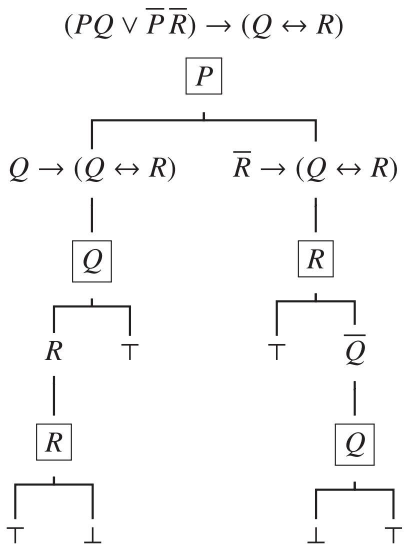
P	Q	R	PQ	$\overline{P}\,\overline{R}$	$PQ \vee \overline{P}\,\overline{R}$	$Q \leftrightarrow R$	$(PQ \vee \overline{P}\,\overline{R}) \to (Q \leftrightarrow R)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Iz takve iscrpne analize možemo izvesti razne zaključke. Da je A konzistentna (jer u nekim interpretacijama ima vrijednost $\top$), da nije valjana (jer u nekim interpretacijama ima vrijednost $\bot$) itd.

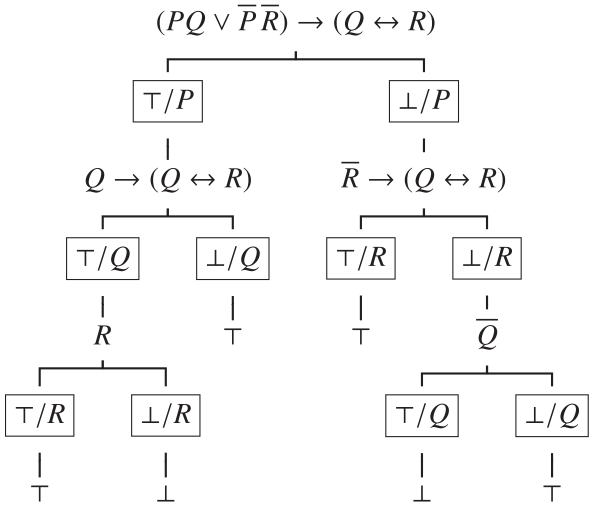
Ovaj tablični postupak je dosta spor i glomazan. Iscrpnu analizu istinosnih vrijednosti forme A možemo provesti brže i sažetije tako da vrijednosti $\top$ i $\bot$ redom supstituiramo na mjesta atoma P, Q i R, provodeći pritom simplifikacije za $\top$ i $\bot$ iz prethodnog odjeljka (v. str. 27):



Simplifikacije smo provodili jednu po jednu, no najčešće ćemo više njih provesti u jednom koraku. Uz to ubrzanje analiza je još kraća i izgleda ovako:

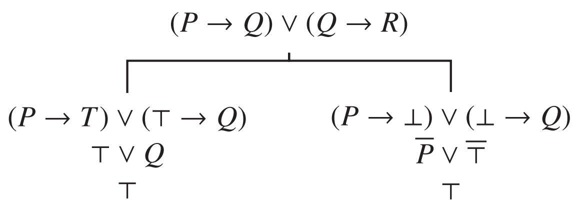


Stablo provedenih supstitucija lako se očitava iz gornje analize, a eksplicitno ispisano izgleda ovako:



Analiza istinitosnih vrijednosti omogućava da lako odredimo vrijednost forme u svakoj interpretaciji. Na primjer, u interpretaciji $(\bot, \top, \bot) = (P, Q, R)$, tj. u interpretaciji $(\bot/P)(\top/Q)(\bot/R)$ forma $(PQ \vee \overline{P}\,\overline{R}) \to (Q \leftrightarrow R)$ ima vrijednost $\bot$; dok u interpretaciji $(\top/P)(\bot/Q)$ ona ima vrijednost $\top$, bez obzira kako je interpretiran R.

Evo još jednog primjera analize istinostnih vrijednosti, bez detaljiziranja kao u prethodnom primjeru. Analiziramo formu $(P \to Q) \vee (Q \to R)$.



Možemo zaključiti da je forma $(P \to Q) \vee (Q \to R)$ neistinita samo kad je Q neistinita i P istinita. U svim drugim slučajevima ona je istinita. Također vidimo da vrijednost od $(P \to Q) \vee (Q \to R)$ uopće ne ovisi o R. (Dokažite sami da je $(P \to Q) \vee (Q \to R) \Leftrightarrow (P \to Q) \vee \overline{Q}$.)

Pri analizi istinosnih vrijednosti često se koristimo i pravilom zamjene ekvivalentnih formi iz prethodnog odjeljka (v. str. 25). Naravno, da bismo uspješno provodili zamjene ekvivalentnih formi važno je zapamtiti bar neke najjednostavnije ekvivalencije. Evo nekih koje se lako dokazuju analizom istinosnih vrijednosti (svaka forma lijevo od znaka $\Leftrightarrow$ ekvivalentna je sa svakom pojedinom formulom desno od znaka $\Leftrightarrow$):

NAJJEDNOSTAVNIJE EKVIVALENCIJE

$$A(B \vee C) \Leftrightarrow AB \vee AC \qquad A \vee BC \Leftrightarrow (A \vee B)(A \vee C)$$

$$-(AB) \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B} \qquad -(A \vee B) \Leftrightarrow \overline{A}\,\overline{B}$$

$$A \Leftrightarrow \overline{\overline{A}},\quad A \vee A,\quad A \vee AB,\quad A(A \vee B)$$

$$A \to B \Leftrightarrow \overline{A} \vee B,\quad -A\overline{B},\quad A \leftrightarrow AB,\quad (A \vee B) \leftrightarrow B$$

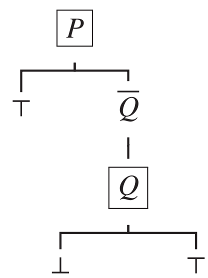
$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B)(B \to A),\quad AB \vee \overline{A}\,\overline{B}$$

$$AB \Leftrightarrow A(\overline{A} \vee B) \qquad A \vee B \Leftrightarrow A \vee \overline{A}B$$

FiXme: *lj*

Sljedećim primjerom pokazujemo kako se analiza istinosnih vrijednosti može ubrzati primjenom pravila za zamjenu ekvivalentnih formi. Analiziramo formu $(P \vee Q)(P \vee \overline{Q}) \vee \overline{P}Q \leftrightarrow PR \vee P\overline{R}$.

$$\begin{aligned}
(P \vee Q)(P \vee \overline{Q}) \vee \overline{P}Q &\leftrightarrow PR \vee P\overline{R} \\
P \vee Q\overline{Q} \vee \overline{P}Q &\leftrightarrow P(R \vee \overline{R}) \\
P \vee \bot \vee \overline{P}Q &\leftrightarrow P\top \\
P \vee \overline{P}Q &\leftrightarrow P \\
P \vee Q &\leftrightarrow P \\
Q &\to P
\end{aligned}$$



Najprije smo nizom zamjena ekvivalentnih formi zadanu formu sveli na $Q \to P$ (i tako vidjeli da ona uopće ne ovisi o R). Zatim smo proveli analizu istinosnih vrijednosti te jednostavnije forme.

Evo još jednog primjera u kojem se zamjena ekvivalentnih formi provodi u toku (a ne samo prije) analize istinosnih vrijednosti. Analiziramo formu $PQ \vee P\overline{R} \vee \overline{P}R \vee \overline{P}S \vee \overline{Q}R \vee \overline{R}\,\overline{S}$.

$$PQ \vee P\overline{R} \vee \overline{P}R \vee \overline{P}S \vee \overline{Q}R \vee \overline{R}\,\overline{S}$$

$$\boxed{P}$$

$$Q \vee \overline{R} \vee \overline{Q}R \vee \overline{R}\,\overline{S} \qquad\qquad R \vee S \vee \overline{Q}R \vee \overline{R}\,\overline{S}$$

$$Q \vee \overline{Q}R \vee \overline{R} \qquad\qquad R \vee S \vee \overline{R}\,\overline{S}$$

$$\boxed{Q} \qquad\qquad \boxed{R}$$

$$\top \quad \top \qquad\qquad \top \quad \top$$

Dakle, analizirana forma je valjana, što smo brzo i jednostavno ustanovili analizom istinosnih vrijednosti. Izračunavanje njezine tablice istinitosti bilo bi mnogo sporije i glomaznije.

Međutim, i tablični algoritam i analiza istinosnih vrijednosti imaju eksponencijalnu složenost, što znači da su računalno neupotrebljivi. (Računalno upotrebljivi algoritmi su samo oni čija je složenost polinomska.)

Što to znači, točnije ćemo objasniti pri obradi pojma izračunljivosti. Za sada možemo reći da algoritam ima polinomsku, odnosno eksponencijalnu, složenost ako je broj koraka potrebnih za analizu forme s n atoma polinom od n, odnosno eksponencijalna funkcija od n. Takve algoritme zovemo polinomskim, odnosno eksponencijalnim, algoritmima. Za polinomske se još kaže da spadaju u klasu **P**. Naravno, da bi se ova definicija mogla primjeniti potrebno je definirati što je "korak". Za sada izbrojimo koliko puta, tijekom primjene algoritma,moramo iščitavati razne ili iste forme i neka to bude broj naših koraka. U tabličnom algoritmu formu F koju analiziramo moramo iščitati u svakom redu naše tablice (jer za svaki red moramo izračunati odgovarajuću vrijednost od F), a to znači 2^n puta. Pri analizi istinosnih vrijednosti u najgorem slučaju moramo valuirati (dakle i iščitati) 2^n sve kraćih i kraćih formi. U oba slučaja složenost je eksponencijalna.

Nije poznato postoji li polinomski algoritam koji bi rješavao problem valjanosti, konzistentnosti ili implikacije IF–formi. Nalaženje takvog algoritma, ili dokazivanje da on ne postoji, jedan je od najslavnijih neriješenih problema u matematici. Taj se problem obično zove problemom ispunjivosti (konzistentnost i ispunjivost su sinonimi) i njegovo bi rješenje bilo i rješenje slavnog $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ problema o kojem će još biti riječi. Recimo samo da gotovo svi vjeruju da polinomski algoritam za ispunjivost ne postoji (što znači $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$), no nitko to još nije dokazao.

Zbog svega rečenog praktični računski značaj ima tzv. Hornov algoritam za ispitivanje konzistentnosti. On je polinomski, ali je njegova primjena ograničena samo na jednu vrstu konjunkcijskih normalnih formi, koje zovemo Hornovim formama.

HORNOVA FORMA

Hornova klauza je alternacija literala s najviše jednim pozitivnim literalom. Npr. Hornove klauze su:

$$P, \quad \overline{P} \vee Q \vee \overline{R}, \quad \overline{P} \vee \overline{Q}.$$

Lako se vidi da je svaka Hornova klauza ekvivalentna kondicionalu s konjunkcijom (jednog ili više) atoma u antecedenti i točno jednim atomom u konzekventi. Npr. gornje klauze ekvivalentne su sljedećim kondicionalima:

$$\top \rightarrow P, \quad PR \rightarrow Q, \quad PQ \rightarrow \bot.$$

Hornova forma je konjunkcija Hornovih klauza. Na primjer, Hornova forma je:

$$P(\overline{P} \vee Q \vee \overline{R})(\overline{P} \vee \overline{Q}),$$

ili u ekvivalentnom kondicionalnom obliku,

$$(\top \rightarrow P)(PR \rightarrow Q)(PQ \rightarrow \bot).$$

Je li Hornova forma konzistentna ili nije, možemo odlučiti koristeći se Hornovim algoritmom.

HORNOV ALGORITAM

U kondicionalnom obliku Hornove forme najprije zaokružujemo sve konstante $\top$, a zatim opetovano zaokružujemo one atome koji su konzekvente onih klauza u čijim su antecedentama svi atomi zaokruženi.

Kada je zaokruživanje završeno, ili je neka konstanta $\bot$ zaokružena, ili nije zaokružena nijedna.

U prvom slučaju je Hornova forma inkonzistentna, a u drugom je konzistentna.

Postupak ilustriramo na Hornovoj formi $P(\overline{R} \vee S)(\overline{P} \vee \overline{Q} \vee R)(\overline{R} \vee \overline{S})Q$. Njezin kondicionalni oblik je:

$$(\top \rightarrow P)(R \rightarrow S)(PQ \rightarrow R)(RS \rightarrow \bot)(\top \rightarrow Q).$$

Niz zaokruživanja izgleda ovako:

$$(\top \rightarrow P)(R \rightarrow S)(PQ \rightarrow R)(RS \rightarrow \bot)(\top \rightarrow Q)$$
$$(\top \rightarrow P)(R \rightarrow S)(PQ \rightarrow R)(RS \rightarrow \bot)(\top \rightarrow Q)$$
$$(\top \rightarrow P)(R \rightarrow S)(PQ \rightarrow R)(RS \rightarrow \bot)(\top \rightarrow Q)$$
$$(\top \rightarrow P)(R \rightarrow S)(PQ \rightarrow R)(RS \rightarrow \bot)(\top \rightarrow Q)$$
$$(\top \rightarrow P)(R \rightarrow S)(PQ \rightarrow R)(SR \rightarrow \bot)(\top \rightarrow Q)$$
$$(\top \rightarrow P)(R \rightarrow S)(PQ \rightarrow R)(SR \rightarrow \bot)(\top \rightarrow Q)$$
$$(\top \rightarrow P)(R \rightarrow S)(PQ \rightarrow R)(SR \rightarrow \bot)(\top \rightarrow Q)$$

$$((\top \to P)(R \to S)(P Q \to R)(S R \to \bot)(\top \to Q))$$

Konstanta $\bot$ je zaokružena što znači da je zadana forma inkonzistentna.

Naravno, formu obično ne prepisujemo nego sva zaokruživanja obavljamo na početnom primjerku. To ćemo ilustrirati na formi $P(\overline{P} \vee \overline{Q} \vee R)(\overline{Q} \vee S)(\overline{R} \vee \overline{S})$, čiji kondicionalni oblik poslije svih mogućih zaokruživanja izgleda ovako:

$$((\top \to P)(P Q \to R)(Q \to S)(RS \to \bot)$$

Konstanta $\bot$ nije zokružena, što znači da je forma konzistentna.

Hornov algoritam za konzistentnost je korektan, tj. ako algoritam utvrdi da je forma konzistentna onda ona to i je. Pretpostavimo, naime, da je zaokruživanje Hornove forme H završilo i da nijedan $\bot$ nije zaokružen. Tada je H konzistentna jer je istinitom čini interpretacija u kojoj je $\mathbf{int}(P) = \top$ akko je P zaokružen. Naime, u toj interpretaciji svaka je klauza forme H istinita, jer je klauza oblika $A \cdots B \to C$ neistinita akko su svi $A, \ldots, B$ istiniti (tj. zaokruženi), a samo C je neistinita (tj. nezaokružena). No, to nije moguće prema Hornovom algoritmu.

Hornov algoritam za konzistentnost je i potpun, tj. ako je forma konzistentna algoritam će to i utvrditi. Pretpostavimo, naime, da postoji interpretacija koja sve klauze Hornove forme H čini istinitima. Onda ta interpretacija sve zaokružene atome čini istinitima, jer iz istinitosti kondicionala i njegove antecedente slijedi i istinitost njegove konzekvente. No, to znači da nijedan $\bot$ nije zaokružen, tj. algoritam pokazuje da je forma konzistentna.

Možemo zaključiti da Hornov algoritam radi. Njegova dodatna prednost je da radi u malom broju koraka. Pokazat ćemo da za formu s n atoma on završi u manje od $n + 2$ koraka (što znači da je polinomski). Izbrojimo, dakle, koliko puta moramo iščitavati Hornovu formu H do završetka rada algoritma. Prvi put je iščitamo zaokružujući konstante $\top$. Drugi put je iščitavamo tražeći klauze oblika $A \cdots B \to C$ u kojima su svi $A, \ldots, B$ zaokruženi i usput zaokružujemo odgovarajući C. Kod svakog novog zaokruživanja taj postupak moramo ponoviti. No atoma ima n pa tih ponavljanja nema više od n. Na kraju formu još jednom iščitavamo gledajući ima li zaokruženih konstanti $\bot$. To je ukupno manje od $1 + n + 1 = n + 2$ iščitavanja.

Zbog svojeg polinomskog karaktera Hornov algoritam, iako ograničenog dosega, nalazi mnoge primjene. Između ostalog je u temelju programskog jezika PROLOG, inače bliskog DATALOG-u.

2.8 Dualnost i rezolucija

Dvije forme čije se tablice istinosnih vrijednosti transformiraju jedna u drugu međusobnom zamjenom vrijednosti $\top$ i $\bot$ zovemo međusobno dualnim formama.

DUALNA FORMA

Dualna forma forme A je forma $d(A)$ čija se tablica istinitosti može dobiti iz tablice od A međusobnom zamjenom vrijednosti $\top$ i $\bot$ u cijeloj tablici.

Očito je i A dualna forma od $d(A)$, tj. $d(d(A)) = A$.

Osnovni primjer dualnih formi su konjunkcija $A \wedge B$ i alternacija $A \vee B$. Dakle, $d(A \wedge B) = A \vee B$ i $d(A \vee B) = A \wedge B$.

A	B	$A \wedge B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

A	B	$A \vee B$
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$

(Međusobnu zamjenu vrijednosti $\top$ i $\bot$ provodimo u cijeloj tablici, a ne samo u zadnjem stupcu, jer bismo inače dobili negiranu, a ne dualnu formu.)

Vizualno upečatljiviji način da dođemo do dualne forme jest da zrcalimo njenu tablicu istinitosti tako da svaki $\top$ pređe u $\bot$ i obratno. Za konjunkciju i alternaciju to izgleda ovako:

H	O	H $\wedge$ O
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

- ZRCALO

$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$
H	O	H $\vee$ O

Primjetimo da se **gledano od vrha stranice prema dnu** raspored istinosnih vrijednosti komponenata ne mijenja, dok su vrijednosti u zadnjem stupcu zrcaljene i zatim poredane u obrnutom smjeru, kraće ćemo reći "dvostruko invertirane". Dakle umjesto međusobne zamjene vrijednosti $\top$ i $\bot$ u cijeloj tablici do duala možemo doći dvostrukim invertiranjem zadnjeg stupca.

P	Q	R	$F(P, Q, R)$	$dF(P, Q, R)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

Odavde odmah slijedi da su P i $\overline{P}$ samodualne forme, tj. $d(P) = P$ i $d(\overline{P}) = \overline{P}$.

Dualnost konjunkcije i alternacije evidentna je (bez poziva na tablice) već iz verbalnih opisa konjunkcije i alternacije:

Konjunkcija ima vrijednost $\top$ kada sve njene komponente imaju vrijednost $\top$, a inače ima vrijednost $\bot$.

Alternacija ima vrijednost $\perp$ kada sve njene komponente imaju vrijednost $\perp$, a inače ima vrijednost $\top$.

Jedina je razlika u međusobnoj zamjeni vrijednosti $\top$ i $\perp$, što znači da su konjunkcija i alternacija međusobno dualne. Slično vrijedi i za negaciju:

Negacija forme ima vrijednost $\top$ ili $\perp$ ako sama forma ima vrijednost $\top$ odnosno $\perp$.

Ako međusobno zamjenimo vrijednosti $\top$ i $\perp$ dobijemo isto, što znači da je negacija sama sebi dualna.

Nešto općenitiji argument vodi nas do 1. zakona dualnosti. Zamislimo formu F izgrađenu samo uz pomoć veznika $\wedge$, $\vee$ i $-$. Pretpostavimo da je forma F' izgrađena na isti način osim što su veznici $\wedge$ i $\vee$ svugdje zamjenjeni. Tada računanje istinosnih vrijednosti od F i F' mora izgledati potpuno isto kada se međusobno zamjene $\top$ i $\perp$. No, to znači da su F i F' duali.

1. ZAKON DUALNOSTI

Dual forme izgrađene pomoću veznika $\wedge$, $\vee$ i $-$ dobija se međusobnom zamjenom veznika $\wedge$ i $\vee$.

Dualnost formi $P \wedge Q$ i $P \vee Q$ te samodualnost forme $\overline{P}$ posebni su primjeri 1. zakona. No, uz njegovu pomoć lako nalazimo i mnoge druge, npr.

$$d(\overline{P} \wedge (Q \vee \overline{R})) = \overline{P} \vee (Q \wedge R)$$
$$d(P\overline{Q} \vee \overline{P}R) = (P \vee \overline{Q})(\overline{P} \vee R)$$
$$d(PQ \vee QR \vee PR) = (P \vee Q)(Q \vee R)(P \vee R)$$

Zadnji primjer je primjer samodualnosti jer je $PQ \vee QR \vee PR \Leftrightarrow (P \vee Q)(Q \vee R)(P \vee R)$, što se lako provjerava.

Zamjena $\wedge$ i $\vee$ nije jedini način formiranja duala. Drugi način, koji čak ne zahtjeva da je forma izgrađena samo pomoću $\wedge$, $\vee$ i $-$, opisuje 2. zakon dualnosti.

2. ZAKON DUALNOSTI

Dual forme dobije se tako da se negira svaki njen atom, a zatim i cijela tako dobivena forma.

Zakon je očita posljedica originalne definicije; negiranje atoma znači izmjenu $\top$ i $\perp$ u svim stupcima ispod atoma, a negiranje cijele forme izmjenu $\top$ i $\perp$ u zadnjem stupcu.

De Morganovi zakoni zapravo su zakoni dualnosti koji slijede neposredno iz 1. i 2. zakona. Dual od $P \wedge Q \wedge \ldots \wedge R$ je $P \vee Q \vee \ldots \vee R$ po 1. zakonu, ali i $-(\overline{P} \wedge \overline{Q} \wedge \ldots \wedge \overline{R})$ po 2. zakonu. Dakle, $-(P \vee Q \vee \ldots \vee R) \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q} \wedge \ldots \wedge \overline{R}$. Na isti način dokazuje se i $-(P \wedge Q \wedge \ldots \wedge R) \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q} \vee \ldots \vee \overline{R}$.

Treći zakon govori o vezi dualnosti s valjanošću, implikacijom i ekvivalencijom.

3. ZAKON DUALNOSTI

$$
\begin{array}{rrcl}
(1) & \Box A & \text{akko} & \not\Diamond\, d(A) \\
(2) & A \Rightarrow B & \text{akko} & d(B) \Rightarrow d(A) \\
(3) & A \Leftrightarrow B & \text{akko} & d(A) \Leftrightarrow d(B)
\end{array}
$$

Prvi dio slijedi iz metode "dvostrukog invertiranja" zadnjeg stupca. Drugi dio slijedi iz "zrcalnog" razumijevanja dualnosti. Naime, ako u zajedničkoj tablici istinitosti za A i B postoji redak u kojem je $A = \top$ i $B = \bot$ (tj. $A \not\Rightarrow B$) onda u "zrcalnoj" tablici postoji redak u kojem je $d(A) = \bot$ i $d(B) = \top$ (tj. $d(B) \not\Rightarrow d(A)$), i obratno. Treći dio slijedi iz drugog, jer je $A \Leftrightarrow B$ akko $A \Rightarrow B$ i $B \Rightarrow A$.

Treći zakon dualnosti omogućuje da iz dokazanih valjanosti, inkonzistentnosti, implikacija ili ekvivalencija izvedemo daljnje inkonzistentnosti, valjanosti, implikacije ili ekvivalencije. Na primjer, lako je dokazati da
$(P \vee \overline{Q})(Q \vee \overline{R})(R \vee S) \Rightarrow P \vee S$.

Naime, $P \vee S = \bot$ akko $P = \bot$ i $S = \bot$. U tom slučaju je i

$$\begin{aligned}(P \vee \overline{Q})(Q \vee \overline{R})(R \vee S) = (\bot \vee \overline{Q})(Q \vee \overline{R})(R \vee \bot) &\Leftrightarrow \overline{Q}(Q \vee \overline{R})R \\ &\Leftrightarrow (\overline{Q}Q \vee \overline{Q}\,\overline{R})R \Leftrightarrow (\bot \vee \overline{Q}\,\overline{R})R \Leftrightarrow \overline{Q}\,\overline{R}R \\ &\Leftrightarrow \bot\end{aligned}$$

što znači da $(P \vee \overline{Q})(Q \vee \overline{R})(R \vee S) \Rightarrow P \vee S$. Po 3. zakonu, bez daljnje analize, odmah zaključujemo da $PS \Rightarrow P\overline{Q} \vee Q\overline{R} \vee RS$. Slično možemo zaključiti da oba De Morganova zakona:

$$-(P \vee Q \vee \ldots \vee R) \Leftrightarrow \overline{PQ} \ldots \overline{R} \qquad -(PQ \cdots R) \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{R} \vee \ldots \overline{R}$$

slijede jedan iz drugoga, ili da oba zakona distributivnosti:

$$P \vee (QR \cdots S) \Leftrightarrow (P \vee Q)(P \vee R) \cdots (P \vee S) \qquad P(Q \vee R \vee \ldots \vee S) \Leftrightarrow PQ \vee PR \vee \ldots \vee PS$$

slijede jedan iz drugoga.

Još zanimljiviji je slučaj (tzv. definicijskih) implikacija za konjunkciju:

$$A \Rightarrow B \wedge C \text{ akko } A \Rightarrow B \text{ i } A \Rightarrow C.$$

Iz njih, prema 3. zakonu, odmah slijede (tzv. definicijske) implikacije za alternaciju:

$$d(B) \vee d(C) \Rightarrow d(A) \text{ akko } d(B) \Rightarrow d(A) \text{ i } d(C) \Rightarrow d(A).$$

Forme A, B i C su bile proizvoljne (dakle mogle su biti i $d(A)$, $d(B)$ i $d(C)$) pa konačno imamo

$$B \vee C \Rightarrow A \text{ akko } B \Rightarrow A \text{ i } C \Rightarrow A.$$

Naravno, vrijedi i obratno; iz definicijskih implikacija za alternaciju slijede i one za konjunkciju.

U odjeljku 2.1 vidjeli smo da je svaka IF–forma ekvivalentna nekoj AN formi i nekoj KN formi (alternacijskoj odnosno konjunkcijskoj normalnoj formi). Te dvije forme, budući da su ekvivalentne, najčešće nisu međusobno dualne (osim u rijetkom slučaju samodualnosti). Vidjeli smo, također, kako se iz tablice istinitosti forme F može iščitati njena potpuna AN i KN forma. To ilustriramo na primjeru forme $F = (P \vee Q) \to PQ$.

P	Q	$P \vee Q \to P\overline{Q}$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Forma F je istinita samo ako smo u 2. ili 4. redu, tj. akko $P\overline{Q} \vee \overline{P}\,\overline{Q}$. To je potpuna AN forma od F.

Ekvivalentno, forma F je istinita samo ako nismo u 1. i 3. redu, tj. akko $-(P\overline{Q}) - (\overline{P}Q)$, što je ekvivalentno s $(\overline{P} \vee \overline{Q})(P \vee \overline{Q})$. Zadnja forma je potpuna KN forma forme F.

Osim ovom tabličnom metodom, do AN i KN formi zadane forme možemo doći i uporabom DeMorganovih pravila i pravila distributivnosti, u sljedeća tri koraka:

1. Iz forme F eliminiramo sve IF–veznike osim $\wedge$, $\vee$ i $-$ (npr. $A \to B$ zamjenimo s $\overline{A} \vee B$ ili $-(A\overline{B})$; $A \leftrightarrow B$ zamjenimo s $AB \vee \overline{A}\,\overline{B}$ ili $-(A\overline{B}) - (\overline{A}B)$ itd.).
2. Upotrebom De Morganovih zakona $-(A \cdots B) \Leftrightarrow \overline{A} \vee \ldots \vee \overline{B}$ i $-(A \vee \ldots \vee B) \Leftrightarrow \overline{A} \cdots \overline{B}$ formu dovedemo u oblik u kojem su negirani samo atomi.

(3A) Upotrebom distributivnosti konjunkcije, $A(B \vee \ldots \vee C) \Leftrightarrow AB \vee \ldots AC$, formu F konačno dovodimo u AN oblik.

(3K) Upotrebom distributivnosti alternacije, $A \vee (B \cdots C) \Leftrightarrow (A \vee B) \cdots (A \vee C)$, formu F konačno dovodimo u KN oblik.

Ako želimo doći do potpunih AN i KN formi (koje u svakom bloku sadrže sve svoje atome; vidi 2.1) primjenit ćemo još i četvrti korak.

(4PA) Svaki konjunktivni blok koji ne sadrži neki atom, npr. P, $\wedge$-množimo s $P \vee \overline{P}$.

(4PK) Svaki alternacijski blok koji ne sadrži neki atom, npr. P, $\vee$-množimo s $P\overline{P}$.

Postupak ilustriramo izvođenjem PAN i PKN forme od $(P \vee Q) \to P\overline{Q}$.

$$
\begin{array}{rll}
(1) & -(P \vee Q) \vee P\overline{Q} & \\
(2) & \overline{P}\,\overline{Q} \vee P\overline{Q} & \text{(To je već PAN forma.)} \\
(3K) & (\overline{P} \vee P)(\overline{P} \vee \overline{Q})(\overline{Q} \vee P)(\overline{Q} \vee \overline{Q}) & \\
 & \top(\overline{P} \vee \overline{Q})(\overline{Q} \vee P)\overline{Q} & \\
 & (\overline{P} \vee \overline{Q})(\overline{Q} \vee P)\overline{Q} & \text{(To je KN forma.)} \\
(4PK) & (\overline{P} \vee \overline{Q})(\overline{Q} \vee P)(\overline{Q} \vee (P\overline{P})) & \\
 & (\overline{P} \vee \overline{Q})(\overline{Q} \vee P)(\overline{Q} \vee P)(\overline{Q} \vee \overline{P}) & \\
 & (\overline{P} \vee \overline{Q})(\overline{Q} \vee P) & \text{(To je PKN forma.)}
\end{array}
$$

Rezultat se, naravno, poklapa s onim koji smo dobili tabličnom metodom.

U računarstvu se KN forme tretiraju kao skupovi skupova literala. Na primjer,

$$(\overline{P} \vee \overline{Q})(\overline{Q} \vee P) = \{\{\overline{P}, \overline{Q}\}, \{P, \overline{Q}\}\}.$$

U vezi s tim uvodimo sljedeće termine i oznake. Konačne skupove literala zvat ćemo **klauzama** i označavati ih pisanim slovima. Na primjer:

$$\mathcal{L} = \{\overline{P}, Q, \overline{R}\}, \quad \mathcal{M} = \{P, R, S, \overline{Q}\}$$

su klauze. Klauzu zovemo **trivijalnom** ako ona sadrži i atom i njegovu negaciju. Na primjer:

$$\{P, \overline{Q}, S, Q\} \quad \text{je trivijalna klauza.}$$

Za klauzu kažemo da je klauza za forme $A, \ldots, C$ ako sadrži samo atome iz $A, \ldots, C$. Na primjer:

$$\{P, \overline{Q}, R\} \quad \text{je klauza za } P,\ Q \vee S,\ \overline{R}.$$

Za klauzu kažemo da je potpuna za $A, \ldots, C$ ako sadrže sve atome iz $A, \ldots C$. Na primjer:

$$\{\overline{P}, Q, R, \overline{S}\} \quad \text{je potpuna za } P,\ Q \vee S,\ \overline{R}.$$

Ako je $\mathcal{L}$ klauza onda s $\overline{\mathcal{L}}$ označavamo klauzu koja sadrži negirane literale iz $\mathcal{L}$. (Dakle, $\overline{\overline{\mathcal{L}}}$ je očito $\mathcal{L}$.) Na primjer:

$$\mathcal{L} = \{P, \overline{Q}, R\} \quad \text{daje} \quad \overline{\mathcal{L}} = \{\overline{P}, Q, \overline{R}\}.$$

Ako je $\mathcal{L}$ klauza, onda s $\mathcal{L}^{\vee}$, odnosno $\mathcal{L}^{\wedge}$, označavamo *formulu* koja je alternacija, odnosno konjunkcija, svih literala iz $\mathcal{L}$. Na primjer:

$$\mathcal{L} = \{P, \overline{Q}, R\} \quad \text{daje} \quad \mathcal{L}^{\vee} = P \vee \overline{Q} \vee R, \text{ i } \quad \mathcal{L}^{\wedge} = P\overline{Q}R.$$

Uz ove oznake lako vidimo da za svaku formu G vrijedi:

$$\mathrm{AN}(G) = \mathcal{L}^{\wedge} \vee \ldots \vee \mathcal{M}^{\wedge} \Leftrightarrow \mathrm{KN}(d(G)) = \mathcal{L}^{\vee} \wedge \ldots \wedge \mathcal{M}^{\vee}.$$

To je neposredna posljedica 1. i 3. zakona dualnosti, koju možemo izreći i ovako:

$$d(\mathrm{AN}(G)) = \mathrm{KN}(d(G)) \quad d(\mathrm{KN}(G)) = \mathrm{AN}(d(G)).$$

(Slobodnije kazano, d "prolazi" kroz AN i KN tako da ih "pretvara" jednog u drugi.)

Iz DeMorganovih zakona i 3. zakona dualnosti slijedi:

$$\mathrm{AN}(G) = \mathcal{L}^{\wedge} \vee \ldots \vee \mathcal{M}^{\wedge} \Leftrightarrow \mathrm{KN}(-G) = \overline{\mathcal{L}}^{\vee} \wedge \ldots \wedge \overline{\mathcal{M}}^{\vee}.$$

To možemo izreći i ovako:

$$-\mathrm{AN}(G) = \mathrm{KN}(-G) \quad -\mathrm{KN}(G) = \mathrm{AN}(-G).$$

(Slobodnije kazano, negacija "prolazi" kroz AN i KN tako da ih "pretvara" jednog u drugi.)

Za potpune normalne forme vrijedi sljedeće:

$$\mathrm{PAN}(G) = \mathcal{L}^{\wedge} \vee \ldots \vee \mathcal{K}^{\wedge}, \quad \mathrm{PKN}(G) = \mathcal{M}^{\vee} \wedge \ldots \wedge \mathcal{N}^{\vee} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{\{\mathcal{L}, \ldots, \mathcal{K}\}, \{\overline{\mathcal{M}}, \ldots, \overline{\mathcal{N}}\}\} \quad \text{je particija skupa svih potpunih klauza za } G.$$

Vrijedi i obrat, u sljedećem obliku:

$$\{\{\mathcal{L}, \ldots, \mathcal{K}\}, \{\mathcal{M}, \ldots, \mathcal{N}\}\} \quad \text{je particija skupa svih potpunih klauza za konačan skup atoma} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathcal{L} \vee \ldots \vee \mathcal{K}^{\wedge} \text{ i } \overline{\mathcal{M}}^{\vee} \wedge \ldots \wedge \overline{\mathcal{N}}^{\vee} \quad \text{su PANF i PKNF iste forme.}$$

Obje tvrdnje trivijalno slijede iz tabličnog postupka za nalaženje PAN i PKN forme (vidi gornji primjer i 2.1). Dakle, ako znamo PAN formu neke forme odmah možemo ispisati i njezinu PKN formu. Na primjer, PKN forma od $P\overline{Q} \vee \overline{P}Q \vee \overline{P}\,\overline{Q}$ je $\overline{P} \vee \overline{Q}$; a od $P\overline{Q} \vee \overline{P}\,\overline{Q}$ je $(\overline{P} \wedge \overline{Q})(P \wedge \overline{Q})$.

Identifikacija KN forme s odgovarajućim skupom klauza:

$$\mathcal{L}^{\vee} \wedge \ldots \wedge \mathcal{K}^{\vee} = \{\mathcal{L}, \ldots, \mathcal{K}\}$$

koristi se u postupku rezolucije, koji je jedan od temelja programskog jezika OTTER. Inače, to je postupak odluke za konzistentnost. Za IF–forme definira se na sljedeći način.

theorem-p
do
programsk
sm
nasl

REZOLUCIJA

Je li IF–forma konzistentna odlučujemo tako da je najprije prevedemo u KN-formu $F = \{\mathcal{L}, \ldots, \mathcal{K}\}$ (uz pomoć ranije opisanog postupka; tj. u tri koraka (1), (2) i (3K)).

Zatim, polazeći od klauza iz F (s ciljem izvođenja praznog skupa $\emptyset$), primjenjujemo pravilo rezolucije:

$$\frac{\mathcal{M}, A \qquad \mathcal{N}, \overline{A}}{\mathcal{M}, \mathcal{N}}$$

(Klauzu $\mathcal{M}, \mathcal{N} = \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ zovemo **rezolventom** klauza $\mathcal{M}, A = \mathcal{M} \cup \{A\}$ i $\mathcal{N}, \overline{A} = \mathcal{N} \cup \{\overline{A}\}$.)
Ako dođemo do praznog skupa $\emptyset$ početna forma je inkonzistentna.

Postupak ilustriramo s KN formom $F = \{\{P, Q, \overline{R}\}, \{\overline{P}\}, \{P, Q, R\}, \{P, \overline{Q}\}\}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
P, Q, \overline{R} & & P, Q, R & & & & \\
& P, Q & & & P, \overline{Q} & & \\
& & & P & & \overline{P} & \\
& & & & \emptyset & &
\end{array}$$

Dakle, F je inkonzistentna forma.

Rezolucija je korektna, jer iz istinitosti od $\mathcal{M}^{\vee} \vee A$ i $\mathcal{N}^{\vee} \vee \overline{A}$ slijedi istinitost od $\mathcal{M}^{\vee} \vee \mathcal{N}^{\vee}$. No, ako iz F, primjenom pravila koje čuva istinitost, možemo izvesti $\emptyset$ (tj. kontradikciju P i $\overline{P}$, za neki atom P) onda je F inkonzistentna forma.

Rezolucija je i potpuna, tj. iz svake inkonzistentne forme F rezolucijom se može izvesti $\emptyset$. To dokazujemo indukcijom po broju atoma u KN formi F. (Pretpostavit ćemo da KN forme ne sadrže trivijalne klauze s P i $\overline{P}$, jer su takve klauze ekvivalentne s $\top$ pa njihovim izbacivanjem dobivamo ekvivalentne KN forme.)

Ako je broj atoma $n = 1$ onda je $F \subseteq \{\{P_1\}, \{\overline{P}_1\}, \{P_1, \overline{P}_1\}\}$. Jedini takav inkonzistentni F je $\{\{P_1\}, \{\overline{P}_1\}\}$, a iz njega odmah slijedi $\emptyset$.

Pretpostavimo, nadalje, da smo za svaki inkonzistentni F s $n - 1$ atomom dokazali da iz njega rezolucijom slijedi $\emptyset$. Dokazat ćemo da onda to isto vrijedi i za inkonzistentni F s n atoma. Neka je, dakle, F inkonzistentna forma s n atoma $P_1, \ldots, P_n$. Uočimo najprije jednostavnu ekvivalenciju:

$$F \Leftrightarrow F(\top/P_n) \vee F(\bot/P_n),$$

i isto tako jednostavnu činjenicu da je alternacija inkonzistentna akko su to i oba alternanta. Dakle, $F(\top/P_n)$ i $F(\bot/P_n)$ su inkonzistentne KN forme.

Ako neka klauza u KN formi sadrži $\top$, onda je ta klauza ekvivalentna s $\top$ (jer je $A \vee \top \Leftrightarrow \top$), pa se izbacivanjem te klauze ništa ne mijenja, tj. dolazimo do ekvivalentne KN forme (jer je $A \wedge \top \Leftrightarrow A$).

Ako neka klauza u KN formi sadrži $\bot$, onda se izbacivanjem tog $\bot$ ništa ne mijenja (jer je $A \vee \bot \Leftrightarrow A$).

To znači da su $F(\top/P_n)$ i $F(\perp/P_n)$ ekvivalentne formama F_+ i F_- do kojih možemo doći u dva koraka:

$$F \xrightarrow{\text{izbaci sve klauze s } P_n} F_{1+} \xrightarrow{\text{izbaci sve } \overline{P}_n \text{ iz klauza}} F_+$$

$$F \xrightarrow{\text{izbaci sve klauze s } \overline{P}_n} F_{1-} \xrightarrow{\text{izbaci sve } P_n \text{ iz klauza}} F_-$$

Kao što smo već utvrdili:

$$F(\top/P_n) \Leftrightarrow F_{1+} \Leftrightarrow F_+ \quad F(\perp/P_n) \Leftrightarrow F_{1-} \Leftrightarrow F_-.$$

Osim toga očito je da vrijedi:

$$F = F_{1+} \cup F_{1-}$$

(jer naša KN forma ne sadrži trivijalne klauze s P i $\overline{P}$).

Sada konačno možemo dokazati da se iz F može izvesti $\emptyset$. Po pretpostavci indukcije $\emptyset$ je izvedivo iz inkonzistentnih F_+ i F_-. No, onda je iz F_{1+} izvedivo $\emptyset$ ili P_n, a iz F_- je izvedivo $\emptyset$ ili $\overline{P}_n$. Budući da je $F = F_{1+} \cup F_{1-}$, slijedi da je iz F izvedivo $\emptyset$, ili P_n i $\overline{P}_n$, iz kojih je opet izvedivo $\emptyset$. Dakle, iz F je izvedivo $\emptyset$, što smo trebali dokazati.

2.9 Semantička stabla

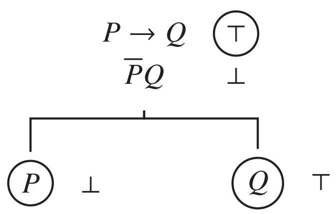
Analiza istinosnih vrijednosti neke forme, kao i njezina tablica istinitosti, daje iscrpnu informaciju o vrijednosti istinitosti te forme u svakoj interpretaciji. Metoda semantičkih stabala nije u tom smislu iscrpna. Tom metodom pokušavamo naći bar jednu interpretaciju u kojoj forma ima zadanu vrijednost ili, nešto općenitije, u kojoj sve forme skupa Γ imaju vrijednost $\top$, a sve forme iz skupa Δ vrijednost $\perp$. To znači da pokušavamo naći bar jednu interpretaciju koja potvrđuje da $\Gamma \not\models \Delta$.

Prije strogog definiranja metode ilustrirat ćemo je s par primjera. Pokušajmo, dakle, naći interpretaciju koja $P \to Q$ vrednuje s $\top$ i $\overline{P}Q$ vrednuje s $\perp$. To je interpretacija koja potvrđuje da $P \to Q \not\models \overline{P}Q$.

Polazimo od postavljenih zahtjeva:

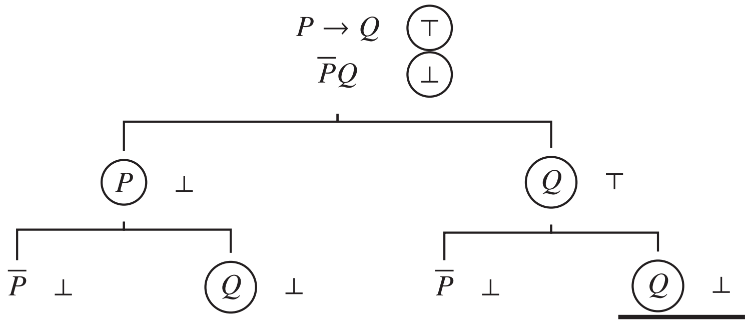
$$\begin{array}{cc} P \to Q & \top \\ \overline{P}Q & \perp \end{array}$$

Prvi zahtjev, $P \to Q$ $\top$, može se ostvariti na dva načina, tako da P bude $\perp$ ili da Q bude $\top$:



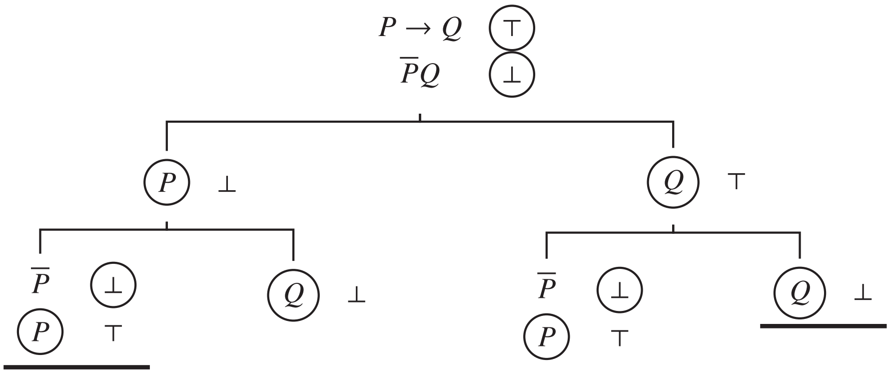
To da smo zahtjev $P \to Q$ $\top$ analizirali označili smo zaokruživanjem zahtjevane vrijednosti. Dvije alternative za ostvarenje tog zahtjeva postale su dvije grane našeg semantičkog stabla. Zaokruživanje atoma P i Q znači da su to konačni zahtjevi koji određuju interpretaciju (i koji se dalje ne mogu analizirati).

Ostao je još zahtjev $\overline{P}Q$ $\perp$, koji se može ostvariti na dva načina, tako da $\overline{P}$ bude $\perp$ ili da Q bude $\perp$:



Zahtjev $\overline{P}Q$ $\perp$ nalazi se na obje grane, pa se one obje razvijaju u po dvije alternative koje ga ostvaruju. Tako smo dobili ukupno četiri alternative (tj. četiri grane) za ispunjenje početnih zahtjeva. Četvrta alternativa (tj. četvrta grana) sadrži kontradiktorne zahtjeve da Q bude $\top$ i $\perp$. Ona nije moguća što označavamo crtom ispod te grane i tu granu zovemo zatvorenom.

Na kraju je ostao još jedan zahtjev, $\overline{P}$ $\perp$, koji se ostvaruje samo na jedan način, P $\top$:

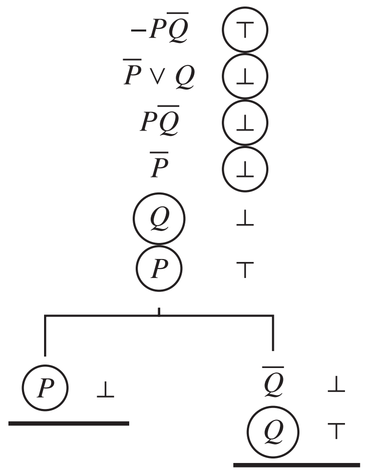


Stablo je potpuno razvijeno jer više nema zahtjeva koje bi trebalo ispuniti (svi su zahtjevi zaokruženi). Od četiri grane dvije su se zatvorile, jer su na njima kontradiktorni zahtjevi. No, dvije su ostale otvorene i sa svake od njih možemo očitati interpretaciju koja ispunjava početne zahtjeve, da $P \to Q$ bude $\top$ i da $\overline{P}Q$ bude $\perp$. To su $(P, Q) = (\perp, \top)$ s druge grane i $(P, Q) = (\top, \top)$ s treće. Svaka od njih dokazuje da $P \to Q \not\models \overline{P}Q$.

Sljedeći primjer u kojem nećemo detaljno obrazlagati svaki korak, ilustrira situaciju u kojoj nije moguće ispuniti početne zahtjeve koji bi potvrdili da $\Gamma \not\models \Delta$. No, time će biti potvrđeno da $\Gamma \models \Delta$.

Pokušajmo, dakle, naći interpretaciju u kojoj bi $-PQ$ bilo $\top$, dok bi $\overline{P} \vee Q$ bilo $\perp$. Ta bi interpretacija potvrdila da

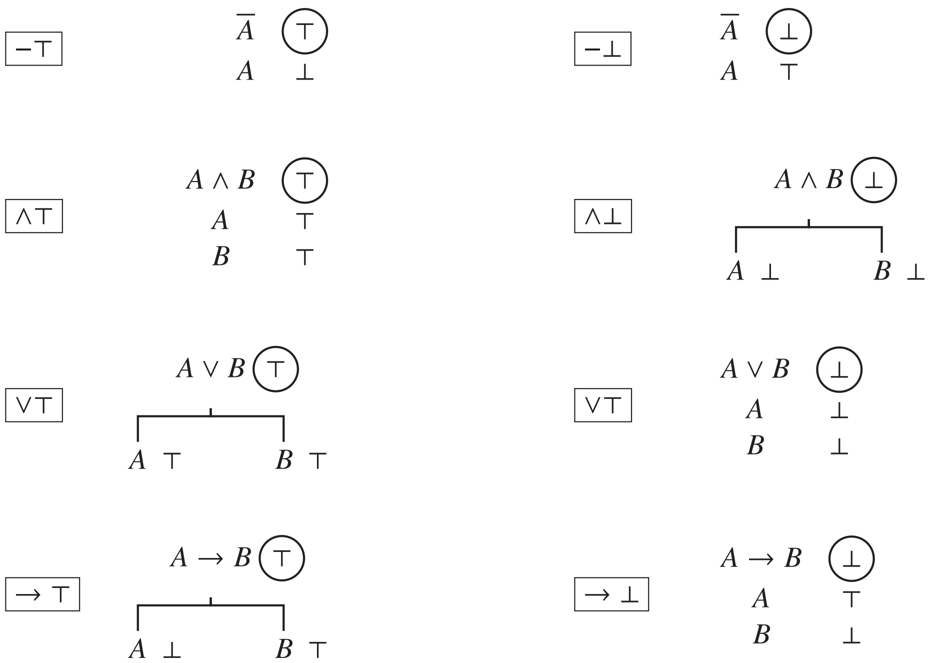
$-PQ \not\models P \vee Q$.



Sve su se grane zatvorile, što znači da nema interpretacije koja bi potvrdila da $-PQ \not\models P \vee Q$. To znači da $-PQ \models P \vee Q$.

Upoznavši se preko ovih primjera s osnovnom idejom semantičkih stabala, sada ih možemo i precizno definirati. Počnimo najprije s pravilima koja koristimo pri izgradnji semantičkih stabala. Svaki IF–veznik ima jedno pravilo, koje određuje kad je forma izgrađena pomoću tog veznika istinita, i drugo koje određuje kada je ona neistinita. Za $-$, $\wedge$, $\vee$ i $\rightarrow$ pravila su sljedeća.

SEMANTIČKA IF-PRAVILA



Pravila možemo izvesti i za bilo koji drugi IF–veznik, iako smo se mi ograničili na standardni skup $\{-, \wedge, \vee, \rightarrow\}$. Na primjer, pravila za $\leftrightarrow$ izgledaju ovako:

$$\boxed{\leftrightarrow \top} \qquad \begin{array}{ccc} & A \leftrightarrow B \ \top & \\ A \ \top & & A \ \bot \\ B \ \top & & B \ \bot \end{array} \qquad\qquad \boxed{\leftrightarrow \bot} \qquad \begin{array}{ccc} & A \leftrightarrow B \ \bot & \\ A \ \top & & A \ \bot \\ B \ \bot & & B \ \top \end{array}$$

Ili, promotrimo slučaj ne tako uobičajenog veznika $\nleftarrow$ zadanog sljedećom tablicom:

A	B	$A \nleftarrow B$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Iz tablice vidimo da je jedini način da $A \nleftarrow B$ bude $\top$ taj da A bude $\bot$ i da B bude $\top$. To jednoznačno određuje ($\nleftarrow \top$) pravilo. S druge strane, postoje tri alternative u kojima je $A \nleftarrow B \ \bot$, pa bi mogli očekivati da ($\nleftarrow \bot$) vodi na tri grane (što je sasvim u redu). No, te tri alternative mogu se svesti i na dvije: A je $\top$ ili je B $\bot$. Dakle, pravila za $\nleftarrow$ su:

$$\boxed{\nleftarrow \top} \qquad \begin{array}{cc} A \nleftarrow B & \top \\ A & \bot \\ B & \top \end{array} \qquad\qquad \boxed{\nleftarrow \bot} \qquad \begin{array}{ccc} & A \nleftarrow B \ \bot & \\ A \ \top & & B \ \bot \end{array}$$

Dalje se time nećemo baviti, ali očito je kako se za svaki IF–veznik mogu formulirati odgovarajuća semantička pravila.

Sada možemo definirati i pojam semantičkog stabla za $\Gamma \not\models \Delta$.

SEMANTIČKO IF–STABLO

Formule oblika $A \ \top$ ili $A \ \bot$, gdje je A IF–forma, zovemo označenim IF–formama ili IF–zahtjevima. Ako je Γ skup IF–formi onda s $\Gamma \ \top$ i $\Gamma \ \bot$ označavamo odgovarajuće skupove označenih formi (forme u $\Gamma \ \top$ označene su s $\top$, a one u $\Gamma \ \bot$ s $\bot$). U daljnjem pretpostavljamo da su skupovi formi konačni.

Stablo IF–zahtjeva koje počinje nizom svih zahtjeva iz $\Gamma \ \top$ i $\Delta \ \bot$, a čiji je svaki sljedeći zahtjev Z posljedica primjene nekog semantičkog IF–pravila na neki zahtjev koji u stablu prethodi zahtjevu Z, zovemo semantičkim IF-stablom za $\Gamma \not\models \Delta$.

Grana semantičkog stabla nije potpuno razvijena ako na njoj postoji zahtjev na koji nije primjenjeno semantičko pravilo. Ako na grani nema takvih zatjeva onda je ona potpuno razvijena.

Grana je zatvorena ako se na njoj pojavljuju kontradiktorni zahtjevi $A \ \top$ i $A \ \bot$. Inače je otvorena.

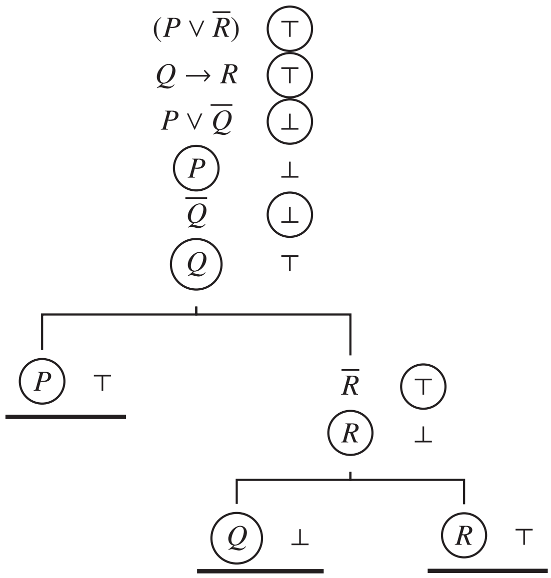
Grana je završena ako je potpuno razvijena ili zatvorena.

Stablo je završeno ako su mu sve grane završene.

Stablo je zatvoreno ako su mu sve grane zatvorene.

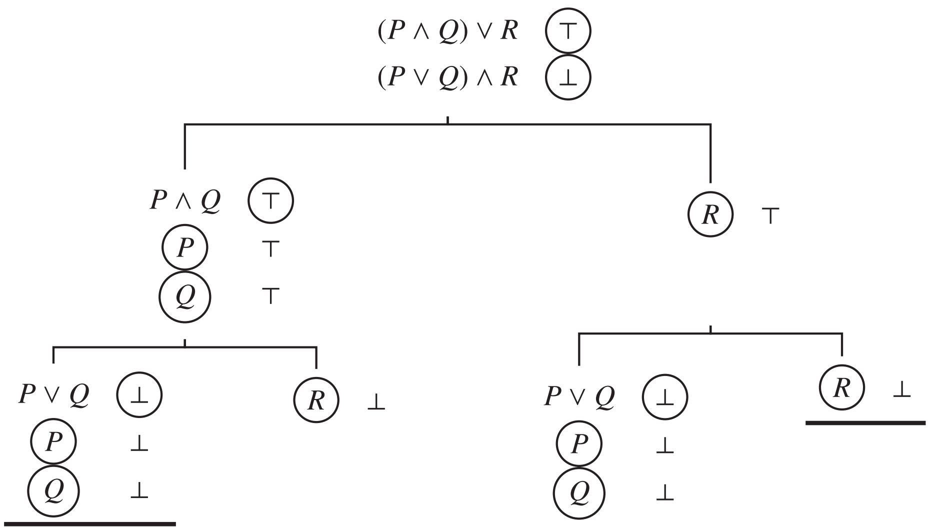
Zaokruživanje oznake $\top$ ili $\bot$ u zahtjevu na koji se primjenilo neko semantičko pravilo, ili zaokruživanje atoma, te podvlačenje zatvorenih grana crtom nismo formalno uveli u definiciju semantičkog stabla, iako ćemo se i dalje neformalno koristiti tim postupcima. Uz to označavanje možemo reći da je grana potpuno razvijena ako su svi njeni zahtjevi zaokruženi (bilo forme, bilo njihove oznake). Slično, grana je završena ako je podvučena crtom ili su svi njeni zahtjevi zaokruženi.

Evo još nekoliko primjera. Počnimo sa semantičkim stablom za $P \vee \overline{R}, Q \to R \not\models P \vee \overline{Q}$.



Stablo se zatvorilo (tj. sve su se njegove grane zatvorile) što znači da nema interpretacije koja bi potvrdila da $P \vee \overline{R}, Q \to R \not\models P \vee \overline{Q}$. Drugim riječima, $P \vee \overline{R}, Q \to R \models P \vee \overline{Q}$.

Izgradimo semantičko stablo za $(P \wedge Q) \vee R \not\models (P \vee Q) \wedge R$.



Stablo je završeno (svi zahtjevi su zaokruženi) ali nije zatvoreno. Dvije su grane ostale otvorene i snjih možemo očitati dvije interpretacije koje potvrđuju da $(P \wedge Q) \vee R \not\models (P \vee Q) \wedge R$. To su $(P, Q, R) = (\top, \top, \bot)$ i $(P, Q, R) = (\bot, \bot, \top)$.

Metoda semantičkih stabala, za svaki konačni Γ i Δ, daje odgovor na pitanje je li $\Gamma \models \Delta$ ili $\Gamma \not\models \Delta$. Naime, izgradnja semantičkog IF–stabla, za konačne Γ i Δ, sigurno završava u konačno mnogo koraka (jer Γ i Δ sadrže konačno mnogo IF–veznika).No, tada preostaju samo dvije mogućnosti. Sve su grane tog stabla zatvorene, pa zaključujemo da $\Gamma \models \Delta$, ili je bar jedna grana otvorena pa zaključujemo da $\Gamma \not\models \Delta$ (i s te grane možemo očitati interpretaciju koja to potvrđuje).

Dakle, metoda semantičkih stabala je postupak odluke za $\Gamma \models \Delta$. Njezina glavna prednost je da se ona lako poopćuje i na kvantifikacijsku logiku, iako tako poopćena više neće biti postupak odluke za $\Gamma \models \Delta$.

2.10 Korektnost, potpunost i kompaktnost

Pri kraju odjeljka 2.6 neke smo sekvente $\Gamma \models \Delta$ izveli primjenom strukturnih i IF–pravila. Za takve izvode kažemo da su sintaktički, jer se pravila mogu primjenjivati čisto mehanički, uzimajući u obzir samo sintaktičku građu formi na koje se primjenjuju, a ne i njihovu semantiku (značenje). Uobičajeno je da se sekvente u takvim sistemima označavaju s $\Gamma \vdash \Delta$. Jedan takav sintaktički sustav čine sljedeća pravila, koja su u logičkoj literaturi poznata kao Gentzenova sekventna pravila (riječ je o strukturnim i IF–pravilima "na dolje" iz odjeljka 2.6.

GENTZENOV SEKVENTNI IF–SUSTAV

$$(\vdash -)\,\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \overline{A}, \Delta} \qquad (- \vdash)\,\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \overline{A} \vdash \Delta}$$

$$(\vdash \wedge)\,\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \qquad (\wedge \vdash)\,\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$(\vdash \vee)\,\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \qquad (\vee \vdash)\,\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$(\vdash\rightarrow)\,\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \qquad (\rightarrow\vdash)\,\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}$$

$$(\mathrm{P})\,\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta} \qquad (\mathrm{S})\,\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$$

$$(\mathrm{R})\,\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

Pravilo $(\vdash\rightarrow)$ zovemo uvođenjem veznika $\rightarrow$ na desno ili među konkluzije. Pravilo $(\rightarrow\vdash)$ zovemo uvođenjem veznika $\rightarrow$ na lijevo ili među premise. Analogno imenujemo i ostala pravila.

Sekventa $\Gamma \vdash \Delta$ dokaziva je u Gentzenovom sekventnom sustavu ako se može izvesti pomoću njegovih pravila (tj. izvesti iz preklapanja, kao aksioma, uz pomoć ostalih pravila). U sljedeća dva primjera dokazujemo $-(P \wedge Q) \vdash P \vee Q$ i $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P\vdash Q,P} \qquad \dfrac{\dfrac{}{P,Q\vdash Q}}{P\vdash Q,\overline{Q}}}{P\vdash Q,P\wedge\overline{Q}}}{\vdash \overline{P},Q,P\wedge\overline{Q}}}{\vdash\overline{P}\vee Q,P\wedge\overline{Q}}}{-(P\wedge\overline{Q})\vdash\overline{P}\vee Q}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P,Q\vdash P} \qquad \dfrac{\dfrac{}{P,Q\vdash Q,R}}{P,Q\vdash Q\vee R}}{P,Q\vdash P\wedge(Q\vee R)}}{P\wedge Q\vdash P\wedge(Q\vee R)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P,R\vdash P} \qquad \dfrac{\dfrac{}{P,R\vdash Q,R}}{P,R\vdash Q\vee R}}{P,R\vdash P\wedge(Q\vee R)}}{P\wedge R\vdash P\wedge(Q\vee R)}}{(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)\vdash P\wedge(Q\vee R)}$$

Za sintaktički sustav izvođenja kažemo da je semantički korektan, ako je svaka dokaziva sekventa $\Gamma\vdash\Delta$ ujedno i (semantički) istinita, tj. $\Gamma\models\Delta$.

KOREKTNOST

Sintaktički sustav izvođenja je korektan ako iz $\Gamma\vdash\Delta$ slijedi $\Gamma\models\Delta$.

Gentzenov sustav je korektan, jer sva njegova pravila čuvaju relaciju $\models$. Tako smo ih uveli u odjeljku 2.6.

Za sintaktički sustav izvođenja kažemo da je semantički potpun ako je svaka (semantički) istinita sekventa u njemu dokaziva, tj. ako iz $\Gamma\models\Delta$ slijedi $\Gamma\vdash\Delta$.

POTPUNOST

Sintaktički sustav izvođenja je potpun ako iz $\Gamma\models\Delta$ slijedi $\Gamma\vdash\Delta$.

U odjeljku 2.6 najavili smo da ćemo dokazati potpunost tamo uvedenih strukturnih i IF–pravila. Dokazat ćemo i više. Potpun je već i sustav Gentzenovih pravila, koja čine tek dio pravila iz 2.6. Prije tog dokaza uvest ćemo jednu notacijsku preformulaciju metode semantičkih stabala. Izgradnja semantičkog stabla za $\Gamma\not\models\Delta$ počinje s granom na kojoj su formule iz Γ označene s $\top$, a one iz Δ s $\bot$. Tu ćemo granu u novoj notaciji zapisati jednostavno kao $\Gamma\not\models\Delta$. Na primjer, početak semantičkog stabla za $-(P\wedge\overline{Q})\not\models\overline{P}\vee Q$ u staroj notaciji je prikazan lijevo, a u novoj desno:

STARO		NOVO
$-(P\wedge\overline{Q})$	$\top$	$-(P\wedge\overline{Q})\not\models\overline{P}\vee Q$
$\overline{P}\vee Q$	$\bot$	

Izgradnja stabla se nastavlja primjenom semantičkih IF–pravila. U staroj notaciji navodimo ih lijevo, a u novoj desno:

STARO

$$\begin{array}{cc} \overline{A} & \top \\ \hline A & \bot \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \overline{A} & \bot \\ \hline A & \top \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} A \wedge B & \top \\ \hline A & \top \\ B & \top \end{array} \qquad \begin{array}{cc} A \wedge B & \bot \\ \hline A \bot & B \bot \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} A \vee B & \top \\ \hline A \top & B \top \end{array} \qquad \begin{array}{cc} A \vee B & \bot \\ \hline A & \bot \\ B & \bot \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} A \rightarrow B & \top \\ \hline A \bot & B \top \end{array} \qquad \begin{array}{cc} A \rightarrow B & \bot \\ \hline A & \top \\ B & \bot \end{array}$$

NOVO

$$\frac{\Gamma, \overline{A} \not\models \Delta}{\Gamma \not\models A, \Delta} \qquad \frac{\Gamma \not\models \overline{A}, \Delta}{\Gamma, A \not\models \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \wedge B \not\models \Delta}{\Gamma, A, B \not\models \Delta} \qquad \frac{\Gamma \not\models A \wedge B, \Delta}{\Gamma \not\models A, \Delta \qquad \Gamma \not\models B, \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \vee B \not\models \Delta}{\Gamma, A \not\models \Delta \qquad \Gamma, B \not\models \Delta} \qquad \frac{\Gamma \not\models A \vee B, \Delta}{\Gamma \not\models A, B, \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \rightarrow B \not\models \Delta}{\Gamma \not\models A, \Delta \qquad \Gamma, B \not\models \Delta} \qquad \frac{\Gamma \not\models A \rightarrow B, \Delta}{\Gamma, A \not\models B, \Delta}$$

U našem primjeru, izgradnja semantičkog stabla za $-(P \wedge \overline{Q}) \not\models \overline{P} \vee Q$ nastavlja se primjenom tih pravila, u obje notacije, ovako:

STARO

$$\begin{array}{cc} -(P \wedge \overline{Q}) & \top \\ \overline{P} \vee Q & \bot \\ P \wedge \overline{Q} & \bot \\ \overline{P} & \bot \\ Q & \bot \\ P & \top \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} P & \bot \\ \hline \end{array} & \begin{array}{cc} \overline{Q} & \bot \\ Q & \top \\ \hline \end{array} \end{array}$$

NOVO

$$\begin{array}{c} - (P \wedge \overline{Q} \not\models \overline{P} \vee Q \\ \hline \not\models \overline{P} \vee Q, P \wedge \overline{Q} \\ \hline \not\models \overline{P}, Q, P \wedge Q \\ \hline P \not\models Q, P \wedge \overline{Q} \\ \hline \begin{array}{cc} \dfrac{P \not\models Q, P}{} & \begin{array}{c} P \not\models Q, \overline{Q} \\ \hline P, Q \not\models Q \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

U svakoj fazi izgradnje stabala, što nije vidljivo na konačnoj slici, u "novim" sekventama pojavljuju se one formule čije su oznake na odgovarajućim "starim" granama nezaokružene.

Najvažnije je uočiti da su semantička IF–pravila ekvivalentna Gentzenovim sekventnim pravilima. Na primjer, pravilom

$$\frac{\Gamma, A \vee B \not\models \Delta}{\Gamma, A \not\models \Delta \quad \text{ili} \quad \Gamma, B \not\models \Delta}$$

tvrdi se: "Ako $\Gamma, A \vee B \not\models \Delta$ onda $\Gamma, A \not\models \Delta$ ili $\Gamma, B \not\models \Delta$". No, tome je očito ekvivalentno: "Ako $\Gamma, A \models \Delta$ i $\Gamma, B \models \Delta$ onda $\Gamma, A \vee B \models \Delta$"', što je Gentzenovo pravilo

$$\frac{\Gamma, A \models \Delta \quad \text{i} \quad \Gamma, B \models \Delta}{\Gamma, A \vee B \models \Delta.}$$

Isto vrijedi i za ostala pravila.

Dakle, semantičko stablo za $-(P \wedge \overline{Q}) \not\models \overline{P} \vee Q$ u novoj notaciji i u obrnutom smjeru, uz zamjenu $\not\models$ sa $\models$, nije ništa drugo nego Gentzenov dokaz sekvente $-(P \wedge \overline{Q}) \models \overline{P} \vee Q$.

Sada je jasno kako možemo dokazati potpunost Gentzenovog sustava. Pretpostavimo da $\Gamma \models \Delta$. U tom slučaju izgradnja semantičkog stabla za $\Gamma \not\models \Delta$ završava zatvaranjem svih njegovih grana. U novoj notaciji, grane se zatvaraju ako završavaju sekventama "preklapajućeg" oblika $\Theta, A \not\models A, \Psi$. Iz prethodno objašnjene veze Gentzenovih i semantičkih IF–pravila slijedi da je to stablo, čitano u obrnutom smjeru uz zamjenu $\not\models$ sa $\models$, dokaz od $\Gamma \models \Delta$ u Gentzenovom sustavu. To smo i trebali dokazati.

TEOREM O POTPUNOSTI I KOREKTNOSTI GENTZENOVOG SEKVENTNOG SUSTAVA

Gentzenov sekventni sustav je potpun i korektan, tj. $\Gamma \models \Delta$ akko $\Gamma \vdash \Delta$.

Zapravo smo dokazali i nešto više. Naime, u zatvorenim semantičkim stablima "čitanim naopako" nikada se ne pojavljuju ni *rez* ni *slabljenje*. To znači da je potpun već i Gentzenov sustav bez reza i slabljenja. Uobičajeno se kaže da su *rez* i *slabljenje* eliminabilni iz Gentzenovog sustava. (Gentzen je teorem o eliminaciji reza dokazao sintaktički, ne pozivajući se na $\models$ i potpunost, što je kombinatorno dosta složen dokaz.)

U slučaju da su Γ i Δ konačni skupovi IF–formula, metoda semantičkih stabala je postupak odluke za $\Gamma \models \Delta$. U slučaju da su Γ ili Δ beskonačni nije neposredno jasno postoji li postupak odluke za $\Gamma \models \Delta$. Najjednostavnije bi bilo da $\Gamma \models \Delta$ akko postoje konačni $\Gamma' \subseteq \Gamma$ i $\Delta' \subseteq \Delta$ takvi da $\Gamma' \models \Delta'$. Tada kažemo da je relacija $\models$ kompaktna.

KOMPAKTNOST

Relacija $\models$ je kompaktna ako vrijedi sljedeće:

$$\Gamma \models \Delta \text{ akko postoje konačni } \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ i } \Delta' \subseteq \Delta \text{ takvi da } \Gamma' \models \Delta'.$$

Metodu semantičkih stabala možemo modificirati tako da bude primjenjiva na beskonačne sekvente $\Gamma \not\models \Delta$ i odatle će slijediti kompaktnost od $\models$.

Modificirana metoda za $\ldots, A_3, A_2, A_1 \not\models B_1, B_2, B_3, \ldots$ sastoji se od (potencijalno) beskonačno mnogo koraka.

1. korak Polazeći od zahtjeva $A_1 \top$ izgradimo (u konačno mnogo podkoraka) završeno stablo za taj zahtjev.

2. korak Na kraju svih otvorenih grana dobivenih u prethodnom koraku dopišemo zahtjev $B_1 \perp$, te polazeći od novih zahtjeva izgradimo (u konačno mnogo podkoraka) završeno stablo.

3. korak Na kraju svih otvorenih grana dobivenih u prethodnom koraku dopišemo zahtjev $A_2 \top$, te polazeći od novih zahtjeva izgradimo (u konačno mnogo podkoraka) završeno stablo.

I tako dalje.

Postupak će stati, ako se u nekom koraku sve grane zatvore, ili neće nikada stati, ako u svakom koraku bar jedna grana ostane otvorena. U prvom slučaju stablo sadrži samo konačno mnogo početnih formula $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$. Za njih vrijedi $A_n, \ldots, A_2, A_1 \models B_1, B_2, \ldots, B_m$, jer je stablo zatvoreno. U drugom slučaju stablo je beskonačno, pa ima bar jednu beskonačnu granu. Prema konstrukciji stabla na beskonačnoj grani pojavljuju se sve početne formule $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, \ldots$ i svi atomi od kojih su one izgrađene. Neka je **int** interpretacija u kojoj ti atomi primaju vrijednost $\top$ ili $\perp$ ovisno o tome s kojom je od tih vrijednosti označen pojedini atom na toj grani. (Nijedan atom ne može biti označen i s $\top$ i s $\perp$ jer bi se grana tada zatvorila, pa ne bi bila beskonačna.) Prema semantičkim pravilima za izgradnju stabla, u toj interpretaciji sve formule na toj grani imaju točno onu vrijednost s kojom su označene. Posebno $A_1, A_2, A_3, \ldots$ imaju vrijednost $\top$, a $B_1, B_2, B_3, \ldots$ imaju vrijednost $\perp$. No to znači da $\ldots, A_3, A_2, A_1 \not\models B_1, B_2, B_3, \ldots$.

Rezimirajmo, metoda semantičkih stabala za sekventu $\Gamma \not\models \Delta$, s beskonačno mnogo formula:

1. stane u konačno mnogo koraka i tada za konačne $\Gamma' \subset \Gamma$, $\Delta' \subset \Delta$ imamo $\Gamma \models \Delta$, ili
2. ne stane, tj. generira beskonačno stablo, i tada $\Gamma \not\models \Delta$.

Odavde odmah slijedi kompaktnost relacije $\models$. Naime, ako $\Gamma \models \Delta$ onda slučaj (2) ne može nastupiti, pa postoje konačni $\Gamma' \subset \Gamma$ i $\Delta' \subset \Delta$ takvi da $\Gamma' \models \Delta'$.

TEOREM O KOMPAKTNOSTI IMPLIKACIJE

Relacija $\models$ definirana među proizvoljnim skupovima IF–formi je kompaktna.

Kompaktnost IF–logike (a vidjet ćemo da ona vrijedi i za kvantifikacijsku logiku) zapravo je iznenađujuća, jer je vrlo lako naći **jednostavne** implikacije s beskonačno mnogo premisa koje prestaju vrijediti ako se ograničimo na (bilo koji) konačni podskup tih premisa. Na primjer, beskonačno mnogo premisa

(P_1) *a* nije roditelj od *b*;

(P_2) *a* nije roditelj od roditelja od *b*;

(P_3) *a* nije roditelj od roditelja od roditelja od *b*; i tako dalje,

implicira konkluziju

(K) *a* nije predak od *b*.

Međutim, nijedan konačni podskup navedenih premisa ne implicira (K). To znači da implikacija $\ldots, P_3, P_2, P_1 \models K$ ne slijedi iz istinosnofunkcionalne (ili kvantifikacijske) građe premisa P_i i konkluzije K, nego se temelji na specifičnoj vezi relacija roditelj i predak.

Isto vrijedi i za sljedeći, matematički, zaključak:

(P_1) $a \neq 1$;

(P_2) $a \neq 2$;

(P_3) $a \neq 3$; i tako dalje,

implicira konkluziju

$(K)\ \ a \notin \mathbb{N}.$

Upozorimo na kraju da modificirana metoda semantičkih stabala *nije postupak odluke* za beskonačne $\Gamma \models \Delta$. Naime, ako postupak stane u nekom koraku onda imamo odluku u tom koraku, tj. znamo da $\Gamma \models \Delta$. No, ako postupak ne staje, nismo sigurni je li to zato što nismo napravili dovoljan broj koraka ili zato što nikada ni neće stati (jer $\Gamma \not\models \Delta$).

Modificirana metoda je *pozitivni postupak* odluke za $\Gamma \models \Delta$, što znači da, u slučaju da $\Gamma \models \Delta$ vrijedi, postupak to i dokazuje u konačno mnogo koraka. Ona nije i *negativan postupak* odluke za $\Gamma \models \Delta$, jer u slučaju da $\Gamma \models \Delta$ ne vrijedi, postupak to ne dokazuje u konačno mnogo koraka. Biti postupak odluke za neko svojstvo zapravo znači biti i pozitivan i negativan postupak odluke za to svojstvo.

2.11 Prirodne dedukcije i aksiomi

Metodu semantičkih stabala, kao postupak dokazivanja, u logiku je 1955. g. uveo E. W. Beth. Prije toga, logika je, po uzoru na matematičke teorije, najčešće formulirana kao aksiomatska teorija. Prvu takvu aksiomatizaciju, Fregeovu iz 1879. g., mnogi smatraju rođenjem moderne logike. (Frege je pokušavao dokazati logicističku tezu da matematika zapravo nema svojih posebnih aksioma, nego da oni slijede iz logičkih aksioma.) Fregeovi aksiomi za istinosno funkcionalni dio njegove mnogo obuhvatnije logike bili su:

(F1) $A \to (B \to A)$

(F2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(F3) $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$

(CP) $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$

(DNI) $A \to \overline{\overline{A}}$

(DNE) $\overline{\overline{A}} \to A$

(Zadnja tri aksioma označili smo latinskim kraticama njihovih predfregeovskih imena: (CP) za kontrapoziciju, (DNI) za introdukciju dvostruke negacije i (DNE) za eliminaciju dvostruke negacije.) Fregeovo jedino pravilo izvođenja je *modus ponens*:

$$\text{(MP)}\frac{A \quad A \to B}{B}$$

Izvod ili dokaz forme A je konačno stablo formi na čijem dnu (korjenu) je forma A, na čijim vrhovima (listovima) su aksiomi i u kojem svaka forma koja nije na vrhu slijedi iz onih neposredno iznad nje primjenom pravila.

Svi aksiomi očito su valjane forme, a i *modus ponens* iz dvije valjane forme izvodi valjanu formu. Dakle, u Fregeovom sustavu dokazive su samo valjane forme, tj. sustav je semantički korektan. Uskoro ćemo dokazati da je i potpun.

No prije toga, krenimo s jednim primjerom izvoda. Dokažimo $A \to A$.

$$\text{(MP)}\frac{\dfrac{}{A \to ((A \to A) \to A)}\text{(F1)} \qquad \dfrac{}{A \to ((A \to A) \to A) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))}\text{(F2)}}{(A \to (A \to A)) \to (A \to A) \quad (*)}$$

$$\dfrac{(A \to (A \to A)) \to (A \to A) \quad (*) \qquad \dfrac{}{A \to (A \to A)}\,(\mathsf{F1})}{A \to A}\,(\mathsf{MP})$$

Ono što nas zbunjuje u ovom dokazu jest da se tako jednostavna forma, kao $A \to A$, dokazuje na tako zaobilazan način. (Tko bi se sam dosjetio forme (F2) iz gornjeg izvoda?) Pronalaženje ovakvih dokaza, i što je još važnije, nekih općih principa koji vode k nalaženju takvih dokaza, bila je jedna od glavnih zadaća kojima su se bavili logičari s početka 20. st. Najuspješnija ideja bila je da se osim izvoda iz aksioma dopuste i izvodi iz pretpostavki. U terminima prethodnog odjeljka, da se osim izvoda sekventi oblika $\vdash A$ dopuste i izvodi sekventi oblika $\Gamma \vdash A$.

Naravno, izvod ili dokaz sekvente $\Gamma \vdash A$ je konačno stablo formi na čijem je dnu forma A, na čijim su vrhovima aksiomi *ili formule iz* Γ i u kojem svaka forma koja nije na vrhu slijedi iz onih neposredno iznad nje primjerom pravila.

Budući da pravilo (MP) sada primjenjujemo i na formule izvedene iz pretpostavki, ono je nešto općenitije:

$$(\mathsf{MP})\,\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash A \to B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

Definicija izvoda iz pretpostavki opravdava i sljedeće oblike starih strukturnih pravila, preklapanja, slabljenja i reza:

$$(\mathsf{P1})\,\dfrac{}{A \vdash A} \qquad (\mathsf{S1})\,\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A} \qquad (\mathsf{R1})\,\dfrac{\Gamma \vdash A \quad A, \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

U izvodima se pojavljuju samo singularne sekvente (tj. sekvente sa samo jednom konkluzijom), pa su zato i strukturna pravila u singularnoj formi (otud oznake (P1), (S1), (R1)).

Uskoro ćemo na primjerima pokazati kako je bitno lakše nalaziti dokaze iz pretpostavki nego samo iz aksioma. No, prije toga dokazujemo da se svaki dokaz iz pretpostavki

$$A, \dots, B, C \vdash D,$$

može transformirati u

$$A, \dots, B \vdash C \to D,$$

koji se može transformirati u

$$A, \dots \vdash B \to (C \to D),$$

i tako dalje, do običnog aksiomatskog dokaza

$$\vdash A \to (\cdots (B \to (C \to D)) \cdots).$$

Transformacije se temelje na *teoremu dedukcije*,

$$(\mathsf{TD})\,\dfrac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma \vdash A \to C}$$

koji vrijedi u Fregeovom aksiomatskom sustavu. To dokazujemo indukcijom po duljini izvoda.

Pretpostavimo, dakle, da vrijedi $\Gamma, A \vdash C$. Tada su moguća četiri slučaja: (1) C je aksiom, (2) $C = A$, (3) $C \in \Gamma$ ili (4) $\Gamma, A \vdash C$ slijedi iz $\Gamma, A \vdash B$ i $\Gamma, A \vdash B \to C$.

(1) Ako je C aksiom, onda:

$$\dfrac{\dfrac{\text{(Aksiom)}\ \dfrac{}{\vdash C} \qquad \dfrac{}{\vdash C \to (A \to C)}\ \text{(F1)}}{\vdash A \to C}\ \text{(MP)}}{\Gamma \vdash A \to C}\ \text{(S1)}$$

(2) Ako $C = A$, onda:

$$\text{(S1)}\ \dfrac{\text{(Dokazano)}\ \dfrac{}{\vdash A \to C}}{\Gamma \vdash A \to C}$$

(3) Ako $C \in \Gamma$, onda:

$$\dfrac{\text{(P1)}\ \dfrac{}{\Gamma \vdash C} \qquad \dfrac{\text{(P1)}\ \dfrac{}{C \vdash C} \qquad \dfrac{}{\vdash C \to (A \to C)}\ \text{(F1)}}{C \vdash A \to C}\ \text{(MP)}}{\Gamma \vdash A \to C}\ \text{(R1)}$$

(4) Ako $\Gamma, A \vdash C$ slijedi iz $\Gamma, A \vdash B$ i $\Gamma, A \vdash B \to C$, onda po pretpostavci indukcije (p.i.) iz $\Gamma, A \vdash B$ možemo izvesti $\Gamma \vdash A \to B$, a iz $\Gamma, A \vdash B \to C$ možemo izvesti $\Gamma \vdash A \to (B \to C)$. No onda iz $\Gamma, A \vdash B$ na sljedeći način izvodimo $\Gamma \vdash A \to B$:

$$\dfrac{\text{(p.i.)}\ \dfrac{\Gamma, A \vdash B \to C}{\Gamma \vdash A \to (B \to C)} \qquad \dfrac{}{\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))}\ \text{(F2)}}{\Gamma \vdash (A \to B) \to (A \to C) \quad (*)}$$

$$\dfrac{\text{(p.i.)}\ \dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \qquad \Gamma \vdash (A \to B) \to (A \to C) \quad (*)}{\Gamma \vdash A \to C}\ \text{(MP)}$$

U svakom slučaju, ako $\Gamma, A \vdash C$ onda $\Gamma \vdash A \to C$, tj. vrijedi (TD).

Kada teorem dedukcije koristimo u konkretnim izvodima onda umjesto sekventnog formata (lijevo) najčešće koristimo tzv. prirodni format (desno):

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} \dfrac{}{A}\ \text{(i)} \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \to B}\ \text{(i)}$$

Desno, prirodno pravilo koristi se kako je zapisano u lijevom sekventnom formatu. Dakle, ako smo polazeći od nekih pretpostavki izgradili stablo koje završava s B, u sljedećem koraku možemo izvesti $A \to B$ i pritom odbaciti sve pretpostavke A. Odbacivanje pretpostavke označava se crtom iznad nje, a indeksi (i) naznačuju u kojem je koraku pretpostavka odbačena.

Kao ilustraciju dokazujemo da je kondicional tranzitivan, tj. dokazujemo da vrijedi pravilo (Tr) $A \to B, B \to C \vdash A \to C$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(1)\ \dfrac{}{A} \qquad A \to B}{B} \qquad B \to C}{C}}{A \to C}\ (1)$$

(Odavde odmah slijedi da je i formula $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ dokaziva u Fregeovom sustavu.) Koristeći se tranzitivnošću, lako dokazujemo da u Fregeovom sustavu vrijede i sljedeći oblici kontrapozicije:

$$\dfrac{\text{(DNI)}\ \dfrac{}{B \to \overline{\overline{B}}} \qquad \text{(CP)}\ \dfrac{A \to \overline{B}}{\overline{\overline{B}} \to \overline{A}}}{B \to \overline{A}}\ \text{(Tr)} \qquad\qquad \dfrac{\text{(CP)}\ \dfrac{\overline{A} \to B}{\overline{B} \to \overline{\overline{A}}} \qquad \text{(DNE)}\ \dfrac{}{\overline{\overline{A}} \to A}}{\overline{B} \to A}\ \text{(Tr)}$$

$$\dfrac{\text{(Tr)}\ \dfrac{\text{(DNI)}\ \dfrac{}{B \to \overline{\overline{B}}} \qquad \text{(CP)}\ \dfrac{\overline{A} \to \overline{B}}{\overline{\overline{B}} \to \overline{\overline{A}}}}{B \to \overline{\overline{A}}} \qquad \dfrac{}{\overline{\overline{A}} \to A}\ \text{(DNE)}}{B \to A}\ \text{(Tr)}$$

Od sada ćemo svako od pravila $A \to B \vdash \overline{B} \to \overline{A}$, $A \to \overline{B} \vdash B \to \overline{A}$, $\overline{A} \to B \vdash B \to A$ i $\overline{A} \to B \vdash B \to A$ zvati kontrapozicijom.

Sve gornje dokaze bilo bi bitno teže izvesti direktno iz Fregeovih aksioma, samo uz pomoć (MP). Zato je Łukasiewicz tek 1939.g. dokazao da je Fregeov aksiom (F3) izvediv iz (F1), (F2) i (MP); dakle, da je suvišan. Upotrebom (TD) koji, vidjeli smo, slijedi iz (F1), (F2) i (MP), taj dokaz postaje trivijalan:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \to (B \to C)}\,(3) \qquad \dfrac{}{A}\,(1)}{B \to C} \qquad \dfrac{}{B}\,(2)}{C}}{A \to C}\,(1)}{B \to (A \to C)}\,(2)}{(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))}\,(3)$$

Osim toga, lako se vidi da (F1) i (F2) slijede iz (TD) i (MP):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A}\,(2)}{B \to A}\,(1)}{A \to (B \to A)}\,(2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A}\,(1) \qquad \dfrac{}{A \to (B \to C)}\,(3)}{B \to C} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A}\,(1) \qquad \dfrac{}{A \to B}\,(2)}{B}}{C}}{A \to C}\,(1)}{(A \to B) \to (A \to C)}\,(2)}{(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))}\,(3)$$

(U prvom dokazu $B \to A$ izvodimo iz A uz odbacivanje pretpostavki B. No, njih nema, pa ništa ni ne odbacujemo.)

Pravilo (TD) zapravo je pravilo introdukcije veznika $\to$, dok je pravilo (MP) pravilo eliminacije veznika $\to$. Zato ćemo ih označiti s (I $\to$) i (E $\to$).

$$(\mathsf{I}\rightarrow)\,\dfrac{\begin{array}{c}\overline{}^{\,(i)}\\ A\\ \vdots\\ B\end{array}}{A\rightarrow B}\,(i)\qquad\qquad (\mathsf{E}\rightarrow)\,\dfrac{A\qquad A\rightarrow B}{B}$$

Dakle, dosad smo dokazali da su Fregeovi aksiomi i pravila za veznik $\rightarrow$ ekvivalentni introdukciji i eliminaciji tog veznika. Ukratko, (F1), (F2), (F3) i (MP) ekvivalentni su pravilima (I $\rightarrow$) i (E $\rightarrow$). Preostali Fregeovi aksiomi, (CP), (DNI) i (DNE), tiču se negacije. Pokazat ćemo da su (CP) i (DNI) ekvivalentni pravilima introdukcije i eliminacije negacije. Ta pravila označavamo s (I $-$) i (E $-$), a definiramo ih na sljedeći način:

$$(\mathsf{I}-)\,\dfrac{\begin{array}{c}\overline{}^{\,(i)}\\ A\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{\overline{A}}\,(i)\qquad\qquad (\mathsf{E}-)\,\dfrac{A\qquad \overline{A}}{\perp}$$

(Primjetimo da su to posebni slučajevi od (I $\rightarrow$) i (E $\rightarrow$) ako $\overline{A}$ definiramo s $\overline{A} \Leftrightarrow A\rightarrow\perp$.)

Da (CP) i (DNI) slijede iz (I $-$), (E $-$), (I $\rightarrow$) i (E $\rightarrow$) dokazuje se vrlo lako:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A\rightarrow B}^{\,(3)}\qquad \overline{A}^{\,(1)}}{B}\qquad \overline{\overline{B}}^{\,(2)}}{\perp}}{\overline{A}}\,(1)}{\overline{B}\rightarrow\overline{A}}\,(2)}{(A\rightarrow B)\rightarrow(\overline{B}\rightarrow\overline{A})}\,(3)\qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A}^{\,(2)}\qquad \overline{\overline{A}}^{\,(1)}}{\perp}}{\overline{\overline{A}}}\,(1)}{A\rightarrow\overline{\overline{A}}}\,(2)$$

Da (I $-$) i (E $-$) slijede iz (I $\rightarrow$), (E $\rightarrow$), (CP), (DNI) i (DNE) ne možemo dokazati direktno, jer sustav (I $\rightarrow$), (E $\rightarrow$), (CP), (DNI) i (DNE) uopće ne sadrži konstantu $\perp$. No, možemo je uvesti definicijom $\perp \Leftrightarrow -(C\rightarrow C)$ i tada to lako dokazujemo.

$$\dfrac{\dfrac{}{C\rightarrow C}\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\overline{}^{\,(1)}\\ A\\ \vdots\\ -(C\rightarrow C)\end{array}}{A\rightarrow -(C\rightarrow C)}\,(1)}{(C\rightarrow C)\rightarrow\overline{A}}\,(\mathsf{CP})}{\overline{A}}\qquad\qquad \dfrac{(\mathsf{CP})\,\dfrac{\dfrac{A}{\overline{B}\rightarrow A}}{\overline{A}\rightarrow B}\qquad \overline{A}}{B}$$

U oba dokaza koristili smo poopćene verzije (CP) koje slijede iz originalnog (CP), (DNI) i (DNE). U desnom dokazu B je proizvoljna formula, dakle može biti i $-(C\rightarrow C)$. No, to znači da smo dokazali i jaču verziju pravila (E $-$) koja je oblika $A, \overline{A} \vdash B$.Nju je uobičajeno razdvojiti u dva dijela, obični (E −) i (EFQ) *ex falso quodlibet* (iz kontradikcije bilo što):

$$\text{(E } -)\,\frac{A \quad \overline{A}}{\bot} \qquad\qquad \text{(EFQ)}\,\frac{\bot}{B}$$

Dakle, konačno smo dokazali da je Fregeov sustav ekvivalentan sustavu koji uz (DNE) ima pravila za introdukciju i eliminaciju svih svojih IF–veznika: →, − i ⊥ (eliminacija od − je introdukcija od ⊥, a introdukcija od − je eliminacija od ⊥). To su, ponovimo još jednom, sljedeća pravila:

$$\text{(I} \rightarrow)\,\frac{\begin{array}{c} \dfrac{}{A}\,(i) \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}\,(i) \qquad\qquad \text{(E} \rightarrow)\,\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

$$\text{(I } -)\text{(E } \bot)\,\frac{\begin{array}{c} \dfrac{}{A}\,(i) \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{\overline{A}}\,(i) \qquad\qquad \text{(E } -)\text{ (I } \bot)\,\frac{A \quad \overline{A}}{\bot}$$

$$\text{(DNE)}\,\frac{\overline{\overline{A}}}{A}$$

Aksiomatske dokaze teško je konstruirati pa je put prema pravilima prirodan i praktički nužan. Sljedeći korak, kojeg je prvi učinio Gentzen 1934., jest da se odmah krene od pravila introdukcije i eliminacije, a da se aksiomi naprosto zaborave. Tako je nastala tradicija da se logika formulira kao sustav prirodnih dedukcija.

Osnovne su karakteristike takvih sustava da su njihovi izvodi izvodi iz pretpostavki, da svaki logički simbol ima svoja pravila introdukcije i eliminacije i da su pravila introdukcije i eliminacije za pojedini logički simbol (ili grupu logičkih simbola) potpuna za taj simbol (ili grupu). Treća karakteristika više je smjernica nego realizirana karakteristika jer ju većina sustava ispunjava samo uz iznimke.

U tom smislu je naš sustav pravila (I →), (E →), (I −), (E −) i (DNE) sustav prirodnih dedukcija za IF-logiku, u kojem (DNE) donekle odskače (iako ga možemo smatrati još jednom eliminacijom negacije).Veznici ∧ i ∨ u njemu se mogu definirati na standardni način ($A \wedge B \Leftrightarrow -(A \rightarrow \overline{B})$ i $A \vee B \Leftrightarrow \overline{A} \rightarrow B$), no uobičajenije je da se nezavisno formuliraju njihova pravila introdukcije i eliminacije (koja inače lako slijede iz definicija):

$$(\mathsf{I}\wedge)\,\dfrac{A \qquad B}{A\wedge B} \qquad\qquad (\mathsf{E}\rightarrow)\,\dfrac{A\wedge B}{A} \quad \dfrac{A\wedge B}{B}$$

$$(\mathsf{I}\vee)\,\dfrac{A}{A\vee B} \quad \dfrac{B}{A\vee B} \qquad\qquad (\mathsf{E}\vee)\,\dfrac{A\vee B \qquad \begin{matrix}\dfrac{}{A}\,(\mathrm{i})\\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\dfrac{}{B}\,(\mathrm{i})\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\,(\mathrm{i})$$

Evo par primjera izvoda formula u tako proširenom sustavu. Najprije izvodimo $\overline{A} \vee \overline{B} \vdash -(A \wedge B)$.

$$\dfrac{\overline{A}\vee\overline{B} \qquad \dfrac{\dfrac{(3)\,\dfrac{}{\overline{A}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A\wedge B}\,(1)}{A}}{\perp}}{-(A\wedge B)}\,(1) \qquad \dfrac{\dfrac{(3)\,\dfrac{}{\overline{B}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A\wedge B}\,(2)}{B}}{\perp}}{-(A\wedge B)}\,(2)}{-(A\wedge B)}\,(3)$$

Slijedi izvod od $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)$.

$$\dfrac{\dfrac{(A\vee B)\wedge(A\vee C)}{A\vee C} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A}\,(1)}{A\vee(B\wedge C)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{B}\,(2) \qquad \dfrac{}{C}\,(1)}{B\wedge C}}{A\vee(B\wedge C) \quad (*)}\,(1)$$

$$\dfrac{\dfrac{(A\vee B)\wedge(A\vee C)}{A\vee B} \qquad \dfrac{(2)\,\dfrac{}{A}}{A\vee(B\wedge C)} \qquad A\vee(B\wedge C) \quad (*)}{A\vee(B\wedge C)}\,(2)$$

Dakle, IF-sustav prirodnih dedukcija s bazom veznika $\{\rightarrow, -, \perp, \wedge, \vee\}$, koji je također uveo Gentzen, ima sljedeća pravila (zapisana u sekventnom obliku):

GENTZENOV SUSTAV PRIRODNIH DEDUKCIJA

$$\text{(P1)}\frac{}{\Gamma, A \vdash A}$$

$$\text{(S1)}\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A} \qquad \text{(R1)}\frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

$$\text{(I} \to\text{)}\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \qquad \text{(E} \to\text{)}\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}$$

$$\text{(I} -\text{)(E} \perp\text{)}\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \overline{A}} \qquad \text{(E} -\text{)(I} \perp\text{)}\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \overline{A}}{\Gamma \vdash \perp}$$

$$\text{(I} \wedge\text{)}\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \qquad \text{(E} \wedge\text{)}\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

$$\text{(I} \vee\text{)}\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \text{(E} \vee\text{)}\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash B}$$

$$\text{(DNE)}\frac{\Gamma \vdash \overline{\overline{A}}}{\Gamma \vdash A}$$

Uz slabljenje (S1) svako od pravila s više pretpostavki može se koristiti i u nešto općenitijoj formi, npr.

$$\text{(E} -\text{)}\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash \overline{A}}{\Gamma, \Delta \vdash \perp} \qquad \text{ili} \qquad \text{(R1)}\frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}.$$

Time ćemo se slobodno koristiti.

Da je taj sustav potpun i korektan (korektnost je zapravo očita) dokazat ćemo tako da ga usporedimo s Gentzenovim sekventnim sustavom (vidi str. 46) čiju smo potpunost i korektnost dokazali u prethodnom odjeljku.

Najprije uočimo da je prirodni sustav *singularan*, što znači da dopušta samo *singularne sekvente* s točno jednom konkluzijom. Gentzenov sekventni sustav (vidi str. 46) je *multiplaran*, što znači da dopušta *multiplarne sekvente* s nula, jednom ili više konkluzija. Ako želimo usporediti ta dva sustava onda u singularni moramo uvesti multiplarne sekvente. To činimo pravilima koja definiraju značenje multiplarnih sekventi u singularnom sustavu:

$$\text{(DM)}\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta^{\vee}} \quad \text{(dvostruka crta)}$$

Tu je $\Delta^{\vee}$ alternacija svih formula iz Δ ako je Δ višečlan skup, $\Delta^{\vee} = \Delta$ ako je Δ jednočlan i $\Delta^{\vee} = \perp$ ako je Δ prazan. (Dodajmo da ćemo u daljnjem $\perp \vee A$ identificirati s A.). Dvostruka crta znači da pravila vrijede u oba smjera (tj. da su gornja i donja sekventa ekvivalentne).

Prvo ćemo dokazati da sva pravila Gentzenovog multiplarnog sustava slijede već iz njihovih singularnih restrikcija (obrat je, naravno, trivijalan). Evo dokaza za svako pojedino pravilo:

Slabljenje (S):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta^{\vee}}\,(\mathrm{DM})}{\Gamma \vdash \Delta^{\vee} \vee A}\,(\vdash \vee 1)}{\Gamma \vdash \Delta, A}\,(\mathrm{DM}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta^{\vee}}\,(\mathrm{DM})}{A, \Gamma \vdash \Delta^{\vee}}\,(\mathrm{S1})}{A, \Gamma \vdash \Delta}\,(\mathrm{DM})$$

Preklapanje (P):

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,(\mathrm{P1})}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}\,(\mathrm{S})\ \text{dokazano}$$

Rez (R):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta^{\vee} \vee A}\,(\mathrm{DM}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Delta^{\vee} \vdash \Delta^{\vee}}\,(\mathrm{P1}) \qquad \dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta^{\vee}}\,(\mathrm{DM})}{\Delta^{\vee} \vee A, \Gamma \vdash \Delta^{\vee}}\,(\vee \vdash 1)}{\Gamma \vdash \Delta^{\vee}}\,(\mathrm{R1})}{\Gamma \vdash \Delta}\,(\mathrm{DM})$$

Konjunkcija lijevo (∧ ⊢):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A, B, \Gamma \vdash \Delta^{\vee}}\,(\mathrm{DM})}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta^{\vee}}\,(\wedge \vdash 1)}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}\,(\mathrm{DM})$$

Konjunkcija desno (⊢ ∧):

$$\dfrac{(\mathrm{R})\ \text{dokazano}\ \dfrac{(\vdash \wedge 1)\ \dfrac{\dfrac{}{A, B \vdash A}\,(\mathrm{P1}) \qquad \dfrac{}{A, B \vdash B}\,(\mathrm{P1})}{A, B \vdash A \wedge B} \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{A, \Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \qquad \Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\,(\mathrm{R})\ \text{dok.}$$

Alternacija lijevo (∨ ⊢):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta^{\vee} \vee A}\,\text{(DM)}}{\Gamma \vdash \Delta^{\vee} \vee A \vee B}\,(\vee \vdash 1)}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\,\text{(DM)}$$

Alternacija desno ($\vdash \vee$):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta^{\vee}}\,\text{(DM)} \qquad \dfrac{B, \Gamma \vdash \Delta}{B, \Gamma \vdash \Delta^{\vee}}\,\text{(DM)}}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta^{\vee}}\,(\vee \vdash 1)}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}\,\text{(DM)}$$

Negacija lijevo ($- \vdash$):

$$\dfrac{(- \vdash 1)\,\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{(P1)}}{A, \overline{A} \vdash} \qquad \Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \overline{A} \vdash \Delta}\,\text{(R) dokazano}$$

Kondicional lijevo ($\rightarrow\vdash$):

$$\text{(R) dokazano}\;\dfrac{\dfrac{(\rightarrow\vdash 1)\,\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{(P1)} \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,\text{(P1)}}{A, A \rightarrow B \vdash B} \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A, A \rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\,\text{(R) dok.}$$

Primjetimo da je ekvivalentnost multiplarnih i singularnih formi svih do sada razmatranih pravila dokazana bez upotrebe pravila (DNE). Za dokaz ekvivalentnosti singularne i multiplarne forme introdukcije od $-$ i $\rightarrow$ desno trebamo (DNE). No, prije tog dokaza malo ćemo detaljnije analizirati (DNE), tj. dokazat ćemo da je pravilo (DNE) ekvivalentno pravilima (TND) *tertium non datur* (trećega nema) i (EFQ). Pravilo (TND) možemo formulirati u dva međusobno ekvivalentna oblika:

TERTIUM NON DATUR

(TND) $\quad \dfrac{}{\vdash A \vee \overline{A}} \qquad \dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad \overline{A}, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$

Dokaz njihove ekvivalentnosti je jednostavan:

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash A \vee \overline{A}} \qquad \dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad \overline{A}, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee \overline{A}, \Gamma \vdash \Delta}}{\Gamma \vdash \Delta} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A, \overline{A}}}{A \vdash A \vee \overline{A}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\overline{A} \vdash A, \overline{A}}}{\overline{A} \vdash A \vee \overline{A}}}{\vdash A \vee \overline{A}}$$

I pravilo (EFQ) možemo formulirati u dva oblika.

EX FALSO QUODLIBET

$$\text{(EFQ)} \qquad \dfrac{}{\bot \vdash A} \qquad\qquad \dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}$$

I oni su očito ekvivalentni:

$$\dfrac{\text{(DM)}\,\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \bot} \qquad \dfrac{}{\bot \vdash A}}{\Gamma \vdash A} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\bot \vdash \bot}}{\bot \vdash}\,\text{(DM)}}{\bot \vdash A}$$

Sada lako dokazujemo da su (TND) i (EFQ) ekvivalentni s (DNE).

(TND) slijedi iz (DNE):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{(DM)}\,\dfrac{A,\Gamma \vdash \Delta}{A,\Gamma \vdash \Delta^\vee}}{\overline{\Delta^\vee},A,\Gamma \vdash}}{\overline{\Delta^\vee},\Gamma \vdash \overline{A}} \qquad \dfrac{\overline{A},\Gamma \vdash \Delta}{\overline{A},\Gamma \vdash \Delta^\vee}\,\text{(DM)}}{\overline{\Delta^\vee},\Gamma \vdash \Delta^\vee}}{\overline{\Delta^\vee},\overline{\Delta^\vee},\Gamma \vdash}}{\Gamma \vdash \overline{\overline{\Delta^\vee}}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\overline{\overline{\Delta^\vee}} \vdash \overline{\overline{\Delta^\vee}}}}{\overline{\overline{\Delta^\vee}} \vdash \Delta^\vee}\,\text{(DNE)}}{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta^\vee}{\Gamma \vdash \Delta}\,\text{(DM)}}$$

(EFQ) slijedi iz (DNE):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\overline{A},\bot \vdash \bot}}{\bot \vdash \overline{\overline{A}}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\overline{\overline{A}} \vdash \overline{\overline{A}}}}{\overline{\overline{A}} \vdash A}\,\text{(DNE)}}{\bot \vdash A}$$

(DNE) slijedi iz (TND) i (EFQ):

$$\dfrac{\text{(TND)}\,\dfrac{\dfrac{}{A,\overline{\overline{A}} \vdash A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\overline{A} \vdash \overline{A}}}{\overline{A},\overline{\overline{A}} \vdash}}{\overline{A},\overline{\overline{A}} \vdash A}\,\text{(EFQ)}}{\overline{\overline{A}} \vdash A} \qquad \Gamma \vdash \overline{\overline{A}}}{\Gamma \vdash A}$$

Na kraju dokazujemo da je (TND) ekvivalentan sa oba preostala pravila ($\vdash -$) i ($\vdash \rightarrow$).

(TND) je ekvivalentno s (⊢ −):

$$\dfrac{A,\Gamma\vdash\Delta \qquad \dfrac{}{\overline{A},\Gamma\vdash\Delta,\overline{A}}}{\Gamma\vdash\Delta,\overline{A}}\;(\mathsf{TND}) \qquad\qquad \dfrac{(\vdash -)\;\dfrac{A,\Gamma\vdash\Delta}{\Gamma\vdash\Delta,\overline{A}} \qquad \overline{A},\Gamma\vdash\Delta}{\Gamma\vdash\Delta}$$

(TND) je ekvivalentno s (⊢→):

$$\dfrac{\dfrac{A,\Gamma\vdash\Delta,B \qquad \dfrac{\dfrac{}{A,B\vdash B}}{B\vdash A\to B}}{A,\Gamma\vdash\Delta,A\to B} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A,B}}{A,\overline{A}\vdash B}}{\overline{A}\vdash A\to B}}{\overline{A},\Gamma\vdash\Delta,A\to B}}{\Gamma\vdash\Delta,A\to B}\;(\mathsf{TND})$$

$$\dfrac{\dfrac{(\vdash\to)\;\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A,\overline{A}}}{\vdash A,A\to\overline{A}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A} \qquad \dfrac{}{\overline{A}\vdash\overline{A}}}{A,A\to\overline{A}\vdash\overline{A}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}}{\overline{A},A\vdash}}{A,A\to\overline{A}\vdash}}{A\to\overline{A}\vdash\overline{A}}}{\vdash A,\overline{A}}}{\vdash A\vee\overline{A}}$$

Rezimirajmo, Gentzenov multiplarni sekventni sustav (vidi str. 46) ekvivalentan je svojoj singularnoj restrikciji. Tu singularnu restrikciju sada je lako usporediti s Gentzenovim prirodnim sustavom, koji je također singularan. Pravila (I →), (I −), (I ∧) i (I ∨) identična su singularnim restrikcijama pravila (⊢→), (⊢ −), (⊢ ∧), (⊢ ∨), a za pravila (E →), (E −), (E ∧), (E ∨) lako dokazujemo da su ekvivalentna singularnim restrikcijama pravila (→⊢), (− ⊢), (∧ ⊢), (∨ ⊢).

(E →) je ekvivalentno sa singularnim (→⊢):

$$\dfrac{\dfrac{(\to\vdash)\;\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A} \qquad \dfrac{}{B\vdash B}}{A,A\to B\vdash B} \qquad \Gamma\vdash A\to B}{A,\Gamma\vdash B} \qquad \Gamma\vdash A}{\Gamma\vdash B}$$

$$\dfrac{\dfrac{(\mathsf{E}\to)\;\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A} \qquad \dfrac{}{A\to B\vdash A\to B}}{A,A\to B\vdash B} \qquad \Gamma\vdash A}{\Gamma,A\to B\vdash B} \qquad B,\Gamma\vdash C}{\Gamma,A\to B\vdash C}$$

(E −) je ekvivalentno sa singularnim (− ⊢):

$$\dfrac{\dfrac{(-\vdash)\;\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}}{\overline{A},A\vdash\bot} \qquad \Gamma\vdash\overline{A}}{A,\Gamma\vdash\bot} \qquad \Gamma\vdash A}{\Gamma\vdash\bot}$$

$$\dfrac{(\mathsf{E}\,-)\;\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}\qquad\dfrac{}{\overline{A}\vdash\overline{A}}}{A,\overline{A}\vdash\bot}\qquad\qquad \Gamma\vdash A}{\Gamma,\overline{A}\vdash\bot}$$

(E $\wedge$) je ekvivalentno sa singularnim ($\wedge\,\vdash$):

$$\dfrac{(\wedge\,\vdash)\;\dfrac{\dfrac{}{A,B\vdash A}}{A\wedge B\vdash A}\qquad\qquad \Gamma\vdash A\wedge B}{\Gamma\vdash A}$$

$$\dfrac{(\mathsf{E}\,\wedge)\;\dfrac{\dfrac{}{A\wedge B\vdash A\wedge B}}{A\wedge B\vdash A}\qquad\qquad A,\Gamma\vdash C}{A\wedge B,\Gamma\vdash C}$$

(E $\vee$) je ekvivalentno sa singularnim ($\vdash\,\vee$):

$$\dfrac{(\vdash\,\vee)\;\dfrac{A,\Gamma\vdash C\qquad B,\Gamma\vdash C}{A\vee B,\Gamma\vdash C}\qquad\qquad \Gamma\vdash A\vee B}{\Gamma\vdash C}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{A\vee B\vdash A\vee B}\qquad A,\Gamma\vdash C\qquad B,\Gamma\vdash C}{A\vee B,\Gamma\vdash C}\;(\mathsf{E}\,\vee)$$

Sve u svemu, potpuni i korektni Gentzenov multiplarni sustav ekvivalentan je svojoj singularnoj restrikciji, koja je ekvivalentna Gentzenovom prirodnom sustavu, koji je ekvivalentan Fregeovom aksiomatskom sustavu. No, onda su i Gentzenov prirodni i Fregeov aksiomatski sustav također potpuni i korektni.

U gornjim dokazima lako je provjeriti da je Gentzenov prirodni sustav bez (DNE), tj. bez (TND) i (EFQ) (sustav tzv. minimalne IF-logike) ekvivalentan Gentzenovom sekventnom sustavu sa singularnim restrikcijama pravila ($\vdash\,-$) i ($\vdash\rightarrow$), uz slabljenje (S) koje ne dopušta slučaj $\Gamma\vdash$ odnosno $\Gamma\models A$, tj. ne dopušta (EFQ).

Gentzenov prirodni sustav bez (TND), ali sa (EFQ) (tzv. sustav intuicionističke IF-logike), ekvivalentan je Gentzenovom sekventnom sustavu pravila sa singularnim restrikcijama ($\vdash\,-$) i ($\vdash\rightarrow$). Zato te restrikcije zovemo intuicionističkima.

3

Logika kvantifikacijskih formi

3.1 Silogizmi i Vennovi dijagami

Svi prirodni jezici sadrže operatore pomoću kojih se iz pojmova grade deklarativne rečenice. Četiri takva operatora istražio je Aristotel u svojoj silogistici, prvoj formalnoj logičkoj teoriji. Ona se bavi tzv. *kategoričkim tvrdnjama* koje su oblika

(A) Svi S su P. (E) Nijedan S nije P.

(I) Neki S su P. (O) Neki S nisu P.

Kategoričke forme (A) i (I) su afirmativne, dok su (E) i (O) negativne. S druge strane, (A) i (E) su univerzalne, dok su (I) i (O) partikularne. Otuda i njihove skolastičke oznake:

- A i I od AFIRMO,
- E i O od NEGO.

Prvi se vokali koriste za univerzalne forme, a drugi za partikularne.

Atomarne forme S i P, u kategoričkim tvrdnjama stoje na mjestu općih pojmova (koje bismo u opreci spram poliadskih pojmova iz sljedećih poglavlja trebali zvati monadskima, no ovdje ćemo ih naprosto zvati pojmovima). Oni se zovu subjekt i predikat i u prirodnim se jezicima izražavaju na razne načine. Često su to imenice kao u:

Neki logičari su filozofi.

No, to mogu biti i pridjevi, glagoli ili prilozi kao u:

Neki logičari nisu mudri.
Sve ptice lete.
Neki ne trče brzo.

U svim slučajevima radi se o pojmovima ("logičar", "filozof", "mudra osoba", "ptica", "ono što je brzo"). Opći pojam se u prirodnom jeziku može izraziti i složenom frazom, npr. "onaj koji je igrao na tri svjetska prvenstva u nogometu".

Usprkos svoj toj šarolikosti pojmovi su bitno različiti od tvrdnji. Tvrdnje su istinite ili neistinite. Pojmovi su *istiniti o* mnogim stvarima, jednoj, ili možda čak nijednoj, a neistiniti o svim ostalim stvarima. Pojam "hrvat" istinit je o svim hrvatima i ni o čemu drugom, "zemljin mjesec" je istinit samo o jednoj stvari, a "okrugli kvadrat" ni o jednoj.

Umjesto nespretne fraze da je pojam o nečemu istinit ili neistinit, češće ćemo govoriti da nešto je ili nije u njegovom opsegu ili ekstenziji. Dakle, svaki hrvat je u opsegu pojma "hrvat" i ništa nije u opsegu pojma "okrugli kvadrat". Opseg ili ekstenzija nekoga pojma često se identificira sa skupom svih stvari u njegovom opsegu ili ekstenziji. Time ćemo se slobodno koristiti, iako napominjemo da logika pojmova ni na koji način ne pretpostavlja postojanje apstraktnih skupova kojima se bavi teorija skupova (neki njezini pojmovi čak ni nemaju ekstenziju u skupovnom smislu).

Četiri Aristotelova operatora, "svi su", "nijedan nije", "neki su" i "neki nisu", primijenjeni na pojmove S i P daju kategoričke tvrdnje A, E, I i O. Aristotela su zanimali argumenti koji su poznati pod imenim kategorički silogizmi i kojima se iz dvije kategoričke premise izvodi kategorička konkluzija.

Skolastici su u srednjem vijeku sve moguće silogizme razvrstali u sljedeća četiri oblika, tzv. figure:

$$\begin{array}{cccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\[4pt] \begin{array}{cc} S & M \\ M & P \\ \hline S & P \end{array} & \begin{array}{cc} S & M \\ P & M \\ \hline S & P \end{array} & \begin{array}{cc} M & S \\ M & P \\ \hline S & P \end{array} & \begin{array}{cc} M & S \\ P & M \\ \hline S & P \end{array} \end{array}$$

U svakom silogizmu su sa S i P označeni subjekt i predikat konkluzije. Oni se zovu sporednim i glavnim pojmom silogizma. Premise sadrže zajednički pojam, označen s M, koji se zove srednjim pojmom silogizma. Prva ili glavna premisa sadrži glavni pojam S, a druga ili sporedna premisa sadrži sporedni pojam P. Na primjer,

$$\begin{array}{l} \textit{Svi S su M.} \\ \textit{Neki P su M.} \\ \hline \textit{Nijedan S nije P.} \end{array}$$

jedan je od od silogizama druge figure. Kraće ga označavamo s II AIE, jer pripada drugoj figuri, glavna mu je premisa oblika A, sporedna oblika I, a konkluzija oblika E.

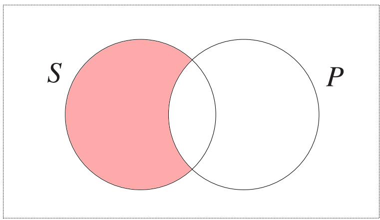
Silogizama ima ukupno $4 \cdot 4^3 = 256$. Naime, dvije premise i konkluzija (njih 3) mogu biti u bilo kojem od oblika A, E, I i O (njih 4), što je 4^3 moguća silogizma u svakoj od 4 figure. To je ukupno $4 \cdot 4^3$ silogizama. Osnovni je zadatak silogistike ustanoviti koji su od tih 256 silogizama valjani, tj. u kojima premise impliciraju konkluziju.

Aristotel ih je našao ukupno 24, koristeći se aksiomatskom metodom. Mi ćemo opisati metodu Vennovih dijagrama, kojom lako možemo odlučiti je li silogizam valjan ili ne, jer metoda jasno pokazuje koju konkluziju impliciraju zadane premise.

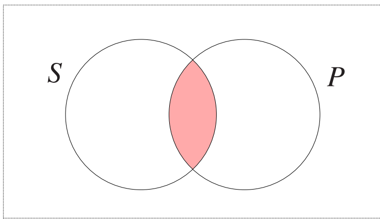
FiXr

Kategoričke forme Vennovim dijagramima prikazujemo na sljedeći način:

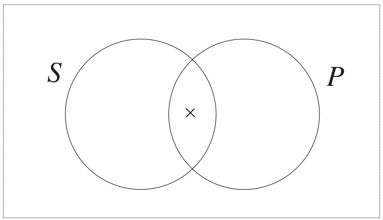
(A) Svi S su P



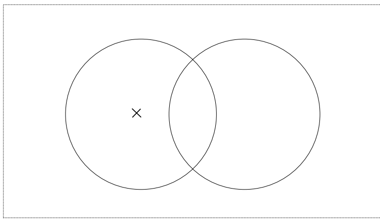
(E) Nijedan S nije P



(I) Neki S su P



(O) Neki S nisu P



FiXm
trebalo

Iscrtkavanje područja znači da u tom području nema ničega. Križić u području znači da u tom području ima nečega. (Primijetimo da iscrtkavanje daje univerzalne tvrdnje, a križić partikularne). Bjelina u području ne znači ništa do odsustvo bilo kakve informacije o tom području.

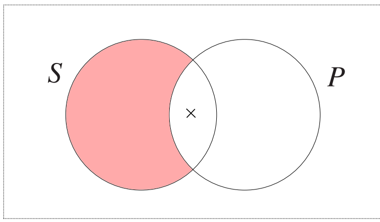
Najjednostavnija svojstva kategoričkih tvrdnji lako se iščitavaju iz njihovih dijagrama. Simetrija dijagrama E i I znači da redoslijed pojmova u odgovarajućim tvrdnjama nije bitan. "Nijedan S nije P" znači isto što i "Nijedan P nije S", kao što i "Neki S su P" znači isto što i "Neki P su S". (Ako su neki hrvati logičari, onda su neki logičari hrvati i obratno. Ako nijedan hrvat nije kralj, onda nijedan kralj nije hrvat i obratno.) Takvu zamjenu subjekta i predikata skolastici su zvali *konverzijom*. Naravno, konverzija nije dopustiva u tvrdnjama oblika A i O, što se vidi iz asimetrije odgovarajućih dijagrama. "Svi S su P" ne znači isto što i "Svi P su S", niti "Neki S nisu P" znači isto što i "Neki P nisu S". (Svi hrvati su ljudi, ali nisu svi ljudi hrvati. Neki ljudi nisu hrvati, ali nije istina da neki hrvati nisu ljudi.)

Tvrdnje oblika A i O međusobno su *kontradiktorne*, tj. jedna je negacija druge. Naime, O dijagram ima križić točno tamo gdje je A dijagram iscrtkan. Isto vrijedi za tvrdnje E i I: E je istinita akko je I neistinita.

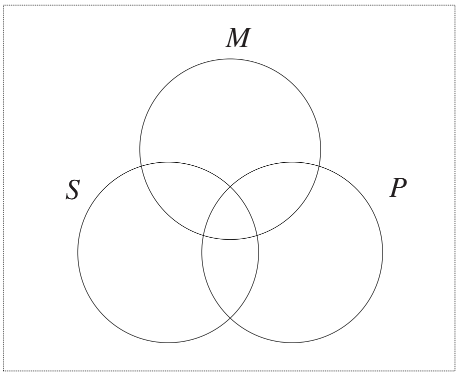
Tvrdnje oblika A i E, "Svi S su P" i "Nijedan S nije P", također su na neki način suprotstavljene. Skolastici su ih zvali međusobno *kontrarnima*. No kontrarno nije kontradiktorno, tj. E nije negacija od A. "Svi hrvati su generali" jednako je neistinito kao i "Nijedan hrvat nije general". Isto vrijedi i za tvrdnje I i O. "Neki hrvati su generali" jednako je istinito kao i "Neki hrvati nisu generali".

Kontrarne tvrdnje A i E često su obje neistinite, kao što su kontrarne tvrdnje I i O često obje istinite. Mnogo je rjeđe da su A i E obje istinite ili I i O obje neistinite. Jednim pogledom na njihove dijagrame vidimo da to vrijedi samo ako ne postoji S. Jasno, ako ne postoji S onda je neistinito "Neki S su P" i "Neki S nisu P". Bez uvida u dijagrame nešto je manje očigledno da su u odsustvu S-ova tvrdnje "Svi S su P" i "Nijedan S nije P" obje istinite. Naime, mnogi smatraju da te tvrdnje podrazumijevaju da postoji S. To je konvencija koja se može prihvatiti, ali u logici ona nije prihvaćena jer bi implicirala da A i O te I i E nisu kontradiktorne, što bi otežavalo formulacije mnogih logičkih pravila. Dakle, "Svi S su P" uvijek znači "Ne postoji S koji nije P".

Važna posljedica te logičke konvencije je da "Svi S su P" ne implicira "Neki S su P", što se dobro vidi na dijagramima A i I (na A dijagramu nema informacije koja je na I dijagramu). Naravno, "Neki S su P" slijedi iz "Svi S su P" i "Postoji S ", jer te *dvije* premise imaju sljedeći dijagram.



Premise kategoričkog silogizma prikazujemo zajedničkim Vennovim dijagramima koji reprezentiraju tri pojma S, M i P na sljedeći način.



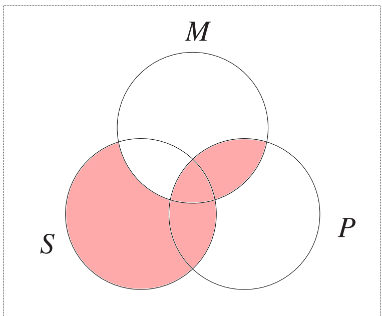
Odgovarajućim križićima i/ili iscrtkavanjima prikazujemo 1. i 2. premisu silogizma, pa iz tako dobivenog Vennovog dijagrama iščitamo njegovu konkluziju, gledajući kako su križići i/ili iscrtkavanja smješteni u odnosu na S i P.

lici idu dva vodoravno i okomito

Slijedi po jedan primjer Vennovog izvođenja u svakoj od četiri figure.

(I AEE)

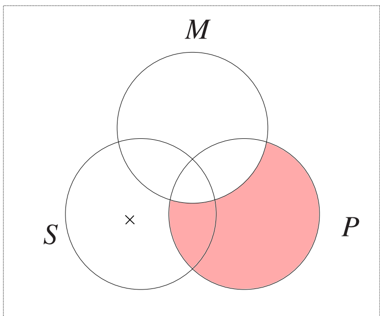
Svi S su M.
Nijedan M nije P.



Nijedan S nije P.

(II OAO)

Neki S nisu M.
Svi P su M.

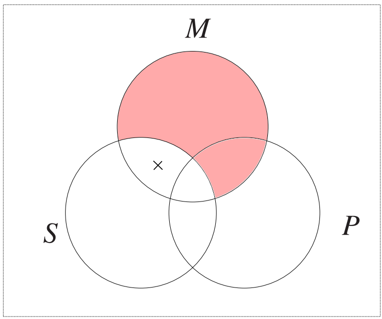


Neki S nisu P.

rizontalna i šrafiranja

(III AOO)

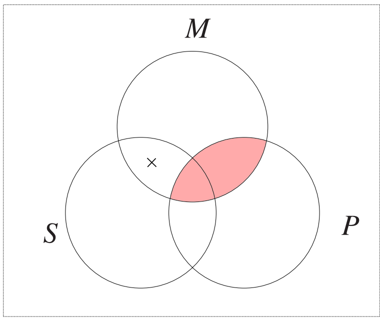
Svi M su S.
Neki M nisu P.



Neki S nisu P.

(IV IEO)

Neki M su S.
Nijedan P nije M.



Neki S nisu P.

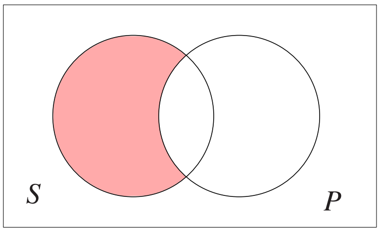
Jasno je da tako možemo provjeriti svaki od 256 kategoričkih silogizama, te naći onih 15 koji su valjani (Aristotel je našao 24, jer je pretpostavio da uvijek postoji bar jedan S, M i P). Taj se posao može ubrzati primjenom sljedećih principa, koji očito slijede iz metode Vennovih dijagrama:

- "Valjana konkluzija je univerzalna samo ako su to i obje premise".
- "Valjana konkluzija je afirmativna samo ako su to i obje premise".
- "Valjani silogizam sadrži bar jednu univerzalnu premisu".
- "Valjani silogizam sadrži bar jednu afirmativnu premisu".

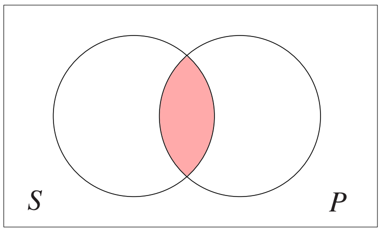
Aristotel je ove i još neke principe vezane uz distributivnost pojmova (koju ovdje ne objašnjavamo) prihvatio kao aksiome iz kojih je izvodio valjane silogizme.

Vennovi dijagrami jasno upućuju na to da se Aristotelovi operatori "*svi su*", "*nijedan nije*", "*neki su*" i "*neki nisu*" mogu definirati pomoću operatora $\exists$ (postoji) i njegove negacije $-\exists$ (ne postoji). Naime, *križić* znači da nešto *postoji*, a iscrtkavanje da nešto *ne postoji*. Dakle, imamo sljedeće ekvivalencije.

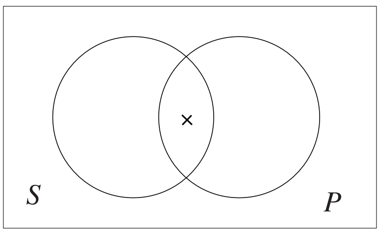
Svi S su $P \Leftrightarrow -\exists(S \wedge \overline{P})$



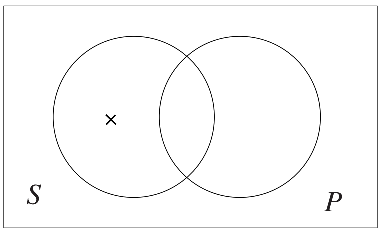
Nijedan S nije $P \Leftrightarrow -\exists(S \wedge P)$



Neki S su $P \Leftrightarrow \exists(S \wedge P)$



Neki S nisu $P \Leftrightarrow \exists(\overline{S} \wedge P)$



Tvrdnje oblika $\exists A$, gdje je A složeni pojam izgrađen od jednostavnijih, uz pomoć istinosnih funkcija, zovemo egzistencijskim bulovskim tvrdnjama. Njima se tvrdi da postoji x o kojem je A istinito. No, što znači da je A istinito o x, tj. da je $A(x)$, ako je A istinosna funkcija od $P, ..., S$? Odgovor je jednostavan:

$$(S \wedge P)(x) \Leftrightarrow S(x) \wedge P(x)$$
$$(S \vee P)(x) \Leftrightarrow S(x) \vee P(x)$$
$$(-S)(x) \Leftrightarrow -(S(x))$$

i sasvim općenito:

$$A(P, \ldots, S)(x) \Leftrightarrow A(P(x), \ldots, S(x)) .$$

Na desnim stranama, koje definiraju lijeve strane, istinosne funkcije imaju svoje standardno značenje. Dakle, kako i treba, pojam "zao $\wedge$ čovjek" obuhvaća sve zle ljude, pojam "$-$ živo" sve nežive stvari, pojam "majka $\vee$ otac" sve roditelje itd.

Odmah možemo zaključiti da sve IF-ekvivalencije u pojmovnom kontekstu postaju jednakosti ekstenzija odgovarajućih pojmova; $A \Leftrightarrow B$ akko $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, tj. $\mathsf{ext}(A) = \mathsf{ext}(B)$. Slično, $A \Rightarrow B$ akko $A(x) \Rightarrow B(x)$ tj. $\mathsf{ext}(A) \subseteq \mathsf{ext}(B)$.

Dodajmo još da ćemo sve pokrate koje smo ranije uveli za korištenje IF-veznika koristiti i u pojmovnom kontekstu (AB je $A \wedge B$, $A \vee AB$ je $A \vee (A \wedge B)$, $-A \to BC$ je $(-A) \to (B \wedge C)$ itd.)

Operator $\exists$ koristi ćemo kao osnovni operator koji primjenjen na pojam daje tvrdnju. No, osim tim unarnim operatorom koristit ćemo se i operatorom $\forall$, te binarnim operatorima $=$ i $\subseteq$. Sve su to operatori koji primijenjeni na pojmove daju tvrdnje i svi se oni lako definiraju pomoću osnovnog operatora $\exists$.

$$\forall A \Leftrightarrow -\exists(-A)$$
$$A = B \Leftrightarrow -\exists(A\overline{B} \vee \overline{A}B)$$
$$A \subseteq B \Leftrightarrow -\exists(A\overline{B})$$

(Boole je kao osnovni operator koristio =.) Dakle, kategoričke tvrdnje oblika A, E, I i O možemo izraziti i na sljedeće načine.

(A)	(E)
$P \subseteq Q$	$P \subseteq \overline{Q}$
$\forall(P \to Q)$	$\forall(P \to \overline{Q})$
$P\overline{Q} = \emptyset$	$PQ = \emptyset$

(I)	(O)
$-(P \subseteq \overline{Q})$	$-(P \subseteq Q)$
$-\forall(P \to \overline{Q})$	$-\forall(P \to Q)$
$-(PQ = \emptyset)$	$-(P\overline{Q} = \emptyset)$

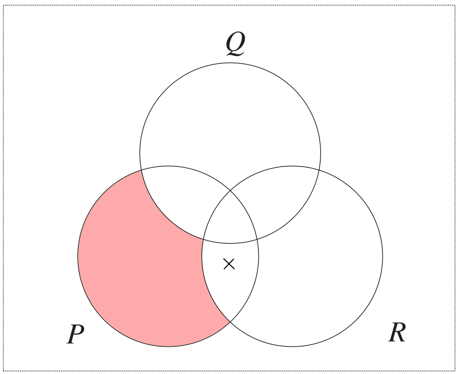
Metodu Vennovih dijagrama, kojom smo rješavali silogističke probleme, možemo primijeniti i na širu klasu problema u kojima se pojavljuju egzistencijske bulovske forme (koje prikazujemo križićima) i njihove negacije (koje prikazujemo iscrtkavanjima). Istražimo, na primjer, koju konkluziju možemo izvesti iz sljedećih premisa:

(1) Svi P su Q ili R.

(2) Neki P nisu Q.

Preformulirat ćemo ih u egzistencijske forme ili njihove negacije, te ih prikazati odgovarajućim Vennovim dijagramom:

(1) $-\exists P\overline{Q}\,\overline{R}$ (2) $\exists P\overline{Q}$



Iz dijagrama možemo iščitati moguću konkluziju (3) $\exists P\overline{Q}R$ ili bliže hrvatskom jeziku:

(3) Neki P su R i nisu Q.

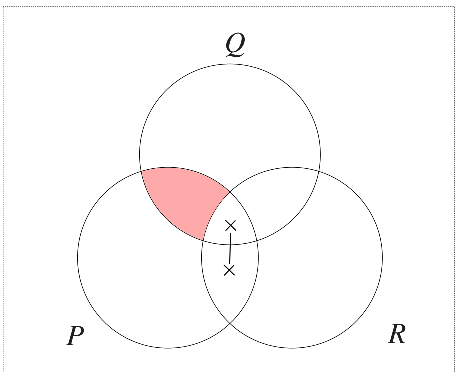
Metoda postaje još fleksibilnijnom ako uvedemo konvenciju da više crtom povezanih križića u raznim područjima znači da nečega ima bar u jednom od tih područja. Ilustrirat ćemo je izvođenjem konkluzije iz sljedećih premisa:

(4) Svi P koji su Q su R.

(5) Neki P su Q ili R.

Premise ćemo opet preformulirati u egzistencijske forme ili njihove negacije, te ih prikazati sljedećim dijagramom:

(4) $-\exists PQ\overline{R}$ (5) $\exists P(Q \vee R)$



Iz dijagrama odmah iščitavamo moguću konkluziju (6) $\exists PR$ ili bliže hrvatskom jeziku:

(7) Neki P su R.

Međutim, metoda Vennovih dijagrama, osim što postaje nepreglednom u slučaju većeg broja atomarnih pojmova, nije primjerena logičkoj analizi tvrdnji koje su od egzistencijskih tvrdnji izgrađene primjenom proizvoljnih IF–veznika (a ne samo primjenom negacije, kao do sada). Promotrimo, na primjer, argument iz uvodnog poglavlja, za koji smo tvrdili da je valjan.

(P1) *Ako su svi kandidati koji su dobili obavijest visokokvalificirani onda neki kandidati nisu dobili obavijest.*

(P2) *Ili su svi kandidati dobili obavijest ili su svi kandidati visokokvalificirani.*

(K) *Ako su svi visokokvalificirani kandidati dobili obavijest onda su neki kandidati koji nisu visokokvalificirani dobili obavijest.*

Njegova forma očito je sljedećeg oblika:

$$\begin{array}{ll} \text{(P1)} & KO \subseteq V \rightarrow \exists K\overline{O} \\ \text{(P2)} & K \subseteq O \vee K \subseteq V \\ \hline \text{(K)} & KV \subseteq O \rightarrow \exists K\overline{V}O \end{array}$$

Izrazimo li $\subseteq$ pomoću $\exists$ dolazimo do forme:

$$\begin{array}{ll} \text{(B1)} & -\exists KO\overline{V} \rightarrow \exists K\overline{O} \\ \text{(B2)} & -\exists K\overline{O} \vee -\exists K\overline{V} \\ \hline \text{(BK)} & -\exists K\overline{O}V \rightarrow \exists KO\overline{V} \end{array}$$

u kojoj se pojavljuju različite istinosne funkcije egzistencijskih formi $\exists KO\overline{V}$, $\exists K\overline{O}$, $\exists K\overline{V}$ i $\exists K\overline{O}V$ i koja se zato ne može analizirati Vennovom metodom. Takve forme predmet su našeg sljedećeg odjeljka.

3.2 Bulovska logika pojmova

Argument o "visokokvalificiranim obaviještenim kandidatima", s kraja prethodnog odjeljka, sadrži forme koje su dvostruko istinosno funkcionalne. One su, kao prvo, istinosne funkcije egzistencijskih tvrdnji. Ove su pak tvrdnje o pojmovima koji su opet istinosne funkcije svojih osnovnih pojmova V, O i K. Takve forme zovemo bulovskim formama i točno ih definiramo na sljedeći način.

BULOVSKE FORME (B–FORME)

Ako neki skup IF–veznika generira sve IF–veznike, npr. $\{\wedge, \vee, -, \ldots\}$ onda bulovske $\{\wedge, \vee, -, \ldots\}$–forme definiramo induktivno s (i) - (iv).

(i) Atomi P, Q, R, P_1, Q_1, R_1, … su pojmovne forme.

(ii) Ako su A i B pojmovne forme onda su to i $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $-A$, … .

(iii) Ako je A pojmovna forma onda je $\exists A$ bulovska forma, koju zovemo egzistencijskom.

(iv) Ako su F i G bulovske forme onda su to i $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $-F$, … .

Primjetimo da su bulovske forme forme **tvrdnji** (i njih označavamo s F, G, H, …) dok su pojmovne forme forme **pojmova** (i njih označavamo s A, B, C, …). Specijalno, atomi bulovske forme (P, Q, R, …) su pojmovni. (Sve forme u ovom odjeljku bit će bulovske, pa ćemo često ispuštati termin "bulovski".)

Na primjer, forma:

$$-\exists(PQ \vee R) \to (\exists(P\overline{Q}) \vee -\exists(Q \vee R)) \tag{3.1}$$

bulovska je forma, IF–izgrađena od egzistencijskih formi:

$$\exists(PQ \vee R), \quad \exists(P\overline{Q}), \quad \exists(Q \vee R),$$

koje su dobivene primjenom operatora $\exists$ na pojmovne forme:

$$PQ \vee R, \quad P\overline{Q}, \quad Q \vee R,$$

koje su IF–izgrađene od atoma P, Q i R.

Podforme bulovskih formi i pojmovne podforme pojmovnih formi definiramo na standardni način (v.str. 11). Pojmovni dio A egzistencijske podforme $\exists A$ i sve njegove pojmovne podforme su pojmovne podforme početne forme. Atomi bulovske forme su atomi njezinih pojmovnih podformi.

Na primjer, $-\exists(PQ \vee R)$, $\exists(P\overline{Q}) \vee -\exists(Q \vee R)$ su neke podforme od (3.1). Njene egzistencijske podforme su: $\exists(PQ \vee R)$, $\exists(P\overline{Q})$ i $\exists(Q \vee R)$. Pojmovne forme PQ, $\overline{Q}$, $Q \vee R$ su neke pojmovne podforme od (3.1). Njezini atomi su P, Q i R.

Definiranje formi je, kao i uvijek, naš prvi korak u izgradnji odgovarajuće logike. Sljedeći je korak definiranje interpretacije tih formi. Osnovna primjena pojmovnih formi je ta da ih prepoznamo kao forme konkretnih pojmova. Naravno, pojmovna forma A je forma nekog konkretnog pojma ako se on (ili neki njegov sinonim) može dobit iz forme A interpretiranjem atoma od A odgovarajućim konkretnim pojmovima. Budući da vrijednost istinitosti interpretacije od $\exists A$ ovisi samo o ekstenziji interpretacije od A, te da je ekstenzija interpretacije od A potuno određena ekstenzijama koje imaju interpretacije atoma od A, onda su (u bulovskoj logici) forme jednoznačno interpretirane ekstenzijama njihovih pojmovnih atoma.

INTERPRETACIJA BULOVSKE FORME (B–STRUKTURA)

Interpretacija bulovske forme je pridruženje podskupova nekog nepraznog skupa U atomima te forme. Skup U zovemo univerzumom te interpretacije. Dakle, interpretacija je funkcija

$$\text{ext} : \mathcal{A}t \longrightarrow \mathcal{P}(U)$$

gdje je $\mathcal{A}t$ skup atoma, a $\mathcal{P}(U)$ skup svih podskupova univerzuma U. Ta funkcija može biti totalna ili parcijalna, tj. može pridruživati podskupove od U svim ili samo nekim pojmovnim atomima.

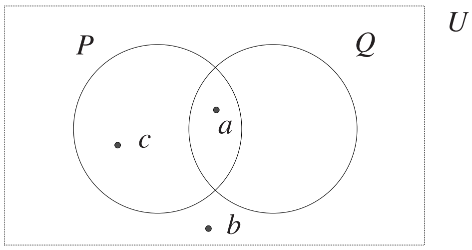
Bulovske interpretacije češće zovemo bulovskim strukturama.

Na primjer, sljedeća tablica:

	P	Q
a	+	+
b	−	−
c	+	−

zadaje B–strukturu čiji je univerzum $U = \{a, b, c\}$, a ext je definirana na atomima P i Q tako da je $\mathsf{ext}(P) = \{a, c\}$ i $\mathsf{ext}(Q) = \{a\}$.

Istu strukturu zadaje i sljedeći dijagram:



Tako možemo prikazati bilo koju konačnu strukturu, tj. strukturu s konačnim univerzumom U, čija je funkcija ext definirana na konačno mnogo atoma.

Naravno, univerzum U ne mora biti konačan niti ext mora biti definirana samo na konačnom broju atoma. Na primjer, B–struktura u kojoj je $U = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ i u kojoj je $\mathsf{ext}(P_n) = n\mathbb{N} = \{0, n, 2n, 3n, \ldots\}$ ima beskonačan univerzum, a ext je definirana na beskonačno mnogo atoma P_n.

Naša definicija B–strukture isključuje prazne univerzume. To je u redu, jer argumenti koje formaliziramo bulovskim formama gotovo uvijek pretpostavljaju univerzume s bar nekoliko, ako ne i mnogo članova. Mogli bismo čak reći da se umjesto na neprazne univerzume možemo ograničiti na univerzume s npr. više od dva, tri ili čak s beskonačno mnogo članova. Razlog zbog kojeg to ne činimo jest da se time ne bi promjenio skup valjanih, konzistentnih itd. formi. Naime, ako formu možemo učiniti istinitom ili neistinitom u nekom malom nepraznom univerzumu, onda to možemo postići i u po volji velikom.

Razlozi za to su sljedeći. Neka je x objekt u nekom malom univerzumu u kojem je atome $P, Q, \ldots$ moguće interpretirati tako da formu učinimo istinitom (odnosno neistinitom). Dodajmo univerzumu koliko god želimo novih objekata na kojima atome $P, Q, \ldots$ interpretiramo onako kako su interpretirani na x (tj. $P, Q, \ldots$ su istiniti o svakom od tih objekata akko su istiniti o x). Nove objekte tada nije moguće razlikovati od x, bar što se tiče interpretacije naše forme, pa je ona i dalje istinita (odnosno neistinita).

Prazni univerzum može dovesti do promjena u tome što je valjano, konzistentno itd. Na primjer, forma $\exists A \vee \exists \overline{A}$ istinita je u svakom nepraznom univerzumu, ali je neistinita u praznom. No, već smo rekli, prazni univerzum rijetko nas zanima i zato ga isključujemo. Ako nas ikada zanima je li neka bulovska forma istinita u praznom univerzumu, dovoljno je na mjesto svake njezine egzistencijske forme uvrstiti $\perp$ i izračunati ukupnu vrijednost tako dobivene IF–forme (izgrađene samo od konstanti $\perp$). To je vrijednost te forme u praznom univerzumu.

U prethodnim obrazloženjima pretpostavili smo da je intuitivno jasno kako se izračunavaju vrijednosti istinitosti bulovske forme u zadanoj B–strukturi (tu vrijednost također zovemo interpretacijom te forme u toj strukturi). Na primjer, račun za formu $\exists P \to -\exists(P \wedge Q)$ u gore zadanoj konačnoj strukturi izgleda ovako:

$$\mathsf{ext}(P) = \{a, b\} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mathsf{int}(\exists P) = \top$$

$$\mathsf{ext}(\overline{P} \wedge \overline{Q}) = \overline{\mathsf{ext}(P)} \wedge \overline{\mathsf{ext}(Q)} = \overline{\{a, b\}} \wedge \overline{\{a\}} = \{c\} \wedge \{b, c\} = \{c\} \neq \emptyset \Rightarrow \mathsf{int}(\exists(\overline{PQ})) = \top$$

$$\mathsf{int}(\exists P \to -\exists(\overline{P} \wedge \overline{Q})) = \mathsf{int}(\exists P) \to -\mathsf{int}(\exists(\overline{P} \wedge \overline{Q})) = \top \to -\top = \top \to \bot = \bot$$

Dakle, zadana forma je neistinita u zadanoj B–strukturi (tj. njena interpretacija u toj strukturi je $\bot$).

Gornji se račun temelji na sljedećoj definiciji vrijednosti istinitosti bulovske forme u B–strukturi.

ISTINITOST B–FORME U B–STRUKTURI

Vrijednost istinitosti B–forme u B–strukturi $\mathsf{ext} : \mathcal{At} \to \mathcal{P}(U)$, koja mora biti definirana na svim atomima te forme, označavamo sa $\mathsf{int}(\ )$ i induktivno je definiramo s (i)-(iv).

(i) Na atomima je ext već definirana.

(ii) $\mathsf{ext}(A \wedge B) = \mathsf{ext}(A) \wedge \mathsf{ext}(B)$, $\quad \mathsf{ext}(A \vee B) = \mathsf{ext}(A) \vee \mathsf{ext}(B)$, $\quad \mathsf{ext}(-A) = -\mathsf{ext}(A)$,
ili za bilo koju istinosnu funkciju $F(A, \ldots, B)$: $\mathsf{ext}(F(A, \ldots, B)) = F(\mathsf{ext}(A), \ldots, \mathsf{ext}(B))$.

(iii) $\mathsf{int}(\exists F) = \top \Leftrightarrow \mathsf{ext}(F) \neq \emptyset$

(iv) $\mathsf{int}(F \wedge G) = \mathsf{int}(F) \wedge \mathsf{int}(G)$, $\quad \mathsf{int}(F \vee G) = \mathsf{int}(F) \vee \mathsf{int}(G)$, $\quad \mathsf{int}(-F) = -\mathsf{int}(F)$,
ili za bilo koju istinosnu funkciju $F(F, \ldots, G)$: $\mathsf{int}(F(F, \ldots G)) = F(\mathsf{int}(F), \ldots, \mathsf{int}(G))$.

Gornja definicija zapravo opisuje kako se funkcija ext, definirana samo na atomima, proširuje na sve pojmovne forme ((i) i (ii)); kako se pomoću nje int definira na egzistencijskim formama ((iii)); te kako se int zatim proširuje na sve forme ((iv)).

Sljedeći korak u izgradnji B–logike, definicija opće implikacije $\models$ među B–formama, sada je jednostavan.

BULOVSKA IMPLIKACIJA

Skup bulovskih formi Γ implicira skup bulovskih formi Δ, oznakom $\Gamma \models \Delta$, ako ne postoji B–struktura u kojoj su sve forme iz Γ istinite i sve forme iz Δ neistinite.

Ova definicija, na već standardni način, uključuje konzistentnost i inkonzistentnost:

$$\oslash \Gamma \quad \text{akko} \quad \Gamma \models,$$

te valjanost i nevaljanost:

$$\Box F \quad \text{akko} \quad \models F.$$

Sada nam je preostao još zadnji korak u našem pristupu izgradnji svih logika: pronalaženje algoritma za testiranje implikacije $\Gamma \models \Delta$. Čini se da u bulovskoj logici to postaje nešto teže. Naime, čak i za konačne skupove bulovskih formi Γ i Δ broj mogućih interpretacija, tj. B–struktura, beskonačan je (već je i broj mogućih univerzuma beskonačan). To znači da bi za doslovno testiranje implikacije $\Gamma \models \Delta$ trebalo izračunati vrijednosti istinitosti formi iz Γ i Δ u beskonačno mnogo B–struktura. To ne izgleda kao algoritam koji će u konačno mnogo koraka odgovoriti vrijedi li $\Gamma \models \Delta$. Ako algoritam uopće postoji, sigurno je sofisticiraniji.

Promotrimo još jednom primjer konkretne implikacije s početka ovog odjeljka, za koju smo u uvodnom poglavlju tvrdili da je bulovska. Njezinu bulovsku formu opisali smo u prethodnom odjeljku:

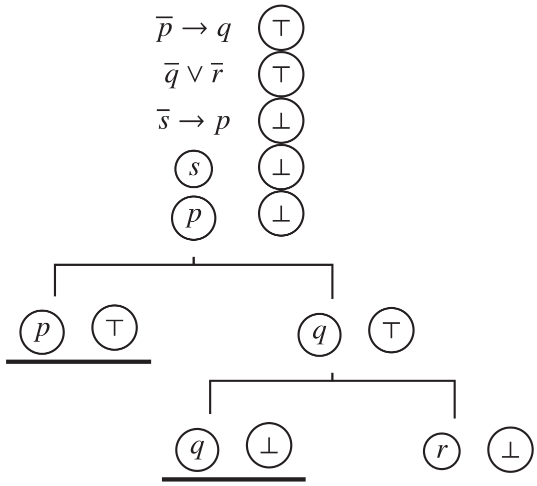
$$\begin{array}{ll} \text{(B1)} & -\exists KO\overline{V} \to \exists K\overline{O} \\ \text{(B2)} & -\exists K\overline{O} \vee -\exists K\overline{V} \\ \hline \text{(BK)} & -\exists K\overline{O}V \to \exists KO\overline{V} \end{array}$$

Njezina IF–forma je:

$$\begin{array}{ll} \text{(IF1)} & \overline{p} \to q \\ \text{(IF2)} & \overline{q} \vee \overline{r} \\ \hline \text{(IFK)} & \overline{s} \to p \end{array}$$

Egzistencijske forme B–implikacije su atomarne forme IF–implikacije (označili smo ih malim slovima p, q i r da ih ne brkamo s pojmovnim atomima).

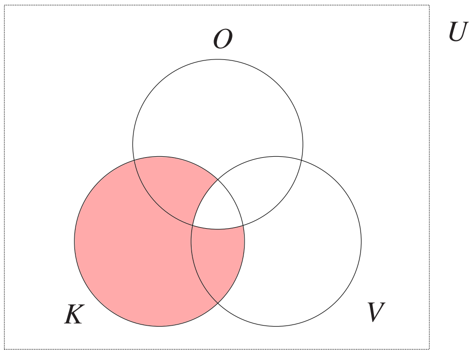
Metodom semantičkih stabala lako možemo ustanoviti da premise (IF1) i (IF2) istinosno-funkcionalno ne impliciraju konkluziju (IFK), tj. da $\overline{p} \to q, \overline{q} \vee \overline{r} \not\models \overline{s} \to p$.



S najdesnije grane možemo iščitati interpretaciju u kojoj su obje premise istinite, a konkluzija je ipak neistinita:

p	q	r	s
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\exists KO\overline{V}$	$\exists K\overline{O}$	$\exists K\overline{V}$	$\exists K\overline{O}V$

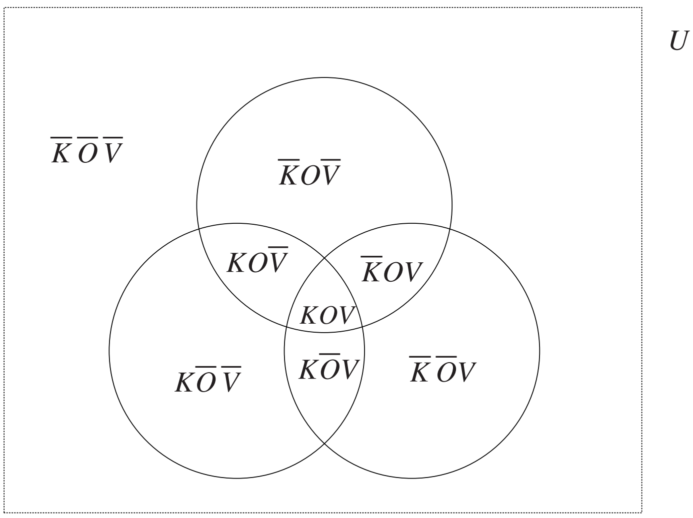
Naravno, u našoj IF–analizi nismo uzeli u obzir bulovsku formu od p, q, r i s koja je prikazana u zadnjem redu gornje tablice. Ako i nju uzmemo u obzir onda vidimo da interpretacija $(p, q, r, s) = (\bot, \top, \bot, \bot)$ nije moguća, što znači da je implikacija ipak bulovski valjana. Naime, $r = \exists K\overline{V} = \bot$ i $s = \exists K\overline{O}V = \bot$ u kontradikciji je s $q = \exists K\overline{O} = \top$, što dokazujemo sljedećim Vennovim dijagramom.



FiXme: pazi na to na

Ako $r = \exists K\overline{V} = \bot$ i $s = \exists K\overline{O}V = \bot$, što prikazuju horizontalna i vertikalna iscrtkavanja, onda je i $\exists K\overline{O} = \bot$, jer je područje $K\overline{O}$ iscrtkano. To je u kontradikciji s $q = \exists K\overline{O} = \top$.

Egzistencijske forme $\exists K\overline{O}$, $\exists K\overline{V}$ i $\exists K\overline{O}V$ ne mogu imati proizvoljne, međusobno neovisne interpretacije i to je bio uzrok neuspjeha naše IF–analize (kao dokaza valjanosti implikacije). Međutim, očito je da ćelije $KOV, \overline{K}OV, K\overline{O}V, \ldots$ (na koje K, O i V dijele univerzum $\mathcal{U}$), nešto sadrže ili ne sadrže neovisno jedna o drugoj.



To znači da ćelijske egzistencijske forme $\exists KOV, \exists\overline{K}OV, \exists K\overline{O}V, \ldots$ (u kojima $\exists$ djeluje na potpune konjunkcijske blokove literala dane forme) mogu imati proizvoljne međusobno neovisne interpretacije. Slijedi da su sve moguće interpretacije onih bulovskih formi čije su egzistencijske forme ćelijske, ništa drugo do sve moguće IF–interpretacije njenih ćelijskih egzistencijskih formi. Zato se testiranje takvih ćelijskih formi svodi na standardne IF–testove.

Štoviše, svaka je bulovska forma ekvivalentna nekoj ćelijskoj bulovskoj formi, pa opisana redukcija na IF–testove vrijedi za sve bulovske forme. Dovoljno je dokazati da je svaka egzistencijska forma $\exists A$ ekvivalentna ćelijskoj formi. To slijedi iz činjenice da A ima ekvivalentnu potpunu alternacijsku normalnu formu $K_1 \vee \ldots \vee K_n$ (u kojoj je svaki K_i potpuni konjunkcijski blok literala čitave forme) i da je

$$\exists(K_1 \vee \ldots \vee K_n) \Leftrightarrow \exists K_1 \vee \ldots \exists K_n\,.$$

Zadnja ekvivalencija očito vrijedi, jer nečega ima u uniji svih K_i akko nečega ima u bar jednom K_i.

Konačno ipak možemo formulirati algoritam kojim se testira implikacija u bulovskoj logici, a čiju je ideju prvi objavio Herbrand 1930.g.

HERBRANDOV ALGORITAM ZA BULOVSKU IMPLIKACIJU

Ako su Γ i Δ konačni skupovi bulovskih formi izgrađenih od atoma $P_1, \dots, P_n$ onda implikaciju $\Gamma \models \Delta$ testiramo tako da u svim formama iz Γ i Δ:

(i) Egzistencijske forme $\exists A$ proširimo do ekvivalentnih egzistencijskih formi koje sadrže sve atome $P_1, \dots, P_n$ ($\wedge$-množenjima pojmovne forme A s $P_i \vee \overline{P_i}$ ako atom P_i nije u A).

(ii) Pojmovne forme na koje djeluje $\exists$ prevodimo u ekvivalentne potpune alternacijske normalne forme.

(iii) Operator $\exists$ distribuiramo kroz sve alternacije.

(iv) Egzistencijske forme dobivene u prva tri koraka zamjenimo IF–atomima $p, q, \dots$. Tako smo skupove B–formi Γ i Δ transformirali u skupove IF–formi Γ' i Δ'.

(v) Standardnim IF–testovima testiramo $\Gamma' \models \Delta'$. Što zaključimo o $\Gamma' \models \Delta'$ vrijedi i za $\Gamma \models \Delta$.

Postupak ilustriramo na našem uvodnom primjeru:

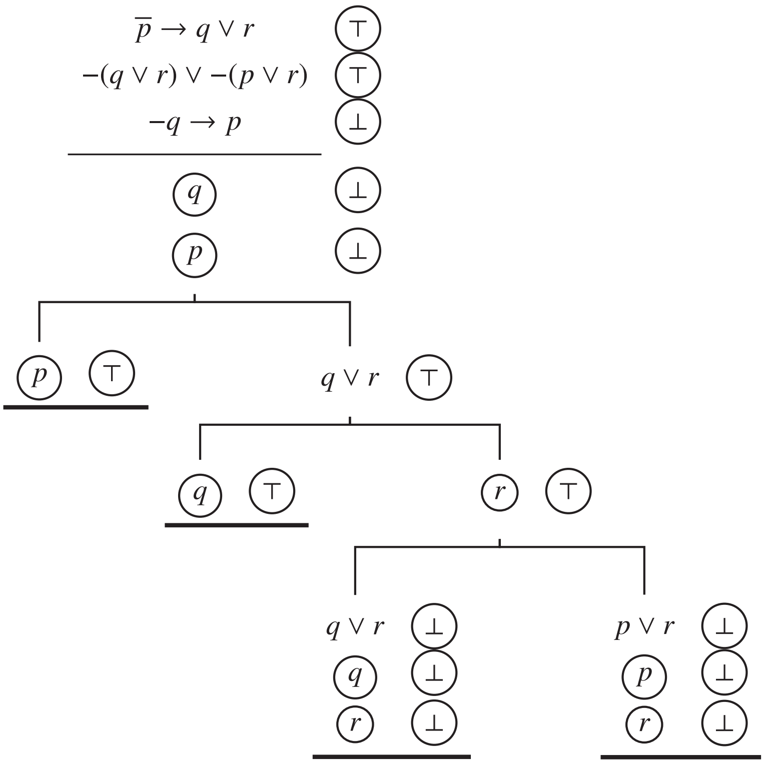
$$\begin{array}{ll}
\text{(B1)} & -\exists KO\overline{V} \to \exists K\overline{O} \\
\text{(B2)} & -\exists K\overline{O} \vee -\exists K\overline{V} \\
\hline
\text{(BK)} & -\exists K\overline{O}V \to \exists KO\overline{V}
\end{array}$$

(i)
$$\begin{array}{c}
-\exists KO\overline{V} \to \exists K\overline{O}(V \vee \overline{V}) \\
-\exists K\overline{O}(V \vee \overline{V}) \vee -\exists K\overline{V}(O \vee \overline{O}) \\
\hline
-\exists K\overline{O}V \to \exists KO\overline{V}
\end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{c}
-\exists KO\overline{V} \to \exists(K\overline{O}V \vee K\overline{O}\,\overline{V}) \\
-\exists(K\overline{O}V \vee K\overline{O}\,\overline{V}) \vee -\exists(K\overline{V}O \vee K\overline{V}\,\overline{O}) \\
\hline
-\exists K\overline{O}V \to \exists KO\overline{V}
\end{array}$$

(iii)
$$\begin{array}{c}
-\exists KO\overline{V} \to \exists K\overline{O}V \vee \exists K\overline{O}\,\overline{V} \\
-(\exists K\overline{O}V \vee \exists K\overline{O}\,\overline{V}) \vee -(\exists K\overline{V}O \vee \exists K\overline{V}\,\overline{O}) \\
\hline
-\exists K\overline{O}V \to \exists KO\overline{V}
\end{array}$$

(iv)
$$\begin{array}{c}
\overline{p} \to q \vee r \\
-(q \vee r) \vee -(p \vee r) \\
\hline
\overline{q} \to p
\end{array}$$



Sve su se grane zatvorile što znači da $\overline{p} \to q \vee r, -(q \vee r) \vee -(p \vee r) \models -q \to p$. No onda i $-\exists KO\overline{V} \to \exists K\overline{O}, -\exists K\overline{O} \vee -\exists K\overline{V} \models -\exists K\overline{O}V \to \exists KO\overline{V}$.

3.3 Kvantifikacijske forme

U prirodnim jezicima opće pojmove možemo izraziti imenicama, pridjevima, glagolima itd. (usp. početne primjere u 3.1). Frege je, u drugoj polovici 19.st., ukazao na to da svaku tvrdnju o nekom objektu možemo shvatiti kao predikaciju nekog općeg pojma tom objektu; čak i onda ako je tvrdnja izrazito složena i ne izražava taj pojam jednostavnom imenicom, pridjevom, glagolom itd. Promotrimo sljedeću tvrdnju:

Petar se posvađao s Lukom jer je Luka bio u vezi s drugom ženom njegovog mlađeg brata.

Na prvi pogled nije jasno koji pojam prediciran Petru izražava isto što i gornja tvrdnja. Ipak prirodni jezici imaju sredstvo za izgradnju takvih pojmova. To su relativne rečenice (koje bi točnije bilo zvati relativnim pojmovima), u našem slučaju:

onaj koji se posvađao s Lukom jer je Luka bio u vezi s drugom ženom njegovog mlađeg brata

U logici zamjenice onaj, koji, ovaj itd. označavamo s x, y, z itd. i zovemo ih varijablama. Tako naša relativna rečenica postaje nešto jasnija:

x takav da se x posvađao s Lukom jer je Luka bio u vezi s drugom ženom x-ovog mlađeg brata

(npr. sada je jasnije na koga se odnosi "njegov" iz prethodne formulacije).

Složen opći pojam "x takav da $\ldots x\ldots$", koji je dobiven iz rečenice "$\ldots x\ldots$", u logici zovemo **apstraktom** i označavamo s $\{x : \ldots x\ldots\}$. (Naravno, ako je rečenica "$\ldots x\ldots$" jednostavna imenska, pridjevska ili slična predikacija, onda apstrakt postaje nepotrebno složen izraz jednostavnog imenskog, pridjevskog ili sličnog pojma. Na primjer, $\{x : x$ je logičar$\}$=logičar, $\{x : x$ je lijep$\}$=lijep itd.)

Ako apstrakt prediciramo nekom objektu dobivamo tvrdnju koja je ekvivalentna početnoj tvrdnji o tom objektu. Na primjer, "Petar je x takav da se x posvađao s ..." ekvivalentna je tvrdnji "Petar se posvađao s ..."; ili općenito:

$$\{x : \ldots x\ldots\}a \quad \Leftrightarrow \quad \ldots a\ldots$$

(Predikacija pojma P objektu a, Pa, katkada se označava s $a \in P$ i tada vrijedi ekvivalencija: $a \in \{x : \ldots x\ldots\} \Leftrightarrow \ldots a\ldots$. Primjetimo da je $\in$ kopula koja veže singularni pojam (tj. individuu a) s općim pojmom P; za razliku od kopula $\subseteq$ i $=$ koje su vezale opće pojmove. Primjetimo nadalje da kopula $\in$, kako je ovdje koristimo, ima značenje potpuno određeno gornjom ekvivalencijom. To znači da apstrakt može biti samo desno od kopule $\in$, dok lijevo od nje nema značenje. Tek teorija skupova daje značenje izrazima oblika $\{x : \ldots x\ldots\} \in P$, pretvarajući apstrakte iz općih pojmova u singularne, tj. u individue. Time teorija skupova prelazi okvire logike. Ako baš želimo i u logici apstrakte zvati skupovima onda je to Quineov virtualni govor o skupovima, kojem je svo značenje sadržano u gornjoj ekvivalenciji.)

Rečenice oblika "$\ldots x\ldots$", koje na mjestima za imena sadrže varijable (tj. zamjenice), zovemo otvorenim rečenicama. One se razlikuju od zatvorenih rečenica po tome što nisu ni istinite ni neistinite. One su istinite ili neistinite ovisno o tome što je x.

Otvorene rečenice možemo zatvoriti na više načina. Najjednostavniji je supstitucija imena na mjesto varijable; npr. tako višeznačna otvorena rečenica "x se posvađao s ..." prelazi u jednoznačnu zatvorenu rečenicu "Petar se posvađao s ...". Drugi je način apstrakcija pojma iz otvorene rečenice; tako na primjer višeznačna otvorena rečenica "x se posvađao s ..." prelazi u jednoznačni pojam $\{x : x$ se posvađao s$\ldots\}$. Budući da pojam $\{x : \ldots x\ldots\}$ više ne ovisi o x kažemo da je varijabla x vezana u apstraktu $\{x : \ldots x\ldots\}$. Da apstrakt više ne ovisi o x vidimo i po tome što mu se značenje ne mijenja ako x zamjenimo nekom drugom varijablom y; npr. $\{x : x$ je logičar$\} = \{y : y$ je logičar$\}$= logičar.

Koristeći se vezom apstrakata i otvorenih rečenica lako je definirati istinosne funkcije pojmovnih formi uz pomoć standardnih istinosnih funkcija rečeničnih formi (usp. odjeljak 3.1):

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= \{x : -Ax\},\\
A \wedge B &= \{x : Ax \wedge Bx\},\\
A \vee B &= \{x : Ax \vee Bx\},\\
A \rightarrow B &= \{x : Ax \rightarrow Bx\} \text{ itd.}
\end{aligned}$$

Za proizvoljnu istinosnu funkciju $F(A, \ldots, B)$ imamo:

$$F(A, \ldots, B) = \{x : F(Ax, \ldots, Bx)\}.$$

Osim istinosno funkcionalnim veznicima na apstrakte (koji su pojmovi odnosno pojmovne forme) možemo djelovati operatorima $\exists$ i $\forall$ ili ih vezati operatorima $\subseteq$ i $=$. Tako dobivamo rečenice odnosno rečenične forme bulovskoga tipa, kakve smo već razmatrali.

Na Fregeovom tragu, u prvoj polovici 20.st. u logici se ustalio običaj da se kao operatori koriste isključivo $\exists$ i $\forall$, tj. da se apstrakti pojavljuju samo onda kada na njih djeluju $\exists$ i $\forall$:

$$\exists x\{x : \ldots x \ldots\} \quad \text{i} \quad \forall x\{x : \ldots x \ldots\}.$$

Tako ograničena upotreba apstrakta prirodno vodi k tome da ih potpuno izbacimo, jer gornje rečenične forme možemo dobiti i neposrednom primjenom operatora "$\exists x$" i "$\forall x$" na otvorenu rečenicu "$\ldots x \ldots$". Tako $\exists\{x : \ldots x \ldots\}$ postaje $\exists x(\ldots x \ldots)$, a $\forall\{x : \ldots x \ldots\}$ postaje $\forall x(\ldots x \ldots)$ i to je način kojim se koristi suvremena logika kada definira svoje kvantifikacijske forme.

Mnogo važniji Fregeov korak, koji je postao ključnim korakom suvremene logike, jest pomak od monadskih pojmova (npr. "logičar", "lijep” i “hoda"), koji su istiniti ili neistiniti o pojedinim objektima, prema poliadskim pojmovima, koje najčešće zovemo relacijama, i koji su istiniti ili neistiniti o parovima objekata, ili njihovim trojkama, četvorkama itd. Dakle, osim monadskih formi oblika Ha (koji ima rečenica "Ante hoda"), suvremena logika uzima u obzir i poliadske forme: diadske oblika Pab (koji ima rečenica "Ante pomaže Borisu"), triadske oblika $Pabc$ (koje ima rečenica "Ante posuđuje kosilicu Borisu") itd. Promjena redoslijeda imena ili varijabli u poliadskim formama mijenja njihovo značenje, Pab i Pba na znače isto (u prvom slučaju Ante pomaže Borisu, a u drugom Boris Anti). To znači da su poliadski pojmovi istiniti ili neistiniti o **uređenim** parovima, trojkama, četvorkama itd.

Poliadske forme omogućuju da se izrazi valjana forma nekih argumenata koji nemaju valjanu bulovsku (tj. monadsku) formu. Dakle, valjanost takvih argumenata možemo dokazati samo poliadski. Na primjer, takav je ovaj vrlo jednostavni argument:

$$\frac{\text{Sve elipse su krivulje.}}{\text{Tko god crta elipse crta krivulje.}}$$

Premisa ima monadsku formu $\forall x(Ex \to Kx)$, tj. bulovsku formu $\forall(E \to K)$. Konkluzija ima monadsku formu $\forall x(Fx \to Lx)$, tj. bulovsku formu $\forall(F \to L)$. Naravno, E je elipsa, K je krivulja, F je onaj koji crta elipse, a L onaj koji crta krivulje. Međutim, monadska forma argumenta

$$\frac{\forall x(Ex \to Kx)}{\forall x(Fx \to Lx)}$$

očito nije valjana, pa ne može objasniti jednako očitu valjanost našeg konkretnog argumenta. Ona se krije u dijadskoj formi Cyx, koju ima relacija "y crta x". Uz njenu pomoć lako prepoznajemo $\exists x(Ex \wedge Cyx)$ kao formu od " y crta elipse" i $\exists x(Kx \wedge Cyx)$ kao formu od "y crta krivulje". Poliadska forma našeg argumenta je:

$$\frac{\forall x(Ex \to Kx)}{\forall y(\exists x(Ex \wedge Cyx) \to \exists x(Kx \wedge Cyx))}$$

i poliadska će logika lako objasniti njegovu valjanost.

U prirodnim jezicima relacije možemo izraziti glagolima, pridjevima itd. (npr. Ante pomaže Borisu; Krk je veći od Paga). Frege je, naravno, ukazao i na to da svaku tvrdnju o više objekata možemo shvatiti kao relaciju među tim objektima. Na primjer, našu staru tvrdnju:

Petar se posvađao s Lukom jer je Luka bio u vezi s drugom ženom Petrovog mlađeg brata.

možemo shvatiti kao relaciju koja veže Petra i Luku. Radi se o relaciji:

x i y su takvi da se x posvađao s y jer je y bio u vezi s drugom ženom x-ovog mlađeg brata.

koju opet možemo zapisati u obliku apstrakta:

$$\{xy : x \text{ se posvađao s } y \text{ jer} \ldots\},$$

koji nastaje apstrakcijom iz otvorene rečenice:

x se posvađao s y jer je y bio u vezi s drugom ženom x-ovog mlađeg brata.

Odbacimo li uporabu apstrakata, kako su to učinili Frege i suvremena logika, onda otvorene rečenice preuzimaju njihovu ulogu. Otvorena rečenica sa samo jednom varijablom (koja se može pojavljivati i više puta) predstavlja 1-mjesni ili monadski predikat (tj. opći pojam) koji je istinit ili neistinit o pojedinim objektima; naime, iz nje se supstitucijom jednog imena na sva mjesta na kojima se pojavljuju primjerci varijable dobija rečenica koja je istinita ili neistinita. Otvorena rečenica s dvije varijable (koje se mogu ponavljati i više puta) predstavlja 2-mjesni ili diadski predikat (tj. binarnu relaciju) koji je istinit ili neistinit o uređenim parovima objekata; naime, iz nje se supstitucijom uređenog para imena, tako da se prvo ime supstituira na mjesta svih primjeraka prve varijable, a drugo na mjesta svih primjeraka druge varijable, dobija rečenica koja je istinita ili neistinita. Sasvim općenito: otvorena rečenica koja sadrči n različitih varijabli predstavlja n-mjesni predikat koji je istinit ili neistinit o uređenoj n-torci objekata. Tu možemo uključiti i 0-mjesne predikate, dakle rečenice bez varijabli, koje su naprosto istinite ili neistinite.

Kao atomarne imenske forme koristili smo i dalje ćemo koristiti mala početna slova abecede:

$$a, b, c, d, e, \ldots;$$

kao varijable mala krajnja slova abecede:

$$x, y, z, u, v, \ldots;$$

a kao atomarne predikatske forme velika srednja slova abecede:

$$F, G, H, P, Q, \ldots.$$

Atomarna predikatska forma kojoj slijedi jedna ili više atomarnih imenskih formi (npr. Fa ili Gab) predstavlja atomarnu zatvorenu rečeničnu formu, a ako joj slijedi jedna ili više varijabli (npr. Fx ili Gxy) onda predstavlja atomarnu otvorenu rečeničnu formu. Miješane atomarne forme, npr. Gxb, također su otvorene čim sadrže bar jednu varijablu. Kad precizno definiramo kvantifikacijske forme svaki će atomarni predikat imati indeks koji mu određuje "mjesnost"; dakle 0-mjesni će biti $F^0, G^0, \ldots$, 1-mjesni $F^1, G^1, \ldots$, 2-mjesni $F^2, G^2, \ldots$, itd. No, u praksi indekse nećemo zapisivati jer je iz broja varijabli i/ili imena koje slijede predikatu jasno koja mu je "mjesnost". (Ta konvencija znači da u formi $Fa \wedge Fab$ nemamo dva primjerka predikata F, nego jednomjesni predikat F^1 i dvomjesni predikat F^2 koji su različiti.)

Kvantifikaciju otvorenih formi provodimo s uobičajenim kvantifikatorima: univerzalnim $\forall$ i partikularnim ili egzistencijalnim $\exists$. Njihova značenja su "svaki" ($\forall$) i "neki " ili "postoji" ($\exists$), no oni gledano gramatički ne djeluju na isti način kao u hrvatskom i drugim prirodnim jezicima.

Krenemo li od otvorene rečenice sa samo jednom varijablom x, u hrvatskom iz nje možemo načiniti običnu rečenicu supstitucijom imena ili kvantifikatora na mjesto varijable. Na primjer,

x je dobar.

Ivan je dobar.

Svatko je dobar.

Netko je dobar.

U logici nikada ne kvantificiramo na taj način. Varijablu x ostavljamo gdje je i bila, a kvantifikator prefiksiramo otvorenoj rečenici dodajući primjerak od x. Time pokazujemo da je kvantificirana varijabla x ili, stručnije kazano, da kvantifikator veže varijablu x. U našem primjeru:

$$\forall x(x\ je\ dobar),$$
$$\exists x(x\ je\ dobar).$$

Kvantifikatori "svatko" i " netko" zapravo ni u prirodnim jezicima ne spadaju u gramatičke kategorije imenica (usprkos površnoj sličnosti rečenica "Ivan je dobar", " Svatko je dobar" i "‘Netko je dobar"’). Naime, lako je naći primjere koji ih jasno čine gramatičkom kategorijom različitom od imenica. Na primjer, rečenice:

Ivan je dobar ili prijetvoran.
Ivan je dobar ili je Ivan prijetvoran.

očito znače isto, dok rečenice:

Svatko je dobar ili prijetvoran.
Svatko je dobar ili je svatko prijetvoran.

očito ne znače isto. Prve dvije imaju ekvivalentne forme: $(D \vee P)i \Leftrightarrow Di \vee Pi$; dok druge dvije imaju neekvivalentne forme $\forall x(Dx \vee Px) \not\Leftrightarrow \forall xDx \vee \forall xPx$. Razlika drugog para formi očito je u dosegu kvantifikatora. U logičkom "prefiksiranju" doseg je jasno vidljiv. U "imenskom" pristupu, kakav nalazimo u hrvatskom i drugim prirodnim jezicima, dosezi kvantifikatora nisu tako očigledni. (Često su i neodređeni; usp. rečenicu "Na toj konferenciji svi su matematičari ili logičari".)

U skladu s Boole-Fregeovim pristupom mi ćemo kvantifikacijske forme definirati neovisno od njihove veze s prirodnim jezicima. Zatim ćemo definirati interpretacije kvantifikacijskih formi, te istinitost forme u interpretaciji (što je ključni logički pojam). Slijedit će standardne definicije implikacije, konzistentnosti, valjanosti itd. i nalaženje algoritama za njihovo testiranje. Kao i do sada, neformalne argumente izražene prirodnim jezikom smatrat ćemo valjanima ako se mogu shvatiti kao konkretne interpretacije valjanih formalnih argumenata, a tek za tu primjenu opet će biti važna veza s prirodnim jezicima. No, to su teme naših sljedećih poglavlja. Sada se vraćamo preciznoj definiciji kvantifikacijskih formi.

KVANTIFIKACIJSKE FORME

Kvantifikacijske forme izgrađene su od:

- individualnih varijabli $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$;
- individualnih konstanti $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$;
- predikatskih konstanti $P^n_o, P^n_1, P^n_2, P^n_3, \ldots$, za sve $n \geq 0$;
- logičkih konstanti $-, \wedge, \vee, \rightarrow, \exists, \forall$ i
- zagrada (,)

prema sljedećim induktivnim pravilima (u kojima individualnu varijablu ili konstantu zovemo termom):

(i) n-mjesni predikat kojem slijedi n terma je (atomarna) forma.

(ii) Ako su F i G forme onda su $-F$, $(F \wedge G), (F \vee G)$ i $(F \rightarrow G)$ forme.

(iii) Ako je F forma i x varijabla onda su $\exists xF$ i $\forall xF$ forme.

Forme koje sadrže samo 0-mjesne predikate zovemo **propozicijskim formama**.

Forme koje sadrže samo 1-mjesne predikate zovemo **monadskim formama**.

Individualne odnosno predikatske konstante zovemo konstantama, jer one u pojedinoj strukturi u kojoj interpretiramo naše forme imaju konstantne vrijednosti, koje su objekti odnosno relacije te strukture. Logičke konstante su konstante u još jačem smislu jer one imaju isto značenje (tj. iste vrijednosti) u svim strukturama.

Varijable i konstante označili smo samo s po jednim slovom: x, a i P i indeksima: $0, 1, 2, \ldots$, jer će to olakšati teorijska razmatranja u sljedećim poglavljima (npr. važnu metodu aritmetizacije sintakse). U praksi ćemo i dalje koristiti i ostala slova $(y, z, \ldots; b, c, \ldots; Q, R, \ldots)$, koja možemo shvatiti kao meta-zapise ili identificirati sa slovima iz definicije (npr. $x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, \ldots; a_0 = a, a_1 = b, a_2 = c, \ldots; P_0 = P, P_1 = Q, P_2 = R, \ldots$).

Napominjemo još da ćemo i dalje koristiti sve pokrate iz IF–logike. Dakle, ako su F, G i H kvantifikacijske forme, onda je $F\,\exists xG\,\forall yH$ pokrata za $((F \wedge \exists xG) \wedge \forall yH)$; $-\exists xF \vee G \rightarrow H$ je pokrata za $((-\exists xF \vee G) \rightarrow H)$ itd.

Naš odabir logičkih konstanti je fleksibilan. Umjesto veznika $-, \wedge, \vee, \rightarrow$ mogli smo odabrati i bilo koji drugi potpuni skup IF–veznika (npr. $\wedge, -$ ili $\uparrow$ itd.). Isto vrijedi i za kvantifikatore; mogli smo se ograničiti samo na $\exists$ (jer je $\forall \Leftrightarrow -\exists-$) ili samo na $\forall$ (jer je $\exists \Leftrightarrow -\forall-$). Dakle, mi smo definirali $\{-, \wedge, \vee, \rightarrow, \exists, \forall\}$–forme i to je tek jedna od mogućnosti. (Često ćemo se koristiti ekvivalentnim, a jednostavnijim $\{-, \vee, \exists\}$-formama.)

Pravila izgradnje kvantifikacijskih formi imaju neke neuobičajene posljedice. Čak je i pravilo (i), za atomarne forme, pomalo neobično. Ono osim formi oblika Pa koje imaju vrijednost istinitosti u strukturi u kojoj ih interpretiramo, dopušta i forme oblika Px koje je nemaju. Neki logičari ih zato ne smatraju legitimnim formama. No, veće probleme donosi pravilo (iii). Ono dopušta i tzv. praznu kvantifikaciju; stavljanje prefiksa $\exists x$ ili $\forall x$ pred formu F koja uopće ne sadrži varijablu x. Na primjer, i ovo su legitimne forme: $\forall xPyy$, $\exists yPax$ i sl. Da bismo bolje razmotrili ovaj i slične probleme, uvodimo još neke definicije.

DOSEG, SLOBODNA I VEZANA VARIJABLA, OTVORENA I ZATVORENA FORMA

Doseg nekog primjerka kvantifikatora (ili veznika) u nekoj formi je najkraća podforma u kojoj se on pojavljuje.

Za primjerak kvantifikatora $\exists$ ili $\forall$ kojem slijedi neka varijabla x kažemo da je x-kvantifikator.

Primjerak neke varijable x u formi F je **slobodan u** F, još kažemo da se x na tom mjestu pojavljuje slobodno, ako na tom mjestu nije u dosegu nijednog x-kvantifikatora u F. Inače je taj primjerak **vezan u** F, tj. x se na tom mjestu pojavljuje vezano.

Zatvorena forma je ona u kojoj se nijedna varijabla ne pojavljuje slobodno.

Otvorena forma je ona koja nije zatvorena.

Primjerak kvantifikacije $\forall x$ ili $\exists x$ je **prazan** ako u njegovom dosegu nema primjerka varijable x koji je slobodan.

Promotrimo na primjer formu:

$$\exists x(-Pxy \vee \forall y(Rx \to Ry)).$$

Svi primjerci varijable x u toj formi su vezani. S druge strane, primjerak od y koji se nalazi u Pxy je slobodan, a onaj u Ry je vezan. (Primjerke varijabli koji stoje neposredno uz kvantifikatore uvijek držimo vezanima, dakle i y uz $\forall$ i x uz $\exists$.) Uočimo da je svaki pojedini primjerak varijable u nekoj formi ili slobodan ili vezan i ne može biti oboje. Nasuprot tome, varijabla može biti i slobodna i vezana u istoj formi, ako ima i slobodne i vezane primjerke u toj formi. U našoj formi varijabla y je vezana, jer je njen primjerak u Ry vezan, ali i slobodna, jer je njen primjerak u Pxy slobodan. Nadalje, naša forma je otvorena jer ima slobodnu varijablu y.

Vratimo se sada prije spomenutim problemima. Riječ je o legitimnosti otvorenih formi (npr. Px) i praznih kvantifikacija (npr. $\forall xPyy$, $\exists yPax$). Ako ih ne želimo dopustiti dovoljno je pravila (i) i (iii) u našoj definiciji kvantifikacijskih formi zamijeniti s (i’) i (iii’):

(i’) n-mjesni predikat kojem slijedi n individualnih konstanti je (atomarna) forma.

(iii’) Ako je F forma koja sadrži individualnu konstantu a, i ako je $F(x/a)$ rezultat supstitucije varijable x za sve primjerke od a, onda su $\exists xF(x/a)$ i $\forall xP(x/a)$ forme, pod uvjetom da $F(x/a)$ već nije forma.

Posljednji uvijet u (iii’) osigurava da je bar jedan primjerak od x u $F(x/a)$ slobodan, tj. da kvantifikacija u (iii’) nikada nije prazna. Dakle, uz tako revidirana pravila (i) i (iii) nijedna forma nema slobodnih varijabli ni praznih kvantifikacija.

S jedne strane je primamljivo otvorene forme ne smatrati formama, budući da im ne možemo pridati vrijednost istinitosti. No, s druge strane, otvorene forme ne možemo potpuno ignorirati jer se na njih ipak često moramo pozivati (usp. čak (iii’)), pa ih nekako moramo zvati. Termin "otvorena forma" ustalio se u suvremenoj logici i bilo bi smiješno ne koristiti ga. No onda je prirodno s imenom prihvatiti i ono na što ime upućuje, tj. prihvatiti da su otvorene forme ipak forme. Kada god želimo, lako se možemo ograničiti na forme koje nisu otvorene, tj. na zatvorene forme.

Tako uvjerljivih razloga za prihvaćanje praznih kvantifikacijskih formi ipak nema. No, da bismo ih isključili i ipak zadržali otvorene forme kao forme, pravila (i)-(iii) morali bismo formulirati na bitno složeniji način (morali bismo simultanom indukcijom definirati forme i slobodna pojavljivanja varijabli u formi, što bi zakompliciralo važnu metodu aritmetizacije sintakse u sljedećim poglavljima). Zato ćemo ostati pri našoj početnoj definiciji kvantifikacijske forme, s induktivnim pravilima izgradnje (i)-(iii), koja dopuštaju prazne kvantifikacije. Naravno, tada treba imati na umu da $\forall xF$ i $\exists xF$ u slučaju prazne kvantifikacije znače isto što i F.

Primjetimo na kraju da kvantifikacijske forme kao posebni slučaj uključuju (0-mjesne) propozicijske forme. To su zapravo IF–forme čiju smo logiku već temeljito obradili. Dakle, IF–logika će očito biti dio logike kvantifikacijskih formi. Osim toga, svaku bulovsku formu možemo izraziti ekvivalentnom (1-mjesnom) monadskom formom. Na primjer, bulovsku formu:

$$\forall(P \wedge Q \to R) \vee -\exists(Q \vee R \to \overline{P}) \to -\forall((P \wedge \overline{Q}) \vee R)$$

monadski izražavamo formom:

$$\forall x(Px \wedge Qx \to Rx) \vee -\exists x(Qx \vee Rx \to -Px) \to -\forall x((Px \wedge -Qx) \vee Rx).$$

Princip je očit i sasvim jednostavan. (Primjetimo da smo bulovske forme u prethodnom odjeljku definirali koristeći se samo egzistencijalnim kvantifikatorom $\exists$, no vidjeli smo da je $\forall F$ ekvivalentno s $-\exists\overline{F}$, pa u tom smislu gornja forma jest bulovska.) S druge strane, bar na prvi pogled nije jasno da se svaka monadska forma može izraziti ekvivalentnom bulovskom formom (npr. što bi mogao biti bulovski ekvivalent monadske forme $\exists y\forall x(Px \to Qy)$). Ipak, mi ćemo uskoro pokazati da zaista postoji bulovski ekvivalent svake monadske forme. Dakle, ne samo da će bulovska logika biti dio logike kvantifikacijskih formi (što je očito), nego će se točno poklapati s njenim monadskim fragmentom (što nije tako očito).

3.4 Semantika kvantifikacijskih formi

U prethodnom odjeljku bavili smo se, pretežno, sintaksom kvantifikacijskih formi. Definirali smo kako su one izgrađene od svojih osnovnih elemenata: varijabli, individualnih i predikatskih konstanti, veznika i kvantifikatora. Predmet semantike su **interpretacije** tako definiranog jezika formi. Tek u njima forme dobivaju svoje značenje.

Interpretacije kvantifikacijskih formi bitno su složenije od interpretacija IF-formi, pa i od interpretacija bulovskih formi. Čak postoje dvije različite metode za utemeljenje semantike kvantifikacijskih formi, svaka sa svojim prednostima i manama. Prva se koncentrira samo na pojam istinitosti forme u interpretaciji (kao u logici bulovskih i IF–formi) pa stoga ignorira otvorene forme, dok druga i njima pridaje značenje. Mi ćemo objasniti obje metode da bismo se, po potrebi, mogli služiti jednom ili drugom.

Počet ćemo s onim što je zajedničko i jednoj i drugoj metodi. Interpretacija uvijek ima svoju domenu koju zovemo univerzumom rasprave, budući da ona sadrži sve stvari o kojima naš jezik formi govori u toj interpretaciji. Univerzum može biti bilo koji skup U, konačan ili beskonačan, jedini uvjet je da nije prazan. Sljedeći je korak interpretiranje individualnih i predikatskih konstanti na odabranom univerzumu. Svakoj individualnoj konstanti moramo pridružiti neki objekt univerzuma, čije je ona ime. (Naša je pretpostavka da ime uvijek uspješno imenuje, tj. da uvijek postoji objekt koji ono imenuje. U prirodnim jezicima to nije uvijek tako; usp. Zeus, Hamlet, itd.) Slično, svakoj predikatskoj konstanti pridružujemo skup objekata o kojima je ona istinita. Dakle, jednomjesnoj predikatskoj konstanti pridružujemo skup objekata iz U (tj. podskup od U), dvomjesnoj pridružujemo skup uređenih parova objekata iz U (tj. podskup od U^2), tromjesnoj skup uređenih trojki (tj. podskup od U^3), itd. Dopuštamo svaki skup objekata iz univerzuma, ili njihovih parova, trojki itd. Na primjer, jednomjesnom predikatu možemo pridružiti cijeli univerzum U (tj. predikat možemo interpretirati kao istinit o svemu), ili prazan skup $\emptyset$ (tj. predikat možemo interpretirati kao istinit ni o čemu)), ili kao bilo što između te dvije krajnosti. Propozicijske, 0-mjesne, konstante interpretiramo kao u IF–logici, dakle pridružujemo im vrijednosti istinitosti $\top$ ili $\bot$.

Semantičku vrijednost koju pridružujemo konstanti γ označit ćemo s $|\gamma|$ bez obzira radi li se o individualnoj ili predikatskoj konstanti (ili kasnije čak o formi). Ako razmatramo različite interpretacije $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$, onda ćemo semantičke vrijednosti u njima označiti s $|\gamma|_{\mathcal{U}}$ i $|\gamma|_{\mathcal{V}}$. Također, ako je U univerzum, s U^n (gdje je $n > 0$) označavamo skup svih uređenih n-torki objekata iz univerzuma U. Uz te oznake imamo sljedeću definiciju interpretacije jezika kvantifikacijskih formi, koju zovemo relacijskom strukturom:

RELACIJSKA STRUKTURA
(INTERPRETACIJA KVANTIFIKACIJSKIH FORMI)

Relacijska struktura $\mathcal{U}$ sastoji se od univerzuma U, koji je neprazni skup i pridruženja $|\ |$ koje imenskim i predikatskim konstantama pridružuje sljedeće objekte:

(i) za individualnu konstantu a: $|a| \in U$,

(ii) za 0-mjesnu predikatsku konstantu P^0 : $|P^0| = \top$ ili $|P^0| = \bot$,

(iii) za n-mjesnu predikatsku konstantu P^n : $|P^n| \subseteq U^n$.

(Pridruženje $|\ |$ može biti zadano na svim ili samo nekim konstantama, tj. može biti totalno ili parcijalno.)

Tako zadanu strukturu $\mathcal{U}$ označavamo s:

$$\mathcal{U} = (U; |\ |) = (U; |a|, \ldots; |P^0|, \ldots; |P^1|, \ldots; |P^2|, \ldots; \ldots).$$

Vrlo često $|\gamma|$ identificiramo s γ, pa, iako neprecizno, strukturu $\mathcal{U}$ označavamo i s $(U; a, \ldots; P^0, \ldots; P^1, \ldots; P^2, \ldots; \ldots)$.

(Kasnije ćemo se baviti i općim strukturama, koje osim predikatskih, tj. relacijskih konstanti, sadrže i operacijske; npr. $+, \cdot, \ldots$. Specijalne strukture koje sadrže samo relacije, a ne i operacije, zovemo relacijskima; dok one koje sadrže samo operacije, a ne i relacije, zovemo operacijskima ili još češće algebarskima.)

Ključni korak u izgradnji logike jest definicija istinitosti forme u strukturi, koju možemo shvatiti i kao proširenje interpretacije $|\ |$ sa konstanti na forme. To će proširenje biti induktivno i većina induktivnih pravila je odmah jasna.

Atomarna zatvorena forma oblika $P^n ab \ldots c$ istinita je u interpretaciji $(U, |\ |)$ ako je $(|a|, |b|, \ldots, |c|) \in |P^n|$ (tj. ako su objekti koje označavaju $a, b, \ldots, c$ u relaciji koju označava P^n). Istinitost zatvorenih formi izgrađenih od IF-veznika svodi se na poznati način na istinitost njihovih zatvorenih komponenti (npr. $|F \wedge G| = \top$ akko $|F| = \top$ i $|G| = \top$ itd). Osnovni problem je kako definirati $|\forall xF|$ i $|\exists xF|$. Pretpostavimo, dakle, da su $\forall xF(x)$ i $\exists xF(x)$ zatvorene forme koje nisu prazno kvantificirane (tj. x, i samo x, je slobodna varijabla u $F(x)$). Osnovna ideja je očito ova: forma $\forall xF(x)$ je istinita akko je predikat predstavljen otvorenom formom $F(x)$ istinit o svim objektima iz U; dok je forma $\exists xF(x)$ istinita akko je taj isti predikat istinit o bar nekom objektu iz U. No tu nastaje problem. Prethodna induktivna pravila za atome i IF–veznike govorila su o istinitosti zatvorenih formi, a ne o istinitosti otvorenih formi o nečemu. Stoga istinitost kvantificiranih formi $\forall xF(x)$ i $\exists xF(x)$ moramo svesti na 1) istinitost zatvorenih primjeraka od $F(x)$, što je naša prva metoda ili 2) prethodna induktivna pravila za atome i IF-veznike moramo proširiti i na otvorene forme, što je naša druga metoda.

Prva metoda polazi od ideje da iz istinitosti forme $\forall xF(x)$ slijedi istinitost jednostavnijih formi oblika $F(a)$, dobivenih supstitucijom bilo koje individualne konstante a na mjesta varijable x. U slučaju da je svaki objekt uz U imenovan nekom konstantom a (tada kažemo da je naša struktura potpuno imenovana), slijedi i obrat: ako su sve forme oblika $F(a)$ istinite, onda je istinita i forma $\forall xF(x)$. No, strukture načešće nisu potpuno imenovane, pa to ne može biti pravilo za istinitost forme $\forall xF(x)$. Rješenje problema nije da jeziku formi dodamo dovoljno imena, kako bismo strukturu mogli potpuno imenovati (iako se teorija modela koristi i time), nego da uzmemo u obzir sve načine na koje možemo interpretirati jednu individualnu konstantu. Ugrubo, $\forall xF(x)$ je istinita akko je $F(a)$ istinita za *sve moguće interpretacije konstante a*. Formulirajmo tu grubu ideju malo preciznije.

Mi pokušavamo kvantificiranoj formi pridati vrijednost istinitosti u nekoj interpretaciji U. Da bismo to učinili, trebamo uzeti u obzir i mnoge druge interpretacije koje su *varijante* od U. Za interpretaciju $\mathcal{U}^a_m$ kažemo da je (a/m)-varijanta od U ako se ona od U razlikuje samo po tome što a interpretira kao m, ili se od U uopće ne razlikuje, ako je $|a|_{\mathcal{U}} = m$. (Vrijednost $|a|_{\mathcal{U}}$ inače ne mora biti zadana, dok je vrijednost $|a|_{\mathcal{U}^a_m}$ uvijek zadana.) Sada možemo reći da je forma $\forall xF(x)$ istinita u strukturi $\mathcal{U}$ ako je zatvorena forma $F(a)$ istinita u svakoj njenoj varijanti $\mathcal{U}^a_m$, te da je $\exists xF(x)$ istinita u $\mathcal{U}$ ako je zatvorena forma $F(a)$ istinita u bar nekoj njenoj varijanti $\mathcal{U}^a_m$; sve pod uvjetom da se a ne pojavljuje u $F(x)$. Zadnji uvjet je bitan, jer želimo da sve konstante u $\forall xF(x)$ i $\exists xF(x)$ zadrže svoju izvornu interpretaciju iz $\mathcal{U}$, a da ipak uzmemo u obzir sve moguće interpretacije konstante a koju supstituiramo na mjesto kvantificirane varijable x. Sve u svemu, prvu metodu možemo sažeti u sljedećoj definiciji:

O ZNACI?
pogledati...

ISTINITOST ZATVORENE FORME U STRUKTURI

Istinitost zatvorene forme F u strukturi $\mathcal{U} = (U, |\,|)$, u kojoj je interpretacija $|\,|$ definirana na svim konstantama forme F, označavamo s $\mathcal{U} \models F$ i induktivno definiramo sljedećim pravilima:

(i) $\mathcal{U} \models P^0$ akko $|P^0| = \top$,

(ii) $\mathcal{U} \models P^n a \ldots b$ akko $(|a|, \ldots, |b|) \in |P^n|$,

(iii) $\mathcal{U} \models -F$ akko $\mathcal{U} \not\models F$ (tj. $-\mathcal{U} \models F$),

(iv) $\mathcal{U} \models F \begin{smallmatrix}\wedge\\ \vee\\ \to\end{smallmatrix} G$ akko $\mathcal{U} \models F \begin{smallmatrix}\wedge\\ \vee\\ \to\end{smallmatrix} \mathcal{U} \models G$

(v) $\mathcal{U} \models \begin{smallmatrix}\forall\\ \exists\end{smallmatrix} x F$ akko $\begin{smallmatrix}\forall\\ \exists\end{smallmatrix} m \in U(\mathcal{U}^a_m \models F(a/x))$,

gdje je a individualna konstanta koja se ne pojavljuje u F.

Induktivna pravila (i)-(iii) na jednoznačan način pridružuju vrijednosti istinitosti, $\top$ ili $\bot$, svakoj zatvorenoj formi čije su individualne i predikatske konstante već interpretirane sa $|\,|$. Također je očito da vrijednost $|F|_{\mathcal{U}}$ ovisi samo o vrijednostima $|\gamma|$ koje $\mathcal{U}$ pridaje individualnim i predikatskim konstantama γ sadržanima u F. Drugim riječima, ako je $|\gamma|_{\mathcal{U}} = |\gamma|_{\mathcal{V}}$, za sve konstante γ u F, onda je i $|F|_{\mathcal{U}} = |F|_{\mathcal{V}}$.

Otvorene forme, u ovom pristupu semantici, nemaju semantičke vrijednosti, pa taj pristup možemo zvati "zatvorenom semantikom". Sada prelazimo na drugu metodu, koja pridaje semantičke vrijednosti i otvorenim formama, i koju zato možemo zvati "otvorenom semantikom".

Vrijednost istinitosti zatvorene kvantificirane forme ovisi o "vrijednosti" otvorene forme koja je tom kvantifikacijom zatvorena. No, otvorena forma nema vrijednost istinitosti. Što je, dakle, njena "vrijednost"? Ideja je sljedeća: otvorena forma ima vrijednost istinitosti ako njezine slobodne varijable smatramo imenima, koja imenuju objekte iz U, tj. ako odredimo koju vrijednost istinitosti otvorena forma ima za *svako* moguće pridruženje objekata iz U njenim slobodnim varijablama. Dakle, "vrijednost" otvorene forme s n slobodnih varijabli je skup n-torki objekata o kojima je ona istinita i koji zovemo *ekstenzijom* te forme.

No, naša metoda treba objasniti kako se ekstenzije složenih formi dobijaju iz ekstenzija njenih komponenata, što nije sasvim jednostavno. Promotrimo jedan primjer.

Pretpostavimo da u strukturi U dvomjesna predikatska konstanta P ima vrijednost $|P| = \{(m,n)\}$. (Drugim riječima, u cijelom univerzumu U samo su objekti m i n u relaciji P.) To znači da je $\{(m,n)\}$ ekstenzija otvorenih formi Pxy, Pyx, Pyz, Pyx, ... Koncentrirajmo se na otvorene forme Pxy i Pyx. Budući da one imaju istu ekstenziju slijedi, na primjer, da njihova konjunkcija ne može biti određena samo s ekstenzijama konjunkata, jer $Pxy \wedge Pxy$ očito nema istu ekstenziju kao i $Pxy \wedge Pyx$ (prva je $\{(m,n)\}$, dok je druga prazna; za $m \neq n$). Naime, kada objekte iz U pridružujemo varijablama moramo točno pratiti koji je objekt pridružen kojoj varijabli. Taj postupak zovemo valuacijom varijabli. Na primjer, valuacija koja varijabli x pridružuje objekt m, a varijabli y objekt n, i koju kraće zapisujemo $(x,y/m,n)$, ispunjava (tj. čini istinitom) formu Pxy, ali ne i formu Pyx. S druge strane, relacija $(x,y/n,m)$ ispunjava Pyx, ali ne i Pxy. Konjunkciju Pxy i Pyx očito ne ispunjava nijedna valuacija (ako je $m \neq n$), što i očekujemo.

Dakle, proizvoljne forme (otvorene ili zatvorene) imaju vrijednost istinitosti u nekoj strukturi tek uz neku valuaciju njihovih slobodnih varijabli. Zato ćemo istinitost forme definirati u nekoj valuaciji v na nekoj strukturi $\mathcal{U} = (U, |\ |)$. Takav par strukture i valuacije na njoj zovemo modelom i označavamo

$$\mathcal{M} = (U; v) = ((U, |\ |); v).$$

Valuacija $(x,y,\ldots/m,n,\ldots)$ je funkcija koja varijablama $x,y,\ldots$ pridružuje objekte $m,n,\ldots$ iz U. Ona može biti totalna, tj. definirana na svim varijablama, ili parcijalna, tj. definirana na nekim varijablama. Naravno, da bi otvorena forma imala vrijednost istinitosti, u nekoj valuaciji v na nekoj strukturi $\mathcal{U}$, v mora biti definirana na svim slobodnim varijablama te forme.

Analogno prvoj metodi uvodimo pojam (x/m)-varijante valuacije v koju označavamo s v^x_m. To je valuacija koja varijabli x pridružuje vrijednost m, a svim ostalim varijablama one iste vrijednosti koje im pridružuje v. (Ako model (U,v) označimo s $\mathcal{M}$, onda ćemo model (U, v^x_m) označiti s $\mathcal{M}^x_m$). Očito je sada da je forma $\forall x F(x)$, odnosno $\exists x F(x)$, istinita na strukturi U, ako je $F(x)$ istinita u svakoj (odnosno nekoj) (x/m)-varijanti valuacije v na strukturi U.

Za sljedeću definiciju, koja sažima našu drugu metodu, pogodno je pojam valuacije v na strukturi $(U, |\ |)$ proširiti tako da ona bude definirana i na individualnim konstantama, ali uvijek tako da je $v(a) = |a|$ za svaku individualnu konstantu a.

ISTINITOST FORME U MODELU I STRUKTURI

Istinitost forme F u modelu $\mathcal{M} = (\mathcal{U}; v) = ((U, |\ |); v)$, u kojem je interpretacija $|\ |$ definirana na svim konstantama forme F, a valuacija v na svim njenim slobodnim varijablama, označavamo sa $\mathcal{M} \models F$ i definiramo induktivno sljedećim pravilima:

(i) $\mathcal{M} \models P^0$ akko $|P^0| = \top$,
$\mathcal{M} \models P^n t_1 \ldots t_n$ akko $(v(t_1), \ldots, v(t_n)) \in |P^n|$, za $n > 0$,
(gdje su t_i termi, tj. individualne konstante ili varijable);

(ii) $\mathcal{M} \models -F$ akko $\mathcal{M} \not\models F$, tj: $-\mathcal{U} \models F$,
$\mathcal{M} \models F \wedge G$ akko $\mathcal{M} \models F \wedge \mathcal{M} \models G$,
$\mathcal{M} \models F \vee G$ akko $\mathcal{M} \models F \vee \mathcal{M} \models G$,
$\mathcal{M} \models F \to G$ akko $\mathcal{M} \models F \to \mathcal{M} \models G$;

(iii) $\mathcal{M} \models \forall x F$ akko $\forall m \in U\ (\mathcal{M}^x_m \models F)$,
$\mathcal{M} \models \exists x F$ akko $\exists m \in U\ (\mathcal{M}^x_m \models F)$.

Semantičke vrijednosti konstanti i varijabli koje su u $\mathcal{M}$ zadane s $|\ |$ i v, a gornjim pravilima proširene i na semantičke vrijednosti formi, uniformno ćemo označavati eksponentom $\mathcal{M}$ (dakle $|a|_{\mathcal{M}} = a^{\mathcal{M}}$, $|P|_{\mathcal{M}} = P^{\mathcal{M}}$, $v(x) = x^{\mathcal{M}}$, a $\mathcal{M} \models F$ znači $F^{\mathcal{M}} = \top$.

Forma F je istinita u strukturi $\mathcal{U}$, oznakom $\mathcal{U} \models F$ (ili $F^{\mathcal{U}} = \top$), akko $(\mathcal{U}; v) \models F$ za *svaku* valuaciju v na $\mathcal{U}$.

Ako je F istinita u modelu $(\mathcal{U}; v)$, tj. $(\mathcal{U}; v) \models F$, još se kaže i: "$(\mathcal{U}; v)$ je model *za* (ili *od*) F". To se često zapisuje i ovako: $\mathcal{U} \models F[v]$ i kaže: "Valuacija *v zadovoljava F* u strukturi $\mathcal{U}$".

Ako je $v = (x_i, \dots / x_j, m_i, \dots, m_j)$ onda se $\mathcal{U} \models F[v]$ često zapisuje kao $\mathcal{U} \models F[m_i, \dots, m_j]$.

Ako je X skup formi, onda $\mathcal{U} \models X$ (ili $\mathcal{M} \models X$) znači da $\mathcal{U} \models F$ (ili $\mathcal{M} \models F$) vrijedi za sve F iz X.

Primijetimo da se znak $\models$ u logici koristi dvojako. Za generaliziranu implikaciju i za istinitost u modelu (ili strukturi). To neće dovesti do zabune jer se u prvom slučaju s obje strane od $\models$ nalaze forme, dok je u drugom zapisu lijevo uvijek model (ili struktura), a samo desno su forme.

Kao i prije, induktivna pravila (i) - (iii), u zadanom modelu $\mathcal{M}$, na jednoznačan način pridružuju vrijednost istinitosti $\top$ ili $\bot$ svakoj formi čije su konstante u $\mathcal{M}$ intepretirane sa $|\,|$ i čije su slobodne varijable u $\mathcal{M}$ valuirane s v.

Također je očito da vrijednost od F u $\mathcal{M}$ ovisi samo o vrijednostima koje $\mathcal{M}$ pridaje konstantama i slobodnim varijablama u F. Dakle, ako modeli $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ konstantama i slobodnim varijablama od F pridaju iste vrijednosti, onda ti modeli i formi F pridaju istu vrijednost, tj. onda je $F^{\mathcal{M}} = F^{\mathcal{N}}$.

Primjetimo nadalje da je struktura U specijalni slučaj modela $\mathcal{M} = (U; v)$ u kojem valuacija v nije definirana ni na jednoj varijabli. Zato su vrijednosti istinitosti zatvorenih formi, koje nemaju slobodnih varijabli, dobro definirane u strukturama. U tom specijalnom slučaju očito je da su definicije istinitosti *zatvorene* forme u našem "zatvorenom" i "otvorenom" pristupu ekvivalentne, tj. "otvoreni" je pristup proširenje "zatvorenoga" na otvorene forme. S druge strane, za svaku otvorenu formu F sa slobodnim varijablama $x_i, \dots, x_j$ očito vrijedi (sjetimo se da $U \models F$ znači da $(U; v) \models F$ za sve v)

$$U \models F \quad \Leftrightarrow \quad U \models \forall x_i \dots \forall x_j F,$$

gdje je $\forall x_i \dots \forall x_j F$ zatvorena forma (koju zovemo generalizacijom od F i kraće je označavamo s $\forall F$). Drugim riječima, definicija istinitosti forme F u strukturi U zapravo je ista u oba pristupa, ako otvorenu formu F identificiramo s njenom generalizacijom $\forall F$. To i inače činimo u matematici, npr. algebarski aksiomi

$$x + y = y + x, \quad x < y \wedge y < z \to x < z \qquad \text{itd.}$$

zapravo su pokrate za

$$\forall x \forall y\, (x + y = y + x),\ \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \to x < z) \ \ \text{itd.}$$

(Čak je i gornja ekvivalencija zapravo pokrata za $\forall \mathcal{U} \forall F (\mathcal{U} \models F \Leftrightarrow \mathcal{U} \models \forall F)$.) Naravno, to nije uvijek tako. Kada rješavamo jednadžbu $x^2 - 4x + 4 = 0$ ne smatramo je pokratom za $\forall x (x^2 - 4x + 4 = 0)$, nego tražimo valuaciju od x koja će zadovoljiti tu jednadžbu (u ovom slučaju $v = (x/2)$ ili kraće $x = 2$). Iz konteksta uvijek mora biti jasno mislimo li na istinitost u strukturi (tj. generaliziramo li) ili mislimo na istinitost u modelu, tj. u strukturi uz neku valuaciju varijabli.

OM-HACK Sada se konačno možemo vratiti i ekstenzijama (našim traženim "vrijednostima") otvorenih formi.

EKSTENZIJA OTVORENE FORME U STRUKTURI.

DEFINABILNOST RELACIJE U STRUKTURI.

Ekstenzija otvorene forme F, s n slobodnih varijabli $x_1, \ldots, x_n$, u strukturi $\mathcal{U}$ je n-mjesna relacija:

$$F^{\mathcal{U}} := \{(m_1, \ldots, m_n) \in U^n : \mathcal{U} \models F[m_1, \ldots, m_n]\}$$

Obrnuto, za n-mjesnu relaciju $R \subseteq U^n$ kažemo da je definabilna u strukturi $\mathcal{U}$ ako postoji kvantifikacijska forma F s n slobodnih varijabli $x_1, \ldots, x_n$, za koju vrijedi:

$$F^{\mathcal{U}} = R$$

Za tu formu F kažemo da definira R u $\mathcal{U}$.

Na primjer, može se pokazati da binarnu relaciju $\leq$ u operacijskoj strukturi $(\mathbb{N}, +)$ definira forma $\exists z(z+x = y)$. Dakle, relacija $\leq$ je definabilna u strukturi $(\mathbb{N}, +)$. S druge strane, može se pokazati da svojstvo "biti kvadrat" (tj. član skupa $\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$ nije definabilno u $(\mathbb{N}, +)$. To su teme kojima se bavi teorija modela i sada se njima nećemo baviti. Željeli smo samo pokazati kako se pojam *ekstenzije* otvorene forme, od kojeg smo krenuli u našem drugom pristupu, može precizno definirati.

Popis korekcija