

7. RAČUN BESKONAČNIH POLINOMA

1. Taylorova formula i Taylorov red
2. Beskonačno zbrajanje
3. Testovi konvergencije
4. Redovi potencija
5. Kompleksne funkcije i Eulerova formula
6. Hiperboličke funkcije
7. Beskonačno množenje

7.1 TAYLOROVA FORMULA I TAYLOROV RED

Baveći se računom trigonometrijskih, eksponencijalnih i logaritamskih funkcija ustanovili smo da se one mogu prikazati kao beskonačni polinomi:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

To nam je omogućilo da vrijednosti tih funkcija računamo kao vrijednosti polinoma, dakle koristeći se samo osnovnim računskim operacijama $+$, $-$, \cdot i $:$. Naime, vrijednost beskonačnog polinoma možemo po volji točno aproksimirati odabirom njegovog dovoljno velikog konačnog komada. Polinomski prikaz funkcije koristan je i u mnogim drugim situacijama. Na primjer, antiderivacije mnogih jednostavnih funkcija ne mogu se izraziti pomoću funkcija s kojima smo se do sada upoznali. Dobro poznati primjeri takvih jednostavnih funkcija s “problematičnim” antiderivacijama, jesu

$$\frac{\sin x}{x}, \quad e^{-x^2} \quad \text{i} \quad \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}$$

za $k^2 < 1$. Ako ih aproksimiramo polinomima možemo očekivati da će i njihove antiderivacije biti aproksimirane (lako izračunljivim) antiderivacijama polinoma.

Zato ćemo u ovom odjeljku izvesti Taylorovu formulu koja objašnjava kako funkciju možemo aproksimirati polinomom, i koja pokazuje da se prikazi trigonometrijskih, eksponencijalnih i logaritamskih funkcija beskonačnim polinomima samo posebni slučajevi jednog mnogo općenitijeg načela.

Pri izvodu Taylorove formule koristit ćemo se osnovnom metodom, računa:

Želimo li naći nepoznatu funkciju $G(x)$, čija je vrijednost $G(a) = 0$ poznata, nađimo njezinu derivaciju $G'(x)$ i integrirajmo je od a do x :

$$G(x) = \int_a^x G'(x) dx.$$

(Naime, iz osnovnog teorema računa, $G(x) - G(a) = \int_a^x G'(x) dx$, i $G(a) = 0$ slijedi

$$G(x) = \int_a^x G'(x) dx.)$$

Osim toga koristit ćemo se i poopćenim teoremom srednje vrijednosti za integrale:

TEOREM SREDNJE VRIJEDNOSTI ZA INTEGRALE

Ako su f i g neprekinute funkcije na $[a, b]$ i ako g ne mijenja predznak na $[a, b]$ onda je

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx, \quad \text{za neki } c \in [a, b].$$

Dokaz je jednostavan. Neprekinuta funkcija f postiže na zatvorenom intervalu $[a, b]$ najmanju vrijednost m i najveću vrijednost M (tom smo se evidentnom činjenicom već koristili). Dakle za svaki $x \in [a, b]$

$$m \leq f(x) \leq M$$

odakle slijedi

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

ako je $g(x) \geq 0$ na $[a, b]$, ili

$$mg(x) \geq f(x)g(x) \geq Mg(x)$$

ako je $g(x) \leq 0$ na $[a, b]$. U prvom slučaju je

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx,$$

dok je u drugom

$$m \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x)g(x) dx \geq M \int_a^b g(x) dx.$$

Nakon dijeljenja s $\int_a^b g(x)dx$, koji je pozitivan u prvom, a negativan u drugom slučaju, nalazimo da je

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M,$$

u oba slučaja. Budući da funkcija f , kao neprekinuta funkcija na $[a, b]$, prima sve vrijednosti između najmanje vrijednosti m i najveće vrijednosti M , onda ona za neki $c \in [a, b]$ prima i srednju vrijednost iz gornje nejednakosti, tj.

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(c).$$

Jednostavnim množenjem slijedi naš teorem

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Nakon ovih predradnji evo i izvoda Taylorove formule. Pretpostavimo da nas zanima vrijednost funkcija $f(a)$, dok su nam poznate vrijednosti od f i svih njenih derivacija u x . Aproximiramo li $f(a)$ sa $f(x)$ činimo grešku $G_1(x)$ koja ovisi o x

$$(1) \quad f(a) = f(x) + G_1(x).$$

Očito je $G_1(a) = 0$. Deriviranjem jednakosti (1) lako računamo derivaciju $G'_1(x)$:

$$0 = f'(x) + G'_1(x), \quad G'_1(x) = -f'(x),$$

pa nepoznatu grešku $G_1(x)$ možemo naći primjenom osnovne metode računa:

$$G_1(x) = -\int_a^x f'(x)dx.$$

Iz teorema srednje vrijednosti slijedi

$$G_1(x) = -f'(\xi) \int_a^x dx = f'(\xi)(a-x),$$

za neki ξ između a i x , što nakon uvrštavanja u (1) daje prvu procjenu

$$(T_1) \quad f(a) = f(x) + f'(\xi)(a-x).$$

Uvrstimo li u (T_1) poznatu vrijednost $f'(x)$ na mjesto nepoznate vrijednosti $f'(\xi)$ činimo grešku $G_2(x)$

$$(2) \quad f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + G_2(x).$$

Naravno $G_2(a) = 0$. Deriviranjem lako nalazimo $G'_2(x)$:

$$0 = f'(x) - f'(x) + f''(x)(a-x) + G'_2(x), \quad G'_2(x) = -f''(x)(a-x),$$

pa integracijom nalazimo

$$G_2(x) = -\int_a^x f''(x)(a-x) dx$$

Iz teorema srednje vrijednosti slijedi

$$G_2(x) = -f''(\xi) \int_a^x (a-x) dx = f''(\xi) \frac{(a-x)^2}{2},$$

za neki ξ između a i x , što nakon uvrštavanja u (2) daje drugu procjenu

$$(T_2) \quad f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + f''(\xi) \frac{(a-x)^2}{2}.$$

Uvrstimo li u (T_2) poznatu vrijednost $f''(x)$ na mjesto nepoznate vrijednosti $f''(\xi)$ činimo grešku $G_3(x)$

$$(3) \quad f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + f''(x) \frac{(a-x)^2}{2} + G_3(x).$$

Ponavljajući prethodni postupak nalazimo

$$0 = f'(x) - f'(x) + f''(x)(a-x) - f''(x)(a-x) + f''(x) \frac{(a-x)^2}{2} + G'_3(x),$$

$$G'_3(x) = -f''(x) \frac{(a-x)^2}{2}, \quad G_3(x) = -\int_a^x f''(x) \frac{(a-x)^2}{2} dx,$$

$$G_3(x) = -f''(\xi) \int_a^x \frac{(a-x)^2}{2} dx = f''(\xi) \frac{(a-x)^3}{2 \cdot 3}.$$

Uvrštavanjem u (3) dobivamo treću procjenu

$$(T_3) \quad f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + f''(x) \frac{(a-x)^2}{2} + f''(\xi) \frac{(a-x)^3}{2 \cdot 3}.$$

Ponavljanjem ovog postupka n puta nalazimo

$$(T_n) \quad f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \dots + f^{(n-1)}(x) \frac{(a-x)^{n-1}}{(n-1)!} + f^n(\xi) \frac{(a-x)^n}{n!},$$

gdje je ξ neka vrijednost između a i x . Zamjenom a sa x i x sa x_0 dolazimo do uobičajenog zapisa Taylorove formule:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + G_n$$

gdje je

$$G_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n,$$

a ξ je neka vrijednost između x_0 i x . Uočimo da je funkcija $f(x)$ prikazana kao zbroj tzv. Taylorovog polinoma funkcije f stupnja manjeg ili jednakog $n - 1$

$$T_{n-1}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1}$$

i ostatka G_n , koji predstavlja grešku koju činimo aproksimirajući funkciju $f(x)$ njenim Taylorovim polinomom $T_{n-1}(x)$. U posebnom slučaju $x_0 = 0$ Taylorov polinom funkcije f ima oblik

$$T_{n-1}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1}$$

i katkada se naziva Maclaurinovim polinomom funkcije f . Njegov ostatak G_n , koji mjeri grešku aproksimiranja funkcije f njenim Maclaurinovim polinomom, ima oblik

$$G_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} x^n,$$

gdje je ξ je neka vrijednost između 0 i x .

TAYLOROVA FORMULA

Pretpostavimo da je funkcija f po volji mnogo puta derivabilna na intervalu koji uključuje x_0 i x . Taylorov polinom funkcije f stupnja manjeg ili jednakog n , oko točke x_0 , jest polinom

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

(Taylorov polinom oko 0 je

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

i katkada se zove Maclaurinovim polinomom.)

Taylorov polinom $T_n(x)$ aproksimira funkciju $f(x)$ uz grešku $G_{n+1}(x)$:

$$f(x) = T_n(x) + G_{n+1}(x), \quad G_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

gdje je ξ neki broj između x_0 i x .

(Ako je polinom Maclaurinov, onda je $G_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$, za ξ između 0 i x .)

PRIMJER 1.

Kako glasi Taylorova formula za funkcije $\sin x$ i $\cos x$ oko 0?

Rješenje:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 & f^{IV}(x) &= \sin x & f^{IV}(0) &= 0 \\ f''(x) &= -\sin x & f''(0) &= 0 & f^V(x) &= \cos x & f^V(0) &= 1 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 & f^{VI}(x) &= -\sin x & f^{VI}(0) &= 0 \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

Budući da je $f^{IV}(x) = f(x)$ vrijednosti se ciklički ponavljaju, pa Taylorova formula glasi

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + G_{2m+1}(x)$$

gdje je

$$G_{2m+1}(x) = \pm \frac{\sin \xi}{(2m+1)!} x^{2m+1}, \text{ za } \xi \text{ između } 0 \text{ i } x.$$

Uočimo da je $|G_{2m+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$ i $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!} = 0$ (usp. 5.3.) što znači da greška aproksimacije

iščezava ako uzmemo Taylorove polinome sve većeg stupnja (vidi sl.1.). Beskonačni Taylorov polinom funkcije $\sin x$ postaje jednak samoj funkciji. Uskoro ćemo točnije objasniti smisao ove tvrdnje.



Slika 1

Slično bismo našli da je

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + G_{2m+2}(x),$$

gdje je

$$|G_{2m+2}(x)| = \left| \pm \frac{\cos \xi}{(2m+2)!} x^{2m+2} \right| \leq \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}.$$

Dakle i $\cos x$ je beskonačni polinom, jer je $\lim_{m \rightarrow \infty} |G_{2m+2}(x)| = 0$.

PRIMJER 2.

Izračunajmo $\sin(0.1)$ s točnošću na 4 decimale.

Rješenje:

Vrijednost $\sin(0.1)$ aproksimirat ćemo sa $T_{2m-1}(0.1)$ tako da je $|G_{2m+1}(0.1)| < 10^{-4}$. Za $m = 2$ bit će

$$|G_{2m+1}(0.1)| \leq \frac{(0.1)^{2m+1}}{(2m+1)!} < 10^{-4}, \text{ jer je } \frac{(0.1)^5}{5!} < \frac{1}{2} 10^{-4}.$$

Dakle, tražena aproksimacija je

$$\sin(0.1) = T_3(0.1) = 0.1 - \frac{(0.1)^3}{3!} \approx 0.1 - 0.00016 \approx 0.0998.$$

PRIMJER 3.

Izračunajmo $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ s točnošću na dvije decimale.

Rješenje:

Iz Taylorove formule slijedi $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + G_5(x)$ i $|G_5(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!}$.

Dakle, $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{G_5(x)}{x}$ i $\left| \frac{G_5(x)}{x} \right| \leq \frac{|x|^4}{5!}$.

Stoga slijedi $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{G_5(x)}{x} dx = \frac{17}{18} + \int_0^1 \frac{G_5(x)}{x} dx$.

Nadalje $\int_0^1 \frac{G_5(x)}{x} dx \leq \int_0^1 \left| \frac{G_5(x)}{x} \right| dx \leq \int_0^1 \frac{x^4}{5!} dx = \frac{x^5}{5 \cdot 5!} \Big|_0^1 = \frac{1}{600} < \frac{1}{2} 10^{-2}$,

što znači da je tražena približna vrijednost $\frac{17}{18}$.

PRIMJER 4.

Izračunajmo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$.

Rješenje:

Prema Taylorovoj formuli $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + G_4(x)$,

odakle slijedi $\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + G_4(x)}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{G_4(x)}{x^2}$.

Budući da je $|G_4(x)| \leq |x|^4$ slijedi da je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

PRIMJER 5.

Kako glasi Taylorova formula za funkciju e^x oko 0?

Rješenje:

Sve derivacije od e^x su e^x , a osim toga je $e^0 = 1$, pa Taylorova formula glasi

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + G_n(x)$$

gdje je $G_n(x) = e^\xi \frac{x^n}{n!}$, za neki ξ između 0 i x .

Uočimo da $G_n(x) \rightarrow 0$ za $n \rightarrow \infty$, jer je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, što znači da greška aproksimacije iščezava ako uzimamo Taylorove polinome sve većeg stupnja. Beskonačni Taylorov polinom funkcije e^x postaje jednak samoj funkciji. Uskoro ćemo točnije objasniti smisao ove tvrdnje.

PRIMJER 6.

Koliko članova Taylorove formule trebamo upotrijebiti da bismo izračunali $e^{1/10}$ s greškom manjom od 10^{-3} ?

Rješenje:

Budući da je $e^{1/10} < 2$, za ξ između 0 i $1/10$ vrijedi

$$\left| G_3\left(\frac{1}{10}\right) \right| = \left| e^\xi \frac{(1/10)^3}{3!} \right| \leq 2 \frac{(1/10)^3}{3!} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-3}.$$

Dovoljno je upotrijebiti Taylorov polinom 2. stupnja. Dakle, s greškom manjom od 10^{-3} ,

$$e^{1/10} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{6000} = \frac{6631}{6000}.$$

PRIMJER 7.

Izračunajmo $\int_0^{0.1} e^{-x^2} dx$ s greškom manjom od 10^{-6} .

Rješenje:

Iz $e^u = 1 + u + G_2(u)$, uz $u = -x^2$, slijedi

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + G_2(-x^2).$$

Budući da je $e^0 = 1$, za ξ između $-x^2$ i 0 vrijedi

$$|G_2(-x^2)| = \left| e^\xi \frac{(-x^2)^2}{2!} \right| \leq \frac{x^4}{2}.$$

Dakle,

$$\int_0^{0.1} e^{-x^2} dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{0.1} + \int_0^{0.1} G_2(-x^2) dx = 0.1 + \frac{0.001}{3} + \int_0^{0.1} G_2(-x^2) dx.$$

Nadalje

$$\left| \int_0^{0.1} G_2(-x^2) dx \right| \leq \int_0^{0.1} |G_2(-x^2)| dx \leq \int_0^{0.1} \frac{x^4}{2} = \frac{x^5}{10} \Big|_0^{0.1} < 10^{-6},$$

Što znači da je tražena vrijednost integrala 0.1003333 s greškom manjom od 10^{-6} .

Uvrštavanjem a za x_0 i $a+x$ za x u Taylorovu formulu dobivamo oblik kojim se često koristimo u primjenama:

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}x^{n-1} + G_n(x),$$

$$G_n(x) = \frac{f^n(\xi)}{n!}x^n, \text{ za neki } \xi \text{ između } a \text{ i } a+x.$$

Čest je zapis u kojem se x piše umjesto a i Δx umjesto x :

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}\Delta x^{n-1} + G_n(\Delta x),$$

$$G_n(\Delta x) = \frac{f^n(x+\theta\Delta x)}{n!}\Delta x^n, 0 \leq \theta \leq 1.$$

Uočimo li da iz $y = f(x)$ slijedi

$$dy = f'(x)\Delta x, d^2 y = d(dy) = (f''(x)\Delta x)\Delta x = f''(x)\Delta x^2,$$

$$d^3 y = d(d^2 y) = (f'''(x)\Delta x^2)\Delta x = f'''(x)\Delta x^3, \dots$$

dobivamo još jedan oblik Taylorove formule:

$$y(x + \Delta x) = y(x) + dy + \frac{1}{2!}d^2 y + \frac{1}{3!}d^3 y + \dots + \frac{1}{(n-1)!}d^{n-1} y + G_n(\Delta x)$$

ili uz uobičajenu oznaku $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$

$$\Delta y = dy + \frac{1}{2!}d^2 y + \frac{1}{3!}d^3 y + \dots + \frac{1}{(n-1)!}d^{n-1} y + G_n(\Delta x),$$

$$G_n(\Delta x) = \frac{1}{n!}d^n y(x + \theta\Delta x), 0 \leq \theta \leq 1.$$

TAYLOROVA FORMULA
(alternativni oblici)

$$(1) \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + G_{n+1}(x),$$

$$G_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \xi \text{ između } a \text{ i } x.$$

$$(2) \quad f(a+x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + G_{n+1}(x),$$

$$G_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \xi \text{ između } a \text{ i } a+x.$$

$$(3) \quad f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\Delta x^n + G_{n+1}(\Delta x),$$

$$G_{n+1}(\Delta x) = \frac{f^{(n+1)}(x + \theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}, 0 \leq \theta \leq 1.$$

$$(4) \quad \Delta y = dy + \frac{1}{2!}d^2 y + \frac{1}{3!}d^3 y + \dots + \frac{1}{n!}d^n y + G_{n+1}(\Delta x),$$

$$G_{n+1}(\Delta x) = \frac{1}{(n+1)!}d^n y(x + \theta\Delta x), 0 \leq \theta \leq 1.$$

PRIMJER 8.

Kako glasi Taylorova formula za funkciju $(1+x)^\alpha$?

Rješenje:

Naći ćemo alternativni oblik (2) Taylorove formule, uz $a = 1$. Dakle,

$$f(x) = x^\alpha \quad f(1) = 1$$

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \quad f'(1) = \alpha$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \quad \frac{f''(1)}{2!} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2}$$

$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3} \quad \frac{f'''(1)}{3!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))x^{\alpha-n} \quad \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n}$$

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} \xi^{\alpha-n-1}.$$

Dakle,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} x^n + G_{n+1}(x),$$

$$G_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} \xi^{\alpha-n-1} x^{n+1},$$

za ξ između 1 i $1+x$. Može se dokazati da je $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x) = 0$ pod uvjetom da je $|x| < 1$ (usp. 7.4. primjer 2.), što znači da Taylorovi polinomi sve većeg stupnja sve bolje aproksimiraju $(1+x)^\alpha$ ako je $|x| < 1$. Beskonačni Taylorov polinom funkcije $(1+x)^\alpha$ postaje jednak samoj funkciji, ako je $|x| < 1$.

Za koeficijente razvoja funkcije $(1+x)^\alpha$ postoji posebna notacija:

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} = \binom{\alpha}{k}, \text{ (čita se: "}\alpha \text{ povrh } k\text{").}$$

Dakle,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots, \text{ za } |x| < 1.$$

To je slavna Newtonova binomna formula. Primijetimo da je formula za sumu geometrijskog reda $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$, posebni slučaj Newtonove binomne formule za $\alpha = -1$:

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \text{ tj. } (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Za pozitivne cjelobrojne α dobivamo dobro poznate elementarne razvoje:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2,$$

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3,$$

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4, \text{ itd.}$$

Za cjelobrojne pozitivne α razvoj je konačan, jer za svaki $k > \alpha$ vrijedi $\binom{\alpha}{k} = 0$. Na primjer,

$$\binom{3}{4} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 0.$$

Općenito, uz konvenciju $\binom{n}{0} = 1$,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Oдавde lako izvodimo i opću formulu za (pozitivnu cjelobrojnu) potenciju binoma:

$$(a+b)^n = \left[a \left(1 + \frac{b}{a} \right) \right]^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a} \right)^n = a^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{b}{a} \right)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Na primjer,

$$\begin{aligned} (a+b)^5 &= \binom{5}{0} a^5 b^0 + \binom{5}{1} a^4 b^1 + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a^1 b^4 + \binom{5}{5} a^0 b^5 = \\ &= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5. \end{aligned}$$

PRIMJER 9.

Izračunajmo $\sqrt{1.2}$ na dvije decimale.

Rješenje:

Koristit ćemo se binomnim razvojem od $(1+x)^\alpha$ uz $x=0.2$ i $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$\sqrt{1.2} = (1+0.2)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.2 + G_2(0.2) = 1.1 + G_2(0.2).$$

Ocjenu točnosti dobijamo procjenom greške $G_2(0.2)$. No $G_2(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} \xi^{\alpha-2} x^2$, za neki ξ između

1 i $1+x$, pa za $\alpha = \frac{1}{2}$ i $x=0.2$ imamo

$$|G_2(0.2)| = \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \xi^{-3/2} (0.2)^2 \right| \leq \frac{1}{8} (0.2)^2 = \frac{1}{2} 10^{-2},$$

jer je $\xi^{-3/2} = 1/\xi^{3/2} \leq 1$, za $1 \leq \xi \leq 1.2$. Dakle, $\sqrt{1.2} = 1.1$ s točnošću na dvije decimale.

PRIMJER 10.

Izračunajmo $\sqrt{26}$ na četiri decimale.

Rješenje:

Da bismo mogli primijeniti Taylorovu formulu krenimo od jednakosti

$$26 = 25 + 1 = 25 \left(1 + \frac{1}{25} \right), \quad \sqrt{26} = 5 \left(1 + \frac{1}{25} \right)^{1/2}.$$

Iz Taylorove binomne formule slijedi

$$\left(1 + \frac{1}{25} \right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{25} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{25} \right)^2 + G_3 \left(\frac{1}{25} \right) = \frac{5507}{5400} + G_3 \left(\frac{1}{25} \right),$$

$$\left| G_3 \left(\frac{1}{25} \right) \right| = \frac{1}{3!} \left| \frac{1}{2} - 1 \right| \left| \frac{1}{2} - 2 \right| \xi^{-3} \left(\frac{1}{25} \right)^3 \leq \frac{1}{6} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \left(\frac{1}{25} \right)^3 < \frac{1}{16} \cdot 10^{-4}.$$

Dakle,

$$26 = 5 \left(1 + \frac{1}{25} \right)^{1/2} = 5 \frac{5507}{5400} + 5G_3 \approx \frac{5507}{1080}$$

uz grešku $|5G_3| \leq \frac{5}{16} \cdot 10^{-4} < 10^{-4}$.

PRIMJER 11.

Koristeći se Newtonovom binomnom formulom izračunajmo $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx$, uz $k^2 < 1$.

Rješenje:

Uvrštavanjem $u = -k^2 \sin^2 x$ u Newtonovu binomnu formulu

$$(1 + u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \dots$$

nalazimo da je

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} = 1 - \frac{1}{2}k^2 \sin^2 x - \frac{1}{8}k^4 \sin^4 x + \dots$$

Suma s desne strane konvergira korijenu s lijeve strane ako je $|u| = |k^2 \sin^2 x| < 1$, što je ispunjeno za svaki x , jer je $k^2 < 1$.

Pretpostavimo li da tada i integral sume konvergira prema integralu korijena, naći ćemo da je

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx &= \int_0^{\pi/2} 1 dx - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} k^2 \sin^2 x dx - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{8} k^4 \sin^4 x dx - \dots \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} k^2 \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8} k^4 \frac{3\pi}{16} - \dots \end{aligned}$$

Kako se računaju zadnja dva integrala u prethodnom primjeru naučit ćemo uskoro. Važno je naglasiti da se ti integrali mogu lako izračunati, jer su antiderivacije funkcija $\sin^2 x$, $\sin^4 x$,... elementarne funkcije (što ćemo vidjeti u sljedećem poglavlju), dok antiderivacija korijena $\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}$ nije izraziva pomoću elementarnih funkcija (koje smo dosad upoznali), nego se mora računati na ovaj ili neki sličan način. Za naš je račun vrlo važna bila i pretpostavka da iz konvergencije zbroja beskonačno mnogo funkcija prema danoj funkciji, slijedi i konvergencija zbroja beskonačno mnogo njihovih integrala prema integralu dane funkcije. Ispitivanje valjanosti te i sličnih pretpostavki zahtijeva detaljnije istraživanje problema konvergencije suma s beskonačno mnogo pribrojnika, kojim ćemo se pozabaviti u sljedećem odjeljku.

PRIMJER 12.

Kako glasi Taylorova formula za $\ln(1+x)$?

Rješenje:

Taylorovu formulu naći ćemo u obliku

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + \dots + \frac{f^n(a)}{n!} x^n + G_{n+1}(x), \quad G_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

za neki ξ između x i $a+x$, uz $f(x) = \ln x$ i $a = 1$.

$$f(x) = \ln x \qquad f(1) = 0$$

$$f'(x) = x^{-1} \qquad f'(1) = 1$$

$$f''(x) = (-1)x^{-2} \qquad \frac{f''(1)}{2!} = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)x^{-3} \qquad \frac{f'''(1)}{3!} = \frac{1}{3}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)\dots(-n+1)x^{-n} \qquad \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n \xi^{-n-1}}{n+1}.$$

Dakle,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + G_{n+1}(x), \quad G_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} \xi^{-n-1} x^{n+1},$$

za neki ξ između 1 i $1+x$. Ako je $x \geq 0$ onda je $\xi \geq 1$, tj. $\xi^{-n-1} = \frac{1}{\xi^{n+1}} \leq 1$, pa je

$$|G_{n+1}(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Ako je osim toga $x \leq 1$ (dakle $0 \leq x \leq 1$) onda je $\lim_{n \rightarrow \infty} G_{n+1}(x) = 0$, što znači da Taylorovi polinomi sve većeg stupnja sve bolje aproksimiraju $\ln(1+x)$, za $0 \leq x \leq 1$. Može se pokazati (usp. 7.4. primjer 2.) da to vrijedi i za $-1 < x \leq 0$. Dakle, beskonačni Taylorov polinom funkcije $\ln(1+x)$ postaje jednak samoj funkciji, ako je $|x| < 1$ ili $x = 1$. Za $x = 1$ dobivamo poznati Leibnitzov razvoj od $\ln 2$:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

PRIMJER 13.

Izračunajmo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$.

Rješenje:

Prema Taylorovoj formuli

$$\ln(1+x) = x + G_2(x), \quad \sin x = x + H_3(x).$$

(Napisali smo H_3 umjesto G_3 jer moramo razlikovati grešku za $\ln(1+x)$ od greške za $\sin x$.)

Nadalje,

$$|G_2(x)| \leq c_1 |x^2| \quad \text{i} \quad |H_3(x)| \leq c_2 |x|^3$$

za neke konstante c_1 i c_2 , te x dovoljno blizu 0. Dakle,

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \frac{x + G_2(x)}{x + H_3(x)} = \frac{1 + G_2(x)/x}{1 + H_3(x)/x}.$$

Zbog gornjih procjena $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{G_2(x)}{x} = 0$ i $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{H_3(x)}{x} = 0$ odakle slijedi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} = 1$.

Razvoj funkcije $\ln(1+x)$ u beskonačni polinom $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ mogli smo dobiti i integracijom sume geometrijskog reda (usp. 6.3.)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Naravno, opet se postavlja pitanje smijemo li beskonačnu sumu integrirati član po član. U ovom smo slučaju (i to vrlo jednostavno) dobili točan rezultat. Zbog jednostavnosti i efikasnosti takvih računa valjalo bi detaljnije ispitati njihovu opravdanost, što ćemo učiniti u sljedećem odjeljku.

Sličnom integracijom možemo i funkciju $\arctg x$ razviti u beskonačni polinom. Naime, iz poznate sume geometrijskog reda

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots, \quad |x| < 1,$$

integracijom slijedi

$$\arctg x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

Primjenom Taylorove formule dobili bismo isti rezultat teže, ali uz dodatnu ocjenu da on vrijedi za $|x| \leq 1$. Uočimo da geometrijski red (tj. Taylorov beskonačni polinom za $1/(1+x^2)$) konvergira za $|x| < 1$, dok Taylorov beskonačni polinom za $\arctg x$ konvergira za $|x| \leq 1$. Za $x = 1$ dobivamo poznatu Eulerovu formulu za $\pi/4$:

$$\frac{\pi}{4} = \arctg 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Mnogobrojnim primjerima ilustrirali smo primjenu Taylorove formule na pojedine funkcije. Svaku od tih funkcija $f(x)$ uspjeli smo prikazati kao sumu jednog konačnog polinoma (tzv. Taylorovog polinoma te funkcije)

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

i ostatka $G_{n+1}(x)$. Ako $G_{n+1}(x)$ teži 0 kad n teži u beskonačnost onda je funkcija $f(x)$ to bolje aproksimirana što više članova Taylorova razvoja od $f(x)$ uzimamo u obzir. To zapisujemo na sljedeći način:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots,$$

gdje tri točkice znače da dodajemo sve više i više članova Taylorova razvoja, bez kraja i konca. Beskonačni polinom s desne strane zovemo Taylorovim redom funkcije f oko a , dok ga u slučaju $a = 0$ zovemo Maclaurinovim redom.

TAYLOROV RED

Ako je funkcija f beskonačno puta diferencijabilna u nekom intervalu koji sadrži a onda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots$$

zovemo Taylorovim redom od f oko a . Kada je $a=0$ red ima jednostavniji oblik

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

i zovemo ga Maclaurinim redom funkcije f .

U prethodnim smo primjerima dokazali da su mnoge elementarne funkcije jednake sumi svojeg Taylorovog reda, jer im odgovarajući ostaci teže nuli. Za njih kažemo da se mogu razviti u Taylorov red.

RAZVOJI NEKIH VAŽNIH FUNKCIJA U TAYLOROV RED

Geometrijski: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1.$

Binomni: $(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \binom{\alpha}{4}x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}x^n, |x| < 1.$

Sinus: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}.$

Kosinus: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}.$

Eksponencijalna: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}.$

Logaritam: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, -1 < x \leq 1.$

Primijetimo da funkcija f može biti definirana i beskonačno puta diferencijabilna na \mathbb{R} , a da njezin razvoj ne vrijedi na cijelom \mathbb{R} (usp. geometrijski i binomni razvoj). Na primjer, funkcija $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ definirana je i beskonačno puta diferencijabilna za svaki $x \in \mathbb{R}$, iako njen razvoj oko $x=0$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

vrijedi samo za $|x| < 1$. Naravno Taylorova formula omogućava nam da $\frac{1}{1+x^2}$ razvijemo oko neke druge točke, npr. oko $x = 1$, i tako dobijemo (drugi) razvoj koji vrijedi i za druge vrijednosti x :

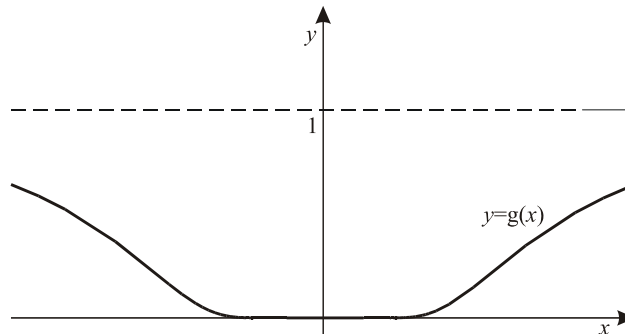
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x^2} & f(1) &= \frac{1}{2} \\ f'(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} & f'(1) &= -\frac{1}{2} \\ f''(x) &= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} & \frac{f''(1)}{2!} &= \frac{1}{4} \\ f'''(x) &= \frac{-24x^3+24x}{(1+x^2)^4} & \frac{f'''(1)}{3!} &= 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + 0 \cdot (x-1)^3 + \dots \end{aligned}$$

Može se pokazati da ovaj razvoj vrijedi za $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$.

Instruktivan je i primjer funkcije

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{za } x \neq 0 \\ 0 & \text{za } x = 0, \end{cases}$$

čiji graf tijesno priliježe uz os x u ishodištu (vidi sl.2.).



Slika 2.

Ta je funkcija beskonačno puta diferencijabilna, ali su sve njene derivacije u $x = 0$ jednake nuli. Dakle,

suma njenog Maclaurinovog reda $\sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n$ jednaka je nuli (za svaki x), a ne samoj funkciji $g(x)$. Ona se

dakle ne može razviti u Taylorov red oko 0 (može se razviti oko svake druge točke). Postoje i beskonačno diferencijabilne funkcije $f(x)$ čiji Taylorovi redovi, oko neke točke, ne samo da ne konvergiraju prema $f(x)$ oko te točke, nego uopće ne konvergiraju prema nikakvoj vrijednosti oko te točke.

Sve su to slučajevi u kojima ostatak iz Taylorove formule ne teži k nuli. Funkcije čiji ostatak (oko neke točke) teži k nuli i koje se stoga mogu razviti u Taylorov red (oko te točke) zovemo analitičkim funkcijama (u toj točki). One se u okolini točke u kojoj se analitički mogu prikazati u obliku beskonačnog polinoma.

Dakle, $\sin x$, e^x , $\ln x$, $\frac{1}{1-x}$ itd., analitičke su funkcije (u svakoj točki u kojoj su definirane).

7.2 BESKONAČNO ZBRAJANJE

Zbrajanje beskonačno mnogo pribrojnika pokazalo se, u prethodnom odjeljku izuzetno efikasnim postupkom za rješavanje mnogih problema. Zato ga sada detaljnije istražujemo.

Što uopće znači zbrojiti beskonačno mnogo pribrojnika? Sjetimo se jednostavnog osnovnoškolskog primjera:

$$\frac{1}{3} = 0.\dot{3} = 0.3333\dots$$

Beskonačni decimalni razvoj $0.\dot{3}$ nije drugo do zbroj od beskonačno mnogo pribrojnika:

$$0.\dot{3} = 0.3333\dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \dots$$

On iznosi $\frac{1}{3}$ jer se djelomični konačni zbrojevi

$$\begin{aligned} 0.3 &= \frac{3}{10} \\ 0.33 &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} \\ 0.333 &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} \\ 0.3333 &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} \\ &\vdots \end{aligned}$$

to više približavaju $\frac{1}{3}$ što više pribrojnika uzmemo u obzir.

Naravno, moguće je zamisliti beskonačno mnogo pribrojnika, npr. $1 + 1 + 1 + \dots$ čije djelomične sume ne teže ka konačnoj vrijednosti, pa nema smisla govoriti o zbroju takvih beskonačno mnogo pribrojnika. Zato zbroj beskonačno mnogo pribrojnika definiramo na sljedeći način.

SUMA REDA

Beskonačnim redom zovemo beskonačni niz brojeva koje treba zbrojiti:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

Broj $S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \dots + a_n$ zovemo n -tom djelomičnom sumom reda $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Ako niz djelomičnih suma S_1, S_2, S_3, \dots , konvergira prema S , za $n \rightarrow \infty$, onda kažemo da red $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergira, i da mu je suma S . To zapisujemo ovako

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = S.$$

Ako red $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ne konvergira, onda kažemo da on divergira i u tom slučaju red nema sume.

Važno je ne brkati niz i red. Niz je, naprosto, beskonačna lista brojeva (“odvojenih zarezima”):

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots$$

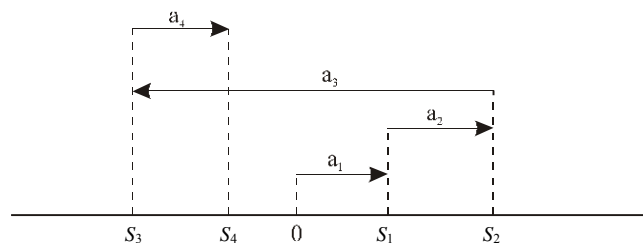
Red je beskonačna lista brojeva—pribrojnika koje treba zbrojiti (pa su zato “odvojeni plusovima”)

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \dots$$

Naravno, članovi beskonačnog reda i sami tvore niz, ali uistinu značajan niz povezan s redom $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ jest niz njegovi djelomičnih suma

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots,$$

jer taj niz determinira sumu reda. Razliku između a_i —ova i S_n —ova možemo ilustrirati tako da o a_1, a_2, a_3, \dots mislimo kao o nizu “pomaka” na brojevnom pravcu (počevši od 0). Tada je S_n položaj dosegnut nakon n pomaka, $S_n = a_1 + \dots + a_n$, (vidi sl.3.).



Slika 3.

Uočite da je “pomak” a_i jednak razlici “dosegnutih položaja” $a_i = S_i - S_{i-1}$. Ako red ima sumu, onda postoji $\lim_{i \rightarrow \infty} S_i$ i naravno $\lim_{i \rightarrow \infty} S_i = \lim_{i \rightarrow \infty} S_{i-1}$, odakle slijedi

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \lim_{i \rightarrow \infty} (S_i - S_{i-1}) = \lim_{i \rightarrow \infty} S_i - \lim_{i \rightarrow \infty} S_{i-1} = 0,$$

što znači da članovi reda nužno teže prema 0, ako red ima sumu.

NUŽNI UVJET KONVERGENCIJE REDA

Uvjet $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$ nužan je uvjet konvergencije reda $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, tj ako $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergira onda je $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$.

Ako je $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i \neq 0$ onda $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergira.

Uvjet $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$ nije dovoljan uvjet konvergencije. Uz taj uvjet red $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ može konvergirati i divergirati.

Da bi se to odlučilo potrebna je daljnja analiza reda.

PRIMJER 1.

Izračunajmo prvih pet djelomičnih suma sljedećih redova i procijenimo da li oni konvergiraju.

$$(a) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \quad (b) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \quad (c) \quad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

Rješenje:

$$(a) \quad S_1 = 1, S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}, \\ S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}, S_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16}.$$

Čini se djelomične sume S_n teže prema 2, što bi značilo da je suma ovog reda 2. Uočimo li da je riječ o geometrijskom redu $1 + x^2 + x^3 + \dots$ uz $x = \frac{1}{2}$, lako nalazimo da je suma reda uistinu $\frac{1}{1 - (1/2)} = 2$.

$$(b) \quad S_1 = 1, S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}, \\ S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}, S_5 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{8}{5}.$$

Promatrajući prvih pet djelomičnih suma S_n nije lako reći kuda one teže. Koristeći se Taylorovom formulom u prethodnom smo odjeljku pokazali da djelomične sume S_n u ovom slučaju teže prema $\ln 2$.

$$(c) \quad S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, S_5 = 1.$$

Djelomične sume očito ne konvergiraju pa ovaj red nema sume. On divergira.

PRIMJER 2.

Konvergiraju li redovi

$$(a) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots, \quad (b) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots,$$

Za $|x| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, pa djelomične sume S_n u tom slučaju konvergiraju prema $\frac{a}{1-x}$.

To znači da suma geometrijskog reda, za $|x| < 1$, iznosi

$$\sum_{i=0}^{\infty} ax^i = a + ax + ax^2 + \dots = \frac{a}{1-x}.$$

(U prethodnom odjeljku istu smo formulu izveli neelementarno, upotrebom Taylorove formule.)

PRIMJER 4.

Pretpostavimo da lopta ispuštena na tlo pri svakom odbijanju gubi pola svoje energije. Visina koju postiže u svakom skoku proporcionalna je njenoj brzini. To znači da je proporcionalna korijenu odgovarajuće energije, zbog $E = \frac{1}{2}mv^2$. Koliko će ukupni put lopta prijeći ako je ispustimo s visine od 1 m?

Rješenje:

U svakom skoku lopta postiže $\frac{1}{\sqrt{2}}$ visine prethodnoga skoka. Stoga ukupni put što ga prijeđe iznosi

$$1 + 2 \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \dots = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^i = 1 + \frac{2 \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = 3 + 2\sqrt{2} = 5.828m.$$

Budući da je suma beskonačnog reda jednaka limesu njegovih djelomičnih suma, najjednostavnija pravila za računanje sume reda neposredno slijede iz odgovarajućih pravila za računanje limesa (usp. 1.2.).

Ako je $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A$, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, a $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = B$, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$, onda je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n \pm B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = A \pm B.$$

Dakle, $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \pm \sum_{i=1}^{\infty} b_i$. Slično dokazujemo da je $\sum_{i=1}^{\infty} ca_i = c \sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

ZBRAJANJE REDOVA I MNOŽENJE REDA KONSTANTOM

Ako redovi $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ i $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ imaju sume, onda i red $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i \pm b_i)$ ima sumu i $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \pm \sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \pm b_i)$.

Dakle, konvergentni redovi mogu se zbrajati i oduzimati član po član.

Ako red $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ima sumu, a c je bilo koja konstanta, onda i red $\sum_{i=1}^{\infty} ca_i$ ima sumu i $c \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} ca_i$.

Dakle, konvergentni red množi se konstantom tako da se svaki njegov član pomnoži s tom konstantom.

PRIMJER 5.

Izračunajmo sumu reda $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^i + 3 \cdot 2^i}{6^i}$.

Rješenje:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^i + 3 \cdot 2^i}{6^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i \right) = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i + 3 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i = 2 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + 3 \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{17}{2}.$$

PRIMJER 6.

Izračunajmo sume redova $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!}$ i $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)!}$.

Rješenje:

Označimo prvu sumu s

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots,$$

a drugu s

$$B = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)!} = 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

Uočimo da je

$$S = A + B = (1+1) + \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}\right) + \dots,$$

$$R = A - B = (1-1) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) + \dots,$$

te da su S i R vrijednosti Taylorovog reda funkcije e^x za $x = \pm 1$.

Dakle, $A + B = e$, $A - B = e^{-1}$, odakle slijedi

$$A = \frac{e + e^{-1}}{2}, \quad B = \frac{e - e^{-1}}{2}.$$

Konvergencija zadanih redova slijedi iz konvergencije redova S i R , jer je

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} = \frac{1}{2}(S+R) \quad \text{i} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)!} = \frac{1}{2}(S+R).$$

Pravilo za zbrajanje redova implicira da se konačno mnogo članova reda može promijeniti, dakle i odstraniti (promijeniti u 0), bez utjecaja na konvergenciju reda. Naime, konačno mnogo članova reda $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ može se promijeniti pribrajanjem konačnog reda kojem su svi članovi, osim odgovarajućih konačno mnogo jednaki nuli. Takav konačni red sigurno konvergira pa će promjenjeni red, koji je zbroj reda

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad \text{i} \quad \text{konačnog reda, konvergirati samo u slučaju da i red } \sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad \text{konvergira.}$$

PRIMJER 7.

Pokažimo da je red $1 + 2 + 3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$ konvergentan i izračunajmo njegovu sumu.

Rješenje:

Ako odstranimo prva tri člana zadanog reda ostaje nam geometrijski red, koji je konvergentan, pa je i zadani red konvergentan. Osim toga

$$1 + 2 + 3 = 6 \quad \text{i} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2},$$

pa je suma zadanog reda 6.5. Opći zaključak, koji se poziva na pravilo zbrajanja, u ovom posebnom slučaju, izgledao bi ovako:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots &= (1 + 2 + 3 + 0 + 0 + 0 + \dots) + \\ &+ (0 + 0 + 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots) = 6 + \frac{1}{2} = 6.5. \end{aligned}$$

Kada zbrajamo beskonačno mnogo pribrojnika, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, činimo to tako da ih zbrajamo jedan po jedan. Naime, $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, a $S_1 = a_1$, $S_2 = S_1 + a_2$, $S_3 = S_2 + a_3, \dots$. Kada zbrajamo konačno mnogo pribrojnika, npr. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$, možemo to činiti na isti način, pribrajujući pribrojnike jedan po jedan, ali možemo i tako da pribrojnike prethodno grupiramo, npr. $(a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6)$. Rezultat je u konačnom slučaju isti. Smijemo li pribrojnike slobodno grupirati i kada zbrajamo beskonačno mnogo pribrojnika? Da li je rezultat i u tom slučaju isti? Da, ako suma postoji. Naime, zbrajati beskonačno mnogo pribrojnika uz njihovo prethodno grupiranje znači preskočiti neke djelomične sume. Ako pak djelomične sume konvergiraju prema sumi S onda one konvergiraju prema S i ako neke preskočimo.

Na primjer, ako u beskonačnom zbroju $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \dots$ pribrojnike grupiramo ovako

$$a_1 + (a_2 + a_3 + a_4) + a_5 + (a_6 + a_7) + \dots,$$

to znači da računamo djelomične sume

$$S_1 = a_1, S_4 = S_1 + (a_2 + a_3 + a_4), S_5 = S_4 + a_5, S_7 = S_5 + (a_6 + a_7), \dots,$$

tj. preskačemo S_2, S_3, S_6, \dots .

No ako $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, \dots \rightarrow S$ onda i $S_1, S_4, S_7, \dots \rightarrow S$.

PRIMJER 8.

Izračunajmo sumu reda

$$(a) \quad \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{2}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \dots \quad (b) \quad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots$$

Rješenje:

(a) Grupiranjem pribrojnika lako nalazimo

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{2}{3 \cdot 3^2}\right) + \left(\frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{3 \cdot 3^3}\right) + \dots &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3^3} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \dots = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Naravno, račun vrijedi pod pretpostavkom da početni red ima sumu. Kada to ne bi bilo tako, mogli bismo doći do pogrešnog rezultata, na što nas upozorava slučaj (b).

(b) Grupiranjem pribrojnika nalazimo

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0.$$

Ali drugačijim grupiranjem pribrojnika nalazimo

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots = 1.$$

U čemu je problem? U tome što red $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ nema sume. Njegove djelomične sume $S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \dots$ ne konvergiraju. Prvim grupiranjem preskočili smo parne djelomične sume $S_{2n} = 0$, pa su ostale samo neparne, koje su 1. Drugim grupiranjem preskočili smo neparne sume $S_{2n+1} = 1$, pa su ostale samo parne sume, koje su 0.

Prethodni nam je primjer pokazao da divergentni red možemo grupiranjem pribrojnika (katkada) pretvoriti u konvergentni. Zato prije grupiranja članova nekog reda u svrhu izračunavanja njegove sume moramo biti sigurni da red ima sumu, tj. da konvergira. Drugim riječima, ispitivanje konvergencije reda često je zadatak koji mora prethoditi nalaženju njegove sume.

Niz S_1, S_2, S_3, \dots sigurno konvergira ako je rastući i odozgo omeđen brojem M :

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \dots \leq M.$$

Ako brojevi S_n rastu, ali nikada preko fiksne međe M , onda ne mogu drugo do konvergirati. To je temeljno svojstvo realnih brojeva. Naprimjer, rastući omeđeni niz

$$0.3 \leq 0.33 \leq 0.333 \leq \dots \leq 0.4$$

konvergira (prema $0.3 = \frac{1}{3}$) i baš iz tog temeljnog svojstva rastućih omeđenih nizova slijedi da beskonačni decimalni razvoji konvergiraju. (Upravo zato oni i mogu predstavljati realne brojeve.)

TEMELJNO SVOJTVO RASTUĆIH NIZOVA

Ako je s_1, s_2, s_3, \dots rastući niz omeđen odozgo,

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots \leq m,$$

onda postoji $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. (Isto vrijedi i za padajuće nizove omeđene odozdo.)

Ako su članovi reda $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ pozitivni ($a_i \geq 0$) onda njegove djelomične sume S_n čine rastući niz, koji konvergira ako je niz omeđen, ili je $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ ako niz nije omeđen. U oba slučaja ništa se (na granici) ne mijenja ako preskočimo neke djelomične sume. To znači da pribrojnike smijemo slobodno grupirati ako zbrajamo red s pozitivnim članovima. Ako konvergira i dalje će konvergirati prema istoj vrijednosti (šta znamo od prije), a ako divergira i dalje će divergirati. (Uočite da problematični red u primjeru 8(b) ima negativne članove. Postupak u 8(a) sada je opravdan, jer red u 8(a) ima samo pozitivne članove).

GRUPIRANJE PRIBROJNIKA

(asocijativnost beskonačnog zbrajanja)

Ako red konvergira onda red koji dobijemo slobodnim grupiranjem njegovih članova konvergira prema istoj sumi.

Ako red divergira moguće je da grupiranjem njegovih članova dobijemo konvergentni red. To znači da rezultat dobiven grupiranjem može biti netočan.

Ako red ima pozitivne članove slučaj 2. ne može nastupiti. To znači da za redove a pozitivnim članovima dobivamo točnu (konačnu ili beskonačnu) sumu bez obzira kako grupirali njihove članove.

Osim grupiranjem pribrojnika konačne se sume često izračunavaju i njihovim premještanjem, npr.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_4 + a_2 + a_1 + a_3.$$

Smijemo li pribrojnike premještati čak i onda kada ih ima beskonačno mnogo? Razmotrimo dobro nam poznati red

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots,$$

čija je suma $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln 2$. On sadrži pozitivne članove s neparnim nazivnikom

$$(1) \quad 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots,$$

i negativne članove s parnim nazivnikom, koje ćemo podijeliti u dvije skupine. One kojima nazivnik nije djeljiv sa 4

$$(2) \quad -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{14}, \dots,$$

i one kojima je nazivnik djeljiv sa 4

$$(3) \quad -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{16}, \dots$$

Premještanjem pribrojnika početnog reda, tako da redom uzmemo prve elemente niza (1), (2) i (3), potom njihove druge elemente, potom treće itd. dobivamo red s istim ali ispremještanim pribrojnicima

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

Sumu početnog reda označili smo sa S , a njegove djelomične sume sa S_n , dok ćemo sumu ispremještanog reda označiti s T , a njegove djelomične sume s T_n . Djelomična suma T_{3n} sadrži kao pribrojnike po prvih n elemenata nizova (1), (2) i (3). Dakle,

$$\begin{aligned} T_{3n} &= \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2(2n-1)}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 2n}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} S_{2n}. \end{aligned}$$

Slijedi da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{3n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \frac{1}{2} S.$$

Budući da je

$$T_{3n+1} = T_{3n} + \frac{1}{2n+1} \quad \text{i} \quad T_{3n+2} = T_{3n} + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)}\right),$$

slijedi da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{3n} = \frac{1}{2} S, \quad \text{tj.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{1}{2} S.$$

Premještanjem pribrojnika u početnom redu dobili smo red kojem je suma upola manja od početne. Dakle, premještanje pribrojnika utječe na sumu beskonačnog reda.

Ograničimo se opet na redove s pozitivnim članovima. Neka su

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \dots$$

djelomične sume reda s pozitivnim članovima, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, i neka su

$$T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq \dots$$

djelomične sume reda s istim ali ispremještanim pribrojnicima. Prvih n pribrojnika, koji čine S_n , sigurno će se za neki dovoljno veliki m , pojaviti u T_m . Dakle, $S_n \leq T_m$ odakle slijedi da je suma početnog reda S (bila ona konačna ili ∞) manja ili jednaka sumi ispremiješanog reda T (bila ona konačna ili ∞) $S \leq T$. No, uzmemo li ispremiješani red za početni, onda početni postaje ispremiješani, pa na isti način slijedi $T \leq S$. Dakle $S = T$.

PREMJEŠTANJE PRIBROJNIKA
(komutativnost beskonačnog zbrajanja)

Premještanje pribrojnika može utjecati na sumu beskonačnog reda (ako on sadrži članove različitih predznaka).

Ako red ima samo pozitivne članove premještanje pribrojnika ne utječe na njegovu sumu, (Posebno, ako je ona ∞ ostatak će ∞ .)

Red $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ zovemo apsolutno konvergentnim ako je red njegovih apsolutnih vrijednosti $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$,

konverentan. Red $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ konvergira prema sumi $\ln 2$, ali ipak nije apsolutno konverentan, jer

red njegovih apsolutnih vrijednosti, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$, divergira (usp. 2(b) primjer). Takve redove zovemo uvjetno konvergentnima.

Neka je $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ apsolutno konvergentni red. Razdvojimo li njegove pozitivne članove od njegovih negativnih članova:

$$a_i^+ = \begin{cases} |a_i| & \text{ako je } a_i > 0 \\ 0 & \text{ako je } a_i \leq 0, \end{cases} \quad a_i^- = \begin{cases} |a_i| & \text{ako je } a_i < 0 \\ 0 & \text{ako je } a_i \geq 0, \end{cases}$$

onda vidimo da je

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^+ - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^- .$$

Na primjer, ako su u redu $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots$ članovi a_1, a_2, a_4, \dots pozitivni, a članovi a_3, a_5, a_6, \dots negativni, onda isti red možemo zapisati i ovako

$$|a_1| + |a_2| - |a_3| + |a_4| - |a_5| - |a_6| + \dots .$$

Taj red je razlika redova:

$$|a_1| + |a_2| + 0 + |a_4| + 0 + 0 + \dots \quad \text{i} \quad 0 + 0 + |a_3| + 0 + |a_5| + |a_6| + \dots$$

koji nisu drugo do redovi

$$a_1^+ + a_2^+ + a_3^+ + a_4^+ + a_5^+ + a_6^+ + \dots \quad \text{i} \quad a_1^- + a_2^- + a_3^- + a_4^- + a_5^- + a_6^- + \dots .$$

Budući da je $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konvergira onda očitno konvergiraju i redovi $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^+$ i $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^-$. Prema pravilu za oduzimanje konvergentnih redova slijedi da konvergira i njihova razlika $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Dakle, apsolutno konvergentni red konvergira.

PRIMJER 9.

Konvergira li red

$$\frac{1}{10} - \frac{2}{10^2} + \frac{1}{10^3} - \frac{2}{10^4} + \frac{1}{10^5} - \frac{2}{10^6} + \dots$$

Rješenje:

Ispitajmo konvergira li zadani red apsolutno, tj. konvergira li red njegovih apsolutnih vrijednosti,

$$\frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{2}{10^6} + \dots$$

Djelomične sume tog reda

$$S_1 = 0.1, S_2 = 0.12, S_3 = 0.121, S_4 = 0.1212, S_5 = 0.12121, S_6 = 0.121212, \dots$$

rastu i omeđene su (npr. s 0.2), što znači da konvergiraju. (Dapače, znamo da konvergiraju prema $0.12 = 12/99$.) Dakle, zadani red konvergira apsolutno. Odavde slijedi da red konvergira.

Grupiranje i premještanje pribrojnika u apsolutno konvergentom redu ne mijenja njegovu sumu. Naime, grupiranje je ne mijenja ako je red konvergentan, dakle pogotovo je ne mijenja ako je apsolutno

konvergentan. Što se tiče premještanja, dovoljno je primjetiti da premještanje pribrojnika u redu $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

određuje odgovarajuće premještanje u $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^+$ i $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^-$. To su redovi s pozitivnim članovima (koji

konvergiraju ako je $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ apsolutno konvergentan), pa im premještanje pribrojnika ne mijenja sume. No

onda se premještanjem ne mijenja ni razlika tih suma, tj. premještanjem se ne mijenja suma početnog reda.

APSOLUTNO KONVERGENTNI REDOVI SU ASOCIJATIVNI I KOMUTATIVNI

Red $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ je apsolutno konvergentan ako je red $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konvergentan. Red koji je konvergentan, ali nije apsolutno konvergentan zovemo uvjetno konvergentnim.

Svaki apsolutno konvergentan red konvergira.

Grupiranje i premještanje pribrojnika u apsolutno konvergentnom redu ne utječe na njegovu sumu, tj. zbrajanje apsolutno konvergentnih redova je asocijativno i komutativno.

PRIMJER 10.

Uvjetno konvergentni red nužno ima članova različitih predznaka. Dokažimo da uzeti odvojeno, njegovi pozitivni članovi divergiraju prema ∞ , a negativni prema $-\infty$.

Rješenje:

Iz definicije od a_i^+ i a_i^- slijedi:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^+ - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^- \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^+ + \sum_{i=1}^{\infty} a_i^- .$$

Tri su mogućnosti:

- (i) red pozitivnih članova $\sum a_i^+$ i red negativnih članova $\sum a_i^-$ oba konvergiraju,
- (ii) jedan od njih divergira prema ∞ , dok drugi konvergira i
- (iii) oba reda divergiraju prema ∞ .

U prvom slučaju bi red $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$, kao zbroj konvergentnih redova, također konvergirao, što bi značilo da $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergira apsolutno. Dakle, taj slučaj otpada. U drugom slučaju bi red $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergirao prema $\pm \infty$, kao razlika reda koji divergira prema $\pm \infty$ i reda koji konvergira. Dakle i taj slučaj otpada. Preostaje samo treća mogućnost, što smo i trebali dokazati.

Beskonačno zbrajanje sada je sasvim jasno. Apsolutno konvergentni red ima konačnu sumu zato što njegovi pribrojnici dovoljno brzo teže k nuli. Uvjetno konvergentni red ima konačnu sumu zato što se njegovi pozitivni i negativni pribrojnici međusobno kompenziraju. Zbrojeni odvojeno oni svaki za sebe teže u beskonačnost (odakle, uz malo razmišljanja, slijedi da se pribrojnici uvjetno konvergentnog reda mogu poredati na takav način da teže prema bilo kojoj unaprijed zadanoj vrijednosti, i to je razlog zbog kojeg smo red $1 - 1/2 - 1/3 - \dots$ uspjeli isprimještati tako da mu se suma prepolovila).

Ako red s pribrojnicima različitih predznaka ima posebno jednostavan, tzv. alternirajući oblik, lako je ustanoviti njegovu konvergenciju.

ALTERNIRAJUĆI RED

Red $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ zovemo alternirajućim ako njegovi članovi uzastopno mijenjaju predznake, dok njihove apsolutne vrijednosti padaju prema 0. Dakle, ako je:

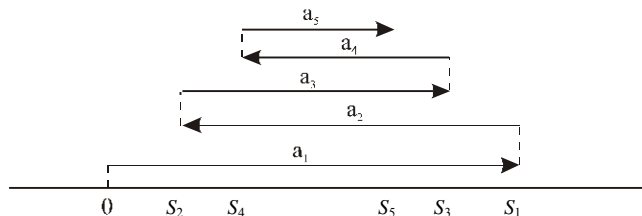
- (i) $a_1 > 0, a_2 < 0, a_3 > 0, \dots$,
- (ii) $|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \dots$ i
- (iii) $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$.

Alternirajući red konvergira.

Greška koju činimo aproksimirajući njegovu sumu S s djelomičnom sumom

$$|S - S_n| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i - \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq |a_{n+1}| \text{ nije veća od } |a_{n+1}|.$$

Predstavimo li članove alternirajućeg reda $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ kao pomake (vidi sl.4.),



Slika 4.

lako ćemo zaključiti, prema temeljnom svojstvu rastućih omeđenih nizova, da postoji $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$, jer je

$S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq \dots \leq S_1$. Slično zaključujemo da postoji $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1}$, jer je $S_1 \geq S_3 \geq S_5 \geq \dots \geq S_2$. Budući da je

$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$, slijedi da postoji $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, tj. alternirajući red konvergira prema sumi S .

Očito je da svaki pomak a_{n+1} prelazi s jedne strane od S na drugu, što znači da je $|S_n - S| < |a_{n+1}|$.

PRIMJER 11.

Ispitajmo konvergenciju redova

(a) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i^2} = -\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \dots,$

(b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots,$

(c) $\frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} + \dots$

Rješenje:

(a) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i^2} = -\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \dots$

je alternirajući red, jer mu predznaci članova alterniraju, a sami članovi padaju prema 0. Dakle, on konvergira. (Uskoro ćemo vidjeti da taj red i apsolutno konvergira.)

(b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$

također je alternirajući red, pa i on konvergira. (Uskoro ćemo vidjeti da taj red ne konvergira apsolutno što znači da konvergira uvjetno.)

(c) Članovi reda $\frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \dots$

alterniraju svojim predznacima i teže k nuli, ali im apsolutne vrijednosti ne opadaju monotono. Naime,

$$\frac{2}{2} > \frac{1}{2} < \frac{2}{3} > \frac{1}{3} < \frac{2}{4} > \frac{1}{4} < \dots$$

Dakle red po našoj definiciji nije alternirajući. Dapače on ne konvergira, jer odgovarajućim grupiranjem dobivamo divergentan red:

$$\left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right) + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

(Ako red konvergira onda svako grupiranje daje njegovu sumu.)

Razmotrimo na kraju množenje beskonačnih redova. Dvije konačne sume, npr. $a + b + c$ i $d + e + f$, množimo tako da množimo "svaki sa svakim", tj distributivno. Sve moguće produkte pribrojnika predstavljamo sljedećom kvadratnom shemom.

	d	e	f
a	ad	ae	af
b	bd	be	bf
c	cd	ce	cf

Slika 5.

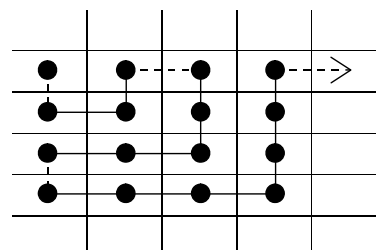
Redosljed zbrajanja svih mogućih produkata nije bitan jer je (konačno) zbrajanje komutativno.

$$\begin{aligned} (a + b + c) \cdot (d + e + f) &= ad + ae + af + bd + be + bf + cd + ce + cf = \\ &= ad + bd + cd + ae + be + ce + af + bf + cf = \dots \end{aligned}$$

Množimo li dvije beskonačne sume $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ i $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$, svaki sa svakim tj. distributivno, pitanje je kako poredati sve moguće produkte. Znamo da suma beskonačnog reda može ovisiti o poretku pribrojnika. Svi mogući produkti i jedan njihov mogući poredak predstavljeni su kvadratni shemama na sl. 6. i 7.

	b_1	b_2	b_3	b_4	...
a_1	a_1b_1	a_1b_2	a_1b_3	a_1b_4	...
a_2	a_2b_1	a_2b_2	a_2b_3	a_2b_4	...
a_3	a_3b_1	a_3b_2	a_3b_3	a_3b_4	...
a_4	a_4b_1	a_4b_2	a_4b_3	a_4b_4	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Slika 6.



Slika 7.

Ako redovi $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ i $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|$ konvergiraju onda i red svih mogućih produkata $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_i| |b_j|$, u poretku

prikazanom na sl.7. također konvergira. Naime, ako je $\overline{A}_n = \sum_{i=1}^n |a_i|$ i $\overline{B}_n = \sum_{i=1}^n |b_i|$ onda je

$\overline{P}_{n^2} = \sum_{i,j=1}^n |a_i| |b_j| = \left(\sum_{i=1}^n |a_i| \right) \left(\sum_{i=1}^n |b_i| \right) = \overline{A}_n \overline{B}_n$, pa iz konvergencije djelomičnih suma \overline{A}_n i \overline{B}_n slijedi

konvergencija djelomičnih suma \overline{P}_{n^2} . Budući da je niz \overline{P}_{n^2} rastući onda je $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{P}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{P}_{n^2}$. Dakle, iz

apsolutne konvergencije redova $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ i $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ slijedi apsolutna konvergencija reda $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j$, dobivenog množenjem "svakoga sa svakim".

No sumu apsolutno konvergentnog reda možemo izračunati slobodnim redanjem i grupiranjem njegovih

članova, Poredamo li sve moguće produkte članova od $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ i $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ u poretku prikazanom na sl.7. i

grupiramo li zajedno one koji su na sl.7. povezani punom linijom, onda za djelomičnu sumu tako dobivenog reda vrijedi

$$P_n = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) = A_n \cdot B_n.$$

Ako je $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A$, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, i $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = B$, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$, onda je $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \cdot B_n = A \cdot B$, tj.

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j = A \cdot B.$$

MNOŽENJE REDOVA

Ako su redovi $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ i $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ apsolutno konvergentni onda je apsolutno konvergentan i red $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j$,

koji zovemo umnoškom tih dvaju redova, a čiji su članovi svi mogući produkti oblika $a_i b_j$. (Iako iz zapisa

$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j$ nije vidljivo kojim redom treba zbrajati pribrojnik oblika $a_i b_j$ to nije važno, jer apsolutno

konvergentni red daje istu sumu u svakom redosljedju.) Osim toga

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i \right),$$

tj. suma umnoška dvaju apsolutno konvergentnih redova jednaka je umnošku njihovih suma.

PRIMJER 12.

Izračunajmo sumu reda

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{2 \cdot 3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots$$

Rješenje:

Radi se o produktu dvaju geometrijskih redova

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \quad \text{i} \quad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots,$$

što ćemo lako uočiti obratimo li pažnju na dijagonale kvadratne sheme, koja prikazuje taj produkt:

	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3^2}$	$\frac{1}{3^3}$	$\frac{1}{3^4}$	
1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3^2}$	$\frac{1}{3^3}$	$\frac{1}{3^4}$	\ddots
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2 \cdot 3}$	$\frac{1}{2 \cdot 3^2}$	$\frac{1}{2 \cdot 3^3}$	\ddots	\ddots
$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^2 \cdot 3}$	$\frac{1}{2^2 \cdot 3^2}$	\ddots	\ddots	
$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^3 \cdot 3}$	\ddots	\ddots		
$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^4}$	\ddots	\ddots			
	\ddots	\ddots				

Dakle, suma zadanog reda je $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$.

7.3 TESTOVI KONVERGENCIJE

U ovom odjeljku prikazat ćemo osnovne testove za utvrđivanje konvergencije redova.

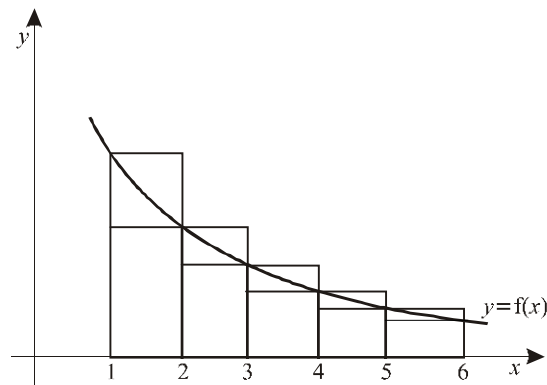
S jednim takvim testom već smo se upoznali u prethodnom odjeljku: kada utvrdimo da je red alternirajući možemo biti sigurni da konvergira.

Sljedeći test temelji se na očiglednoj vezi reda $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$ i nepravog integrala $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

INTEGRALNI TEST

Neka je f pozitivna padajuća funkcija definirana za $x \geq 1$.

Red $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$ konvergira ako, i samo ako, nepravni integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ također konvergira.



Slika 1.

Prikažemo li graf funkcije $y=f(x)$ zajedno s njenim najvećim i najmanjim vrijednostima na cjelobrojnim jediničnim intervalima (vidi sl.1.), lako vidimo da je

$$f(2) \leq \int_1^2 f(x)dx \leq f(1),$$

$$f(3) \leq \int_2^3 f(x)dx \leq f(2),$$

$$\vdots$$

$$f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x)dx \leq f(n-1),$$

odakle zbrajanjem slijedi

$$f(2) + f(3) + \dots + f(n) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(1) + f(2) + \dots + f(n-1).$$

Dakle

$$S_n \leq f(1) + \int_1^n f(x)dx \quad \text{i} \quad \int_1^n f(x)dx \leq S_{n-1}.$$

Ako postoji $\int_1^\infty f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x)dx$ onda su djelomične sume S_n omeđene odozgo sa $f(1) + \int_1^\infty f(x)dx$, pa postoji i $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Dakle, ako konvergira nepravi integral, konvergira i red.

S druge strane, ako postoji $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}$ onda je niz integrala $I_n = \int_1^n f(x)dx$ omeđen odozgo sa S , pa

postoji $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x)dx = \int_1^\infty f(x)dx$. Dakle, ako konvergira red, konvergira i nepravi integral.

PRIMJER 1.

Ispitajmo konvergenciju reda $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$, za bilo koji p .

Rješenje:

Zadani red je oblika $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$, gdje je $f(x) = \frac{1}{x^p}$ pozitivna padajuća funkcija, definirana za $x \geq 1$.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \frac{1}{x^{p-1}} \Big|_1^{\infty} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{za } p > 1 \\ \infty, & \text{za } p < 1. \end{cases}$$

Dakle, nepravi integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ postoji za $p > 1$, a ne postoji za $p < 1$. To znači, prema integralnom

tekstu, da red $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$ ima sumu za $p > 1$, a nema je za $p < 1$. Za $p = 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty.$$

pa red $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ nema sume (što nam je otprije poznato).

Razlika $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i}$ (to je površina od donjih stupaca do grafa $y = f(x) = 1/x$ na sl.1.) ima konačnu vrijednost $\gamma = 0.5772156649$ i zove se Eulerova konstanta.

HARMONIJSKI p -REDOVI

Red $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ je harmonijski red. Taj red divergira.

Red $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$ je harmonijski p -red. Taj red konvergira za $p > 1$, a divergira za $p \leq 1$.

Jedan od načina da se utvrdi konvergira li red ili ne, jest da ga usporedimo s redom za koji znamo konvergira li ili ne. (Budući da nas najčešće zanima apsolutna konvergencija reda najčešće uspoređujemo apsolutne vrijednosti njegovih članova.)

TEST USPOREĐIVANJEM

Neka su $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ i $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ redovi, uz $b_i > 0$ za svaki i .

Ako je $C > 0$ takav broj da je $|a_i| \leq Cb_i$, za svaki i , i ako red $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergira onda red $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ apsolutno konvergira (dakle i konvergira).

Ako je $c > 0$ takav broj daje $a_i \geq cb_i$, za svaki i , i ako red $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ divergira, onda red $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ također divergira.

Naime, ako je $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = B$ i ako je $|a_i| \leq Cb_i$, za sve i , onda je

$$\overline{A}_n = \sum_{i=1}^n |a_i| \leq C \sum_{i=1}^n b_i \leq C \cdot B.$$

Niz djelomičnih suma $\overline{A}_1 \leq \overline{A}_2 \leq \dots \leq C \cdot B$ rastući je i omeđen, pa konvergira. To znači da $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ apsolutno konvergira. Slično dokazujemo i valjanost drugog dijela testa.

PRIMJER 2.

Konvergiraju li redovi

$$(a) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots, \quad (b) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i + i} = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{2^3+3} + \dots,$$

$$(c) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2}{i^3 + i} = \frac{1^2}{1^3+1} + \frac{2^2}{2^3+1} + \frac{3^2}{3^3+1} + \frac{4^2}{4^3+4} + \frac{5^2}{5^3+5} + \dots$$

Rješenje:

(a) Usporedba s geometrijskim redom, koji konvergira,

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{1}{1 \cdot 2} & + & \frac{1}{2 \cdot 3} & + & \frac{1}{3 \cdot 4} & + & \frac{1}{4 \cdot 5} & + \dots \\ \leq & & \leq & & \leq & & \leq & \\ \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2^2} & + & \frac{1}{3^2} & + & \frac{1}{4^2} & + \dots \end{array}$$

pokazuje nam da zadani red konvergira.

(b) Usporedba s geometrijskim redom, koji konvergira,

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{2+1} & + & \frac{1}{2^2+2} & + & \frac{1}{2^3+3} & + & \frac{1}{2^4+4} & + \dots \\ \leq & & \leq & & \leq & & \leq & \\ \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2^2} & + & \frac{1}{2^3} & + & \frac{1}{2^4} & + \dots \end{array}$$

pokazuje nam da zadani red konvergira.

(c) Lakim računom nalazimo

$$\frac{i^2}{i^3+i} = \frac{1}{i+\frac{1}{i^2}} = \frac{1}{i} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{i^3}} \right) \geq \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{2},$$

odakle slijedi da $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2}{i^3+i}$ divergira, jer $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergira.

Pokušamo li ispitati konvergenciju reda $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i-i}$, vidjet ćemo da jednostavna usporedba s geometrijskim redom $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$, poput one u primjeru 2(b), nije moguća jer je $\frac{1}{2^i-i} \geq \frac{1}{2^i}$. Ipak, čini se da problem nije bitno različit od onog u primjeru 2(b). To pokazuje sljedeća varijanta testa uspoređivanjem.

TEST USPOREĐIVANJEM
(alternativni oblik)

Neka su $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ i $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ redovi, uz $b_i > 0$ za svaki i .

Ako je $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|a_i|}{b_i} < \infty$ i ako red $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergira onda red $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ apsolutno konvergira (dakle i konvergira).

Ako je $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{b_i} > 0$ i ako red $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ divergira, onda i red $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergira.

Naime, ako je $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|a_i|}{b_i} = M < \infty$, onda za dovoljno velike i vrijedi $\frac{|a_i|}{b_i} < M + 1$, tj. $|a_i| < (M + 1)b_i$, od neke vrijednosti i nadalje. Budući da konačno mnogo članova reda (prije te vrijednosti) ne utječe na konvergenciju, možemo zaključivati kao da je $|a_i| < (M + 1)b_i$ za sve i . No to znači da je ispunjen uvjet testa uspoređivanjem, uz $C = M + 1$, pa $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ apsolutno konvergira. Slično dokazujemo i drugi dio.

PRIMJER 3.

Konvergiraju li redovi

(a)
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i - i} = 1 + \frac{1}{2^2 - 2} + \frac{1}{2^3 - 3} + \dots,$$

(b)
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{5+i} = \frac{2}{6} + \frac{2}{7} + \frac{2}{8} + \dots$$

Rješenje:(a) Neka je $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$. Tada je

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{b_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1/(2^i - i)}{1/2^i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{2^i}{2^i - i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - i/2^i} = \frac{1}{1 - 0} = 1.$$

Budući da red $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ konvergira, onda i red $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i - i}$ konvergira.(b) Neka je $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$. Tada je

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{b_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{2/(5+i)}{1/i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{i}{i+5} = 1.$$

Budući da red $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergira, onda i red $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{5+i}$ divergira.

Uspoređivanjem možemo utvrditi i valjanost kvocijentnog testa.

KVOCIJENTNI TESTNeka su $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ i $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ redovi, uz $b_i > 0$ za svaki i .Ako je $\frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} \leq \frac{b_{i+1}}{b_i}$, za svaki i (ili ako je $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} < \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{b_{i+1}}{b_i}$), te ako red $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergira, onda red $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ apsolutno konvergira.Ako je $\frac{a_{i+1}}{a_i} \geq \frac{b_{i+1}}{b_i}$, za svaki i (ili ako je $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_{i+1}}{a_i} > \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{b_{i+1}}{b_i}$), te ako red $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ divergira, onda i red $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergira.

Naime, iz

$$|a_i| \leq |a_1| \frac{|a_2|}{|a_1|} \frac{|a_3|}{|a_2|} \cdots \frac{|a_i|}{|a_{i-1}|} \quad \text{i} \quad \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$$

slijedi da je

$$|a_i| \leq |a_1| \frac{b_2}{b_1} \frac{b_3}{b_2} \cdots \frac{b_i}{b_{i-1}} = \frac{|a_1|}{b_1} b_i.$$

Primjenom testa uspoređivanjem (uz $C = |a_1|/b_1$) utvrđujemo da $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ apsolutno konvergira. Ako je

$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} < \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{b_{i+1}}{b_i}$ onda je, za dovoljno velike i , $\frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} < \frac{b_{i+1}}{b_i}$, pa vrijedi isti zaključak. Slično dokazujemo i drugi dio testa.

PRIMJER 4.

Ispitajmo konvergenciju reda $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ln i}{i} = \frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \dots$

Rješenje:

Ako je $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ln i}{i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} b_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$,

onda je $\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{\ln(i+1)/(i+1)}{\ln i/i} = \frac{i}{i+1} \cdot \frac{\ln(i+1)}{\ln i} \geq \frac{i}{i+1} = \frac{1/(i+1)}{1/i} = \frac{b_{i+1}}{b_i}$.

Budući da red $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergira, onda i red $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ln i}{i}$ također divergira.

Najvažniji je posebni slučaj kvocijentnog testa, u kojem je $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ geometrijski red s kvocijentom q , tj.

$$\frac{b_{i+1}}{b_i} = q \quad \text{za sve } i.$$

KVOCIJENTNI TEST (posebni slučaj)

Ako je $\frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} \leq q \leq 1$, za svaki i , ili ako je $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} < 1$, onda red $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ apsolutno konvergira.

Ako je $\frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} \geq q \geq 1$, za svaki i , ili ako je $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} > 1$, onda red $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergira.

Ako je $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} = 1$ test ne daje odluku.

PRIMJER 5.

Primjenom posebnog slučaja kvocijentnog testa ispitajmo konvergenciju redova

$$(a) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{3^i} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots$$

$$(b) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$(c) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i^{10}} = 2 + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \dots$$

$$(d) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots$$

Rješenje:

$$(a) \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(i+1)/3^{i+1}}{i/3^i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{i+1}{i} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1. \text{ Dakle red konvergira.}$$

$$(b) \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x^{i+1}/(i+1)!}{x^i/i!} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x}{i+1} = 0 < 1. \text{ Dakle, red konvergira.}$$

(Naravno, iz prethodnog odjeljka znamo da se radi o Taylorovom redu sa sumom e^x .)

$$(c) \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{2^{i+1}/(i+1)^{10}}{2^i/i^{10}} = \lim_{i \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{i}{i+1} \right)^{10} = 2 > 1. \text{ Dakle, red divergira.}$$

$$(d) \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1/(i+1)^p}{1/i^p} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{i}{i+1} \right)^p = 1. \text{ Kvocijentni test ne daje odluku.}$$

(Integralni test nam je pokazao da red konvergira za $p > 1$ i divergira za $p \leq 1$.)

Naš posljednji test sličan je posebnom slučaju kvocijentnoga, u tom smislu što se i on svodi na uspoređivanje s geometrijskim redom:

KORIJENSKI TEST

Ako je $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q < 1$, za svaki i , ili ako je $\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{|a_i|} < 1$, onda $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ apsolutno konvergira.

Ako je $\sqrt[i]{|a_i|} \geq q > 1$, za svaki i , ili ako je $\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{|a_i|} > 1$, onda $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergira.

Ako je $\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{|a_i|} = 1$ test ne daje odluku.

Ako je $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q < 1$, onda je $|a_i| \leq q^i$. Budući da je $\sum_{i=1}^{\infty} q^i$ konvergentni geometrijski red za $q < 1$, slijedi da $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergira apsolutno. Ako je $\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{|a_i|} < 1$, onda postoji $q < 1$ takav da za dovoljno velike i

vrijedi $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q < 1$, pa vrijedi isti zaključak. Slično dokazujemo i drugi dio testa.

PRIMJER 6.

Primjenom korijenskog testa ispitujemo konvergenciju redova:

$$(a) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^i} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots, \quad (b) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^i}{i^3} = 3 + \frac{3^2}{2^3} + \frac{3^3}{3^3} + \dots, \quad (c) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$$

Rješenje:

$$(a) \lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{\frac{1}{i^i}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{i} = 0 < 1. \text{ Dakle, red konvergira.}$$

$$(b) \lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{\frac{3^i}{i^3}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{3}{i^{3/i}} = 3 > 1, \text{ jer je (prema L'Hôpitalovom pravilu)}$$

$$\ln\left(\lim_{i \rightarrow \infty} i^{3/i}\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \ln(i^{3/i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{3}{i} \ln i = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{3}{i} = 0, \text{ tj. } \lim_{i \rightarrow \infty} i^{3/i} = e^0.$$

Dakle, red divergira.

$$(c) \lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{\frac{1}{i^p}} = \lim_{i \rightarrow \infty} i^{p/i} = 1, \text{ kao i u prethodnom slučaju (s } p=3), \text{ pa test ne daje odluku. (Integralni test nam je pokazao da red konvergira za } p > 1 \text{ i divergira za } p \leq 1.)$$

7.4 REDOVI POTENCIJA

Redove oblika $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, gdje su a_n -ovi i x_0 konstante, a x varijabla, zovemo redovima potencija

budući da zbrajamo potencije od $(x-x_0)$. Suma takvog reda je funkcija od x , definirana za one vrijednosti x za koje red konvergira. Razmotrimo najprije redove potencija u kojima je $x_0 = 0$, tj. one oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Ako je $a_i = 0$ za $i > n$ onda red predstavlja polinom

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,$$

koji je definiran za svaki $x \in \mathbb{R}$. S druge strane ustanovili smo da i ostale elementarne funkcije možemo prikazati kao sume redova potencija, tj. kao beskonačne polinome. Na primjer,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad \text{za } x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots, \quad \text{za } x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots, \quad \text{za } x \in \mathbb{R},$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots, \quad \text{za } |x| < 1,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots, \quad \text{za } x \in (-1, 1],$$

i tako dalje. Zapravo, sve funkcije kojima smo se do sada bavili sume su redova potencija, pa je vrijeme da se njima pozabavimo sasvim općenito.

Područje konvergencije nekog reda potencija često možemo odrediti koristeći se kvocijentnim ili korijenskim testom konvergencije.

RADIJUS KONVERGENCIJE

Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$, ili $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, onda red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ apsolutno konvergira za $|x| < R$ i divergira za $|x| > R$, gdje je $R = \frac{1}{l}$ (uz konvenciju $\frac{1}{0} = \infty$ i $\frac{1}{\infty} = 0$).

R zovemo radijusom konvergencije reda potencije $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Dokaz je lagan. Naime, primijenimo kvocijentni test na red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x| = l|x|,$$

pa red apsolutno konvergira, ako je $l|x| < 1$, odnosno divergira, ako je $l|x| > 1$. No to znači da apsolutno konvergira za $|x| < R$ i divergira za $|x| > R$. Primjenom korijenskog testa nalazimo isti rezultat za

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

PRIMJER 1.

Koliki je radijus konvergencije redova

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \dots,$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{4}x + \left(\frac{2}{7}\right)^2 x^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^3 x^3 + \left(\frac{4}{13}\right)^4 x^4 + \dots$$

Rješenje:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, pa je radijus konvergencije $R = 1$. To znači da je funkcija

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

definirana za svaki $|x| < 1$, a nije definirana za $|x| > 1$. Za $x = 1$ dobivamo divergentni harmonijski red, a za $x = -1$ konvergentni alternirajući red. Dakle funkcija $f(x)$ definirana je za $x \in [-1, 1)$.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = 1$, pa je radijus konvergencije $R = 1$. To znači da je funkcija

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \dots$$

definirana za $|x| < 1$, a nije definirana za $|x| > 1$. Za $x = 1$ dobivamo apsolutno konvergentni harmonijski 2-red, a za $x = -1$ konvergentni alternirajući red. Dakle, funkcija $f(x)$ definirana je za $x \in [-1, 1]$.

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, pa je radijus konvergencije $R = \infty$. To znači da je funkcija

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

definirana za svaki realni x . (Uočite da smo do tog zaključka došli ne pozivajući se na naše poznavanje funkcije e^x .)

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3$, pa je radijus konvergencije $R = \frac{1}{3}$. To znači da je funkcija

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{4}x + \left(\frac{2}{7}\right)^2 x^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^3 x^3 + \left(\frac{4}{13}\right)^4 x^4 + \dots$$

definirana za $|x| < \frac{1}{3}$, a nije definirana za $|x| > \frac{1}{3}$. Za $x = -\frac{1}{3}$ dobivamo alternirajući red, pa je funkcija definirana i za $x = -\frac{1}{3}$. Za $x = \frac{1}{3}$ potrebna je daljnja analiza.

PRIMJER 2.

Izračunajmo radijus konvergencije redova

(a) $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, (b) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.

Rješenje:

(a)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n+1)}}{\frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)|}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha-n|}{|n+1|} = 1.$$

Dakle, $R = 1$, tj. $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ konvergira za $|x| < 1$.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} = 1$. Dakle, $R = 1$, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ konvergira za $|x| < 1$.

Bez obzira postoji li $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, ili $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uvijek ima svoj radijus

konvergencije R . Dakle, svaki red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ definira funkciju unutar svojeg intervala (apsolutne) konvergencije $(-R, R)$ ali ne i izvan tog intervala (vidi sl.1.),

funkcija f definirana je unutar intervala konvergencije $(-R, R)$

funkcija f nije definirana izvan intervala konvergencije $(-R, R)$



$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ ima radijus konvergencije } R.$$

Slika 1.

Zainteresiranom čitatelju nudimo i dokaz te činjenice. Uočimo najprije da iz konvergencije reda

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$, slijedi konvergencija reda $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n$, za svaki $|x| < r$. To je neposredna posljedica testa

uspoređivanjem, budući da je $|a_n||x|^n \leq |a_n|r^n$. Označimo li s R najmanju gornju među svih r koji imaju

svojstvo da $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ konvergira, lako ćemo se uvjeriti da je ona traženi radijus konvergencije.

Iz pravila za zbrajanje i oduzimanje redova, te za množenje reda s konstantom, slijede odgovarajuća pravila za računanje s redovima potencija. Budući da redovi potencija konvergiraju apsolutno (unutar svojeg radijusa konvergencije) množimo ih po načelu “svaki sa svakim”, uz koji god želimo poredak i kakvo god želimo grupiranje. Naravno, prirodno je umnoške poredati po rastućim potencijama i grupirati ih uz istu potenciju.

	b_0	b_1x	b_2x^2	b_3x^3	...
a_0	a_0b_0	a_0b_1x	$a_0b_2x^2$	$a_0b_3x^3$	\ddots
a_1x	a_1b_0x	$a_1b_1x^2$	$a_1b_2x^3$	\ddots	\ddots
a_2x^2	$a_2b_0x^2$	$a_2b_1x^3$	\ddots	\ddots	\ddots
a_3x^3	$a_3b_0x^3$	\ddots	\ddots	\ddots	\ddots
\vdots	\ddots	\ddots	\ddots	\ddots	\ddots

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots) =$$

$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + \dots$$

Ukratko, redovi potencija zbrajaju se, oduzimaju i množe kao i polinomi.

OSNOVNE RAČUNSKE OPERACIJE S REDOVIMA POTENCIJA

Neka je $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ za $|x| < R$ i $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ za $|x| < S$. Ako je $T = \min\{R, S\}$ onda je

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, \text{ za } |x| < T,$$

$$cf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) x^n, \text{ za } |x| < R,$$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) x^n, \text{ za } |x| < T.$$

Ako je $b_0 \neq 0$ onda je $f(x)/g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, gdje se koeficijenti c_n dobivaju postupkom dijeljenja (u ovom slučaju beskonačnih) polinoma. Određenje radijusa konvergencije kvocijenta f/g zahtijeva daljnju analizu.

PRIMJER 3.

Razvijmo u red potencija funkciju $f(x) = \frac{1}{(2-x)(3-x)}$.

Rješenje:

Mogli bismo naći Taylorov razvoj funkcije $f(x)$, no to bi bio mukotrpan posao. Stoga pokušajmo funkciju $f(x)$ prikazati u sljedećem obliku

$$\frac{1}{(2-x)(3-x)} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{3-x}.$$

Množenjem s nazivnikom $(2-x)(3-x)$ nalazimo

$$1 = A(3-x) + B(2-x) = (3A+2B) - (A+B)x,$$

što će biti zadovoljeno ako je $3A+2B=1$ i $A+B=0$. Riješimo li taj jednostavni sustav za A i B nalazimo $A=1$ i $B=-1$.

Dakle,

$$\frac{1}{(2-x)(3-x)} = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{3-x}.$$

Pribrojnik sada lako možemo razviti u geometrijske redove

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \text{ za } |x| < 2, \quad \frac{1}{3-x} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n, \text{ za } |x| < 3.$$

Prema pravilu za oduzimanje redova potencija nalazimo

$$\frac{1}{(2-x)(3-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) x^n, \text{ za } |x| < 2.$$

PRIMJER 4.

Razvijmo u red potencija funkciju $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$.

Rješenje:

Znamo da je

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \text{ za } x \in \mathbb{R},$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \text{ za } |x| < 1.$$

Množeći svaki sa svakim

	1	$\frac{x}{1!}$	$\frac{x^2}{2!}$	$\frac{x^3}{3!}$	$\frac{x^4}{4!}$...
1	1	$\frac{x}{1!}$	$\frac{x^2}{2!}$	$\frac{x^3}{3!}$	$\frac{x^4}{4!}$...
x	x	$\frac{x^2}{1!}$	$\frac{x^3}{2!}$	$\frac{x^4}{3!}$		
x^2	x^2	$\frac{x^3}{1!}$	$\frac{x^4}{2!}$			
x^3	x^3	$\frac{x^4}{1!}$				
x^4	x^4					
\vdots	\vdots					

i grupirajući članove jednakih potencija nalazimo

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{1-x} &= 1 + \left(x + \frac{x}{1!}\right) + \left(x^2 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right) + \left(x^3 + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) + \left(x^4 + \frac{x^4}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right) + \dots = \\ &= 1 + \left(1 + \frac{1}{1!}\right)x + \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right)x^3 + \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right)x^4 + \dots, \end{aligned}$$

za $|x| < 1$.

PRIMJER 5.

Razvijmo u red potencija funkciju $(e^x - 1)/x$ i njoj recipročnu funkciju $x/(e^x - 1)$.

Rješenje:

Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots,$$

pa odatle slijedi

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + \dots$$

Recipročna funkcija, za neke (za sada nam nepoznate) koeficijente B_0, B_1, B_2, \dots ima razvoj

$$\frac{x}{e^x - 1} = B_0 + B_1 x + B_2 \frac{x^2}{2!} + B_3 \frac{x^3}{3!} + B_4 \frac{x^4}{4!} + \dots$$

za $|x| < R$, gdje je R njezin radijus konvergencije (za koji se može pokazati da je $\pi/2$).

Zbog $\frac{x}{e^x - 1} \cdot \frac{e^x - 1}{x} = 1$ slijedi

$$\left(\frac{B_0}{0!} + \frac{B_1}{1!} x + \frac{B_2}{2!} x^2 + \dots \right) \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} x + \frac{1}{3!} x^2 + \dots \right) = 1.$$

Slobodni koeficijent produkta na lijevoj strani je B_0 , dok je na desnoj 1. Dakle, $B_0 = 1$.

Izjednačavanjem koeficijenata uz x^{n-1} u produktu na lijevoj strani s nulom (što je koeficijent uz x^{n-1} na desnoj strani, za $n > 1$) nalazimo

$$\frac{B_0}{0!n!} + \frac{B_1}{1!(n-1)!} + \frac{B_2}{2!(n-2)!} + \dots + \frac{B_{n-1}}{(n-1)!1!} = 0$$

što nakon množenja jednadžbe s $n!$ daje

$$\binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \binom{n}{2} B_2 + \dots + \binom{n}{n-1} B_{n-1} = 0.$$

Iz ove rekurzivne jednadžbe, polazeći od $B_0 = 1$, možemo izračunati svaki B_{n-1} , za $n > 1$.

$$\binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_1 = -\frac{1}{2},$$

$$\binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{2} B_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_2 = \frac{1}{6},$$

i tako dalje: $B_3 = 1, B_4 = -1/30, B_5 = 0, B_6 = 1/42, B_7 = 0, B_8 = -1/30, B_{10} = 0, \dots$

Koeficijenti B_n zovu se Bernoullijevi brojevi. Pokazat ćemo da su svi koeficijenti s neparnim indeksom (osim $B_1 = -1/2$) jednaki nuli. Naime,

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{2} \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 1 \right) = -\frac{x}{2} + \frac{x e^x + 1}{2 e^x - 1},$$

gdje je drugi pribrojnik parna funkcija

$$-\frac{x e^{-x} + 1}{2 e^{-x} - 1} \cdot \frac{e^x}{e^x} = -\frac{x 1 + e^x}{2 1 - e^x} = \frac{x e^x + 1}{2 e^x - 1}.$$

To znači da je $x/(e^x - 1)$ zbroj funkcije $-x/2$ i parne funkcije čiji razvoj u red potencija sadrži samo parne potencije. Dakle, koeficijenti uz neparne potencije su nula, tj. $B_3, B_5, B_7, B_9, \dots = 0$.

PRIMJER 6.

Dijeljenjem polinoma u brojniku s polinomom u nazivniku, razvijmo u red

(a) $\frac{1}{1-x}$, (b) $\frac{1+x}{1-x}$, (c) $\frac{\sin x}{\cos x}$.

Rješenje:

(a) $1 : (1-x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ (b) $(1+x) : (1-x) = 1 + 2x + 2x^2 + \dots + 2x^n + \dots$

$\begin{array}{r} \frac{-(1-x)}{x} \\ \hline -(x-x^2) \\ \hline x^2 \\ -(x^2-x^3) \\ \hline x^3 \\ \vdots \\ \hline x^{n+1} \\ \vdots \end{array}$	$\begin{array}{r} \frac{-(1-x)}{2x} \\ \hline -(2x-2x^2) \\ \hline 2x^2 \\ -(2x^2-2x^3) \\ \hline 2x^3 \\ \vdots \\ \hline 2x^{n+1} \\ \vdots \end{array}$
--	--

- (a) Konvergencija djelomičnih kvocijenata $1 + x + x^2 + \dots + x^n$ ovisi o tome konvergira li ostatak dijeljenja x^{n+1} prema nuli. To vrijedi za $|x| < 1$, pa i djelomični kvocijenti konvergiraju prema kvocijentu $1 + x + x_2 + \dots$, za $|x| < 1$.
- (b) Ostaci dijeljenja $2x^{n+1}$ konvergiraju prema nuli za $|x| < 1$, pa je kvocijent jednak $1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots$, za $|x| < 1$.

Primjetimo da isti rezultat dobivamo i standardnom upotrebom geometrijskog reda:

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{1-x} + x \left(\frac{1}{1-x} \right) = (1 + x + x^2 + \dots) + x(1 + x + \dots) = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots$$

(c) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

$$\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots \right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots \right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots$$

$$- \left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \frac{x^7}{720} + \dots \right)$$

$$\begin{array}{r} \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \frac{x^7}{840} + \dots \\ - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{720} + \dots \right) \\ \hline \frac{2x^5}{15} - \frac{4x^7}{315} + \dots \\ - \left(\frac{2x^5}{15} - \frac{x^7}{15} + \dots \right) \\ \hline \frac{17x^7}{315} + \dots \\ - \left(\frac{17x^7}{315} + \dots \right) \\ \hline \vdots \end{array}$$

Može se dokazati da dobiveni red konvergira za $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Dakle, razvoj funkcije $\operatorname{tg} x$ u red potencija (npr. 7.6) izgleda ovako

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots$$

PRIMJER 7.

Razvijmo u red potencija složenu funkciju $\ln(1 + \sin x)$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} \ln(1 + \sin x) &= \frac{\sin x}{1} - \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{3} - \dots = \\ &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots}{1} - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots\right)^3}{3} = \\ &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots}{1} - \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + \dots}{2} + \frac{x^3 - \frac{x^5}{3} + \dots}{3} - \frac{x^4 - \dots}{4} + \frac{x^5 - \dots}{5} - \dots = \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24} - \dots \end{aligned}$$

Redove smo zbrajali, oduzimali i množili prema odgovarajućim pravilima, a dobivene pribrojnice smo slobodno premještali i grupirali jer apsolutno konvergiraju.

PRIMJER 8.

Izračunajmo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\operatorname{tg} x - x}$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} \frac{\sin x - x}{\operatorname{tg} x - x} &= \frac{(\sin x)(\cos x) - x \cos x}{\sin x - x \cos x} = \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots\right)}{\left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots\right)} = \\ &= \frac{\left(x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \dots\right) - \left(x - \frac{x^3}{2} + \dots\right)}{\left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right) - \left(x - \frac{x^3}{2} + \dots\right)} = \frac{-\frac{x^3}{6} + \dots}{\frac{x^3}{3} + \dots} = \frac{-\frac{1}{6} + \dots}{\frac{1}{3} + \dots} \quad (\text{nakon dijeljenja s } x^3) \end{aligned}$$

Budući da posljednji izrazi označeni “+...” sadrže potencije od x stupnja $n \geq 1$, slijedi da oni teže nuli kada x teži nuli. Dakle,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\operatorname{tg} x - x} = -\frac{1/6}{1/3} = -\frac{1}{2}.$$

Ne izvode se samo osnovne računске operacije s redovima potencija na isti način kao s polinomima, tj. “član po član”. Redovi potencija također se deriviraju i integriraju član po član, kao i obični polinomi. (Zainteresiranom čitatelju nudimo i dokaz ove činjenice na kraju ovoga odjeljka.)

DERIVIRANJE I INTEGRIRANJE REDOVA POTENCIJA

Suma reda potencija derivira se i integrira, unutar svojeg radijusa konvergencije, tako da se derivira odnosno integrira član po član.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \\ \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right] dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} + C. \end{aligned}$$

(Radijus konvergencije deriviranog i integriranog reda jednak je radijusu konvergencije početnog reda.)

PRIMJER 9.

Izračunajmo $f'(x)$ i $\int f(x) dx$, ako je $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (za $|x| < 1$).

Rješenje:

Iz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$, slijedi

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots, \quad \int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + C,$$

za $|x| < 1$. Budući da je $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

slijedi da je

$$\frac{-1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots, \quad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots,$$

za $|x| < 1$, ($C=0$, jer je $\ln(1-0) = 0$).

PRIMJER 10.

Koristeći se razvojem funkcije $\frac{x}{1+x^2}$, razvijmo u red funkciju $\ln(1+x^2)$, za $|x| < 1$.

Rješenje:

Za $|x| < 1$ vrijedi

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots, \quad \frac{x}{1+x^2} = x - x^3 + x^5 - x^7 + \dots$$

Integracijom nalazimo

$$\ln(1+x^2) = 2 \int \frac{x}{1+x^2} dx = 2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8} + \dots \right) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \dots$$

Konstanta integracije $C=0$, jer je $\ln(1+0) = 0$.

PRIMJER 11.

Razvijmo u red potencija funkciju $\arcsin x$.

Rješenje:

Znamo da je

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^x (1-x^2)^{-1/2} dx.$$

Primjenom Newtonove binomne formule, za $\alpha = -\frac{1}{2}$ (uz uvrštavanje $-x^2$ umjesto x) dobivamo

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots, \quad \text{za } |x| < 1.$$

Integracijom reda nalazimo da je

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots, \text{ za } |x| < 1.$$

Može se pokazati da red konvergira i za $x = 1$ odakle slijedi,

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9} + \dots$$

PRIMJER 12.

Koristeći se infinitezimalnim računom beskonačnih polinoma nađimo funkciju $f(x)$ takvu da je

$$f'(x) = f(x) \text{ i } f(0) = 1. \text{ (Pretpostavimo da ništa ne znamo o funkciji } e^x \text{.)}$$

Rješenje:

Funkciju ćemo pokušati izraziti kao sumu reda potencija (tj. u obliku beskonačnog polinoma)

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Uvjet $f'(x) = f(x)$ bit će zadovoljen ako je

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots,$$

tj. ako je

$$a_1 = a_0, \quad 2a_2 = a_1, \quad 3a_3 = a_2, \quad 4a_4 = a_3, \quad \dots$$

Iz $f(0) = 1$ slijedi $a_0 = 1$, pa lako nalazimo

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}, \quad a_4 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \quad \dots$$

Dakle, tražena funkcije je

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

a definirana je za svaki x , jer je njezin radijus konvergencije $R = \infty$.

PRIMJER 13.

Koristeći se infinitezimalnim računom beskonačnih polinoma nađimo funkciju $f(x)$ takvu da je $f''(x) + f(x) = 0$, $f(0) = 0$ i $f'(0) = 1$. (Pretpostavimo da ništa ne znamo o funkcijama $\sin x$ i $\cos x$.)

Rješenje:

Označimo li $f'(x) = g(x)$ slijedi da je

$$(i) \quad f'(x) = g(x), \quad g'(x) = -f(x)$$

(ii) $f(0) = 0, \quad g(0) = 1.$

Funkcije $f(x)$ i $g(x)$ pokušat ćemo izraziti kao sume redova potencija

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots, \quad g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$$

Uvjeti (i) bit će zadovoljeni ako je

$$a_1 = b_0, \quad 2a_2 = b_1, \quad 3a_3 = b_2, \quad 4a_4 = b_3, \dots, \quad b_1 = -a_0, \quad 2b_2 = -a_1, \quad 3b_3 = -a_2, \quad 4b_4 = -a_3, \dots$$

Iz uvjeta (ii) slijedi $b_0 = 1$ i $a_0 = 0$, pa je

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{2 \cdot 3}, \quad a_4 = 0, \dots, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -\frac{1}{2}, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = -\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \dots$$

Dakle,

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \text{i} \quad g(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Objek funkcije konvergiraju za svaki x , jer im je radijus konvergencije $R = \infty$

Prvi redovi potencija s kojima smo se susreli bili su Taylorovi redovi elementarnih funkcija. Sada pak vidimo da svaki red potencija svojom sumom definira funkciju unutar svojeg radijusa konvergencije. Ona ne mora biti ni algebarska, ni logaritamska, ni eksponencijalna, ni trigonometrijska, ni bilo koja od elementarnih funkcija. Takva funkcija često može opisati fenomen, koji se neda opisati nijednom elementarnom funkcijom, pa čak ni njihovom složenom kombinacijom. (U sljedećim poglavljima sruer ćemo se s mnoštvom takvih primjera.) No, što je Taylorov red tako definirane funkcije

$$f(x) = \sum_{n=0} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

Da li je to taj isti red kojim je funkcija definirana? Da! Unutar svojeg radijusa konvergencije svaki je red potencija svoj vlastiti Taylorov red. Naime, deriviranjem funkcije $f(x)$ nalazimo

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0, & \frac{f(0)}{0!} &= a_0 \\ f'(0) &= a_1, & \frac{f'(0)}{1!} &= a_1 \\ f''(0) &= 2a_2, & \frac{f''(0)}{2!} &= a_2 \\ f'''(0) &= 2 \cdot 3a_3, & \frac{f'''(0)}{3!} &= a_3 \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

tj. koeficijentni reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jednaki su koeficijentima Taylorovog reda njegove sume. Možemo zaključiti da se funkcija $f(x)$ samo na jedan način može prikazati redom potencija, jer je on nužno njezin jedinstveni Taylorov red.

(To smo mogli dokazati i neposredno. Pretpostavimo naime, da je

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$$

Tada:

$$f(0) = a_0 \quad \text{i} \quad f(0) = b_0 \quad \text{daje} \quad a_0 = b_0;$$

$$f'(0) = a_1 \quad \text{i} \quad f'(0) = b_1 \quad \text{daje} \quad a_1 = b_1;$$

$$f''(0) = 2a_2 \quad \text{i} \quad f''(0) = 2b_2 \quad \text{daje} \quad a_2 = b_2;$$

$$f'''(0) = 2 \cdot 3a_3 \quad \text{i} \quad f'''(0) = 3b_3 \quad \text{daje} \quad a_3 = b_3 \text{ itd.}$$

Evo na kraju i dokaza činjenice da redove potencija možemo derivirati i integrirati član po član, unutar njihovog radijusa konvergencije. U dokazu ćemo se koristiti teoremom srednje vrijednosti za derivacije.

TEOREM SREDNJE VRIJEDNOSTI ZA DERIVACIJE

Ako je funkcija f definirana na intervalu koji sadrži x i y i ako ima neprekinutu derivaciju f' , onda za neki ξ između x i y vrijedi

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi).$$

Prije dokaza teorema srednje vrijednosti primjetimo da je $(f(y) - f(x)) / (y - x)$ prosječna brzina (promjene od f) na intervalu $[x, y]$. Teorem dakle tvrdi da se prosječna brzina na intervalu poklapa s trenutnom brzinom u nekoj točki intervala. Naime, kada bi sve trenutne brzine, na intervalu, bile ispod ili iznad prosječne brzine na tom intervalu, onda to ne bi mogla biti prosječna brzina. Strogi dokaz (u čijoj je pozadini ista ideja) izvodi se iz osnovnog teorema računa

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t) dt,$$

primjenom teorema srednje vrijednosti za integrale:

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t) dt = f'(\xi) \int_x^y dt = f'(\xi)(y - x), \quad \xi \in (x, y).$$

Dakle,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi), \quad \xi \in (x, y).$$

Nas će posebno zanimati slučaj u kojem je $f(x) = x^n$. Tada je

$$(1) \quad \frac{y^n - x^n}{y - x} = n\xi_n^{n-1}, \quad \xi_n \in (x, y).$$

Neka je, dakle, funkcija $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ definirana unutar radijusa konvergencije R . Želimo dokazati da je suma reda $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ koji se dobija deriviranjem početnog reda član po član, derivacija funkcije $f(x)$, te da je suma reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ koji se dobije integriranjem početnog reda člana po član, integral funkcije $f(x)$ (sve unutar istog radijusa konvergencije R).

Čitatelju prepuštamo da (uspoređujući redove) sam dokaže da član po član derivirani, te član po član integrirani red, imaju isti radijusa konvergencije R kao i početni red.

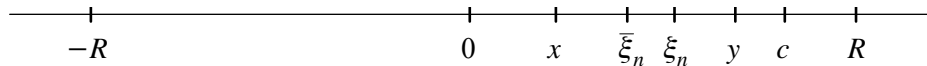
Sada možemo dokazati da je

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \text{ tj. } \lim_{y \rightarrow x} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| = 0.$$

Izračunajmo najprije kvocijent diferencija $\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ za $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{1}{y - x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{y^n - x^n}{y - x} \stackrel{(1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n n \xi_n^{n-1},$$

za vrijednosti ξ_n koje su između x i y (usp. gore formulu (1)). Budući da je $|x| < R$ znači da postoji c takav da je $|x| < c < R$, pa se pri računanju derivacije možemo ograničiti na y -e takve da je $|y| < c$ (vidi sl.2.).



Slika 2.

Dakle,

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| &= \lim_{y \rightarrow x} \left| \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \xi_n^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| = \\ \lim_{y \rightarrow x} \left| \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (\xi_n^{n-1} - x^{n-1}) \right| &= \lim_{y \rightarrow x} \left| \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \frac{\xi_n^{n-1} - x^{n-1}}{\xi_n - x} (\xi_n - x) \right|, \end{aligned}$$

što je prema (1), uz $y = \xi_n$ i $\bar{\xi}_n$ između x i ξ_n (vidi sl. 2), dalje jednako

$$\lim_{y \rightarrow x} \left| \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (n-1) \bar{\xi}_n^{n-2} (\xi_n - x) \right| \leq \lim_{y \rightarrow x} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) |a_n| |\bar{\xi}_n|^{n-2} |\xi_n - x|$$

što je, zbog $|\bar{\xi}_n| < c$ i $|\xi_n - x| < |y - x|$ (vidi sl.2.), još manje od

$$\lim_{y \rightarrow x} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)|a_n|c^{n-2}|y-x| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)|a_n|c^{n-2} \right) \lim_{y \rightarrow x} |y-x| = 0,$$

jer dva puta član po član derivirani red, s radijusom konvergencije R , ima i dalje isti radijus konvergencije,

pa $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)|a_n|c^{n-2}$ ima konačnu sumu, za $c < R$.

Dakle, red potencije derivira se član po član.

Što se tiče integriranja, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je derivacija reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, koji definira funkciju za $|x| < R$. To

znači da je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ antiderivacija, tj. neodređeni integral, funkcije $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, za $|x| < R$.

Dakle red potencija integrira se član po član.

7.5 KOMPLEKSNE FUNKCIJE I EULEROVA FORMULA

Najjednostavnije funkcije $y = f(x)$ jesu one čije su vrijednosti y računaju isključivom upotrebom osnovnih aritmetičkih operacija $+$, $-$, \cdot i $:$. To su, naravno, racionalne funkcije, među kojima se svojom jednostavnošću posebno ističu polinomi. Budući da osnovne aritmetičke operacije znamo izvoditi i s kompleksnim brojevima (a ne samo s realnim brojevima), onda je i pojam kompleksne funkcije potpuno jasan ako se ograničimo na kompleksne racionalne funkcije ili, još jednostavnije, na kompleksne polinome. Naprimjer, jasno je što su vrijednosti kompleksnog polinoma $f(z) = 2z^2 - z$, za $z = 2, i, 1 - i, \dots$

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 2 = 6, \quad f(i) = 2i^2 - i = -2 - i,$$

$$f(1 - i) = 2(1 - i)^2 - (1 - i) = 2(1 - 2i - 1) - 1 + i = -1 - 3i, \dots$$

Naravno, stvari su složenije u slučaju funkcija koje nisu definirane uz pomoć osnovnih aritmetičkih operacija. Na primjer, što je $\cos z$, $\sin z$ ili e^z za kompleksne vrijednosti z ? Geometrijska definicija kosinusa i sinusa, ili odgovarajuća definicija eksponencijalne funkcije, s kojom smo se upoznali u poglavljima V i VI, ne nude nam odgovor na ta pitanja. U tim se definicijama pretpostavlja da je argument funkcije realan broj. Međutim, svaka od tih funkcija može se razviti u red potencija, što znači da se njihove vrijednosti mogu izračunati upotrebom osnovnih aritmetičkih operacija (s tim da se operacije izvode beskonačno mnogo puta). No ako smo računanje funkcija \cos , \sin i \exp sveli na osnovne aritmetičke operacije, onda nema nikakvih prepreka da ih računamo i za kompleksne vrijednosti argumenta, budući da su te operacije definirane i za kompleksne argumente z :

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \frac{z^{10}}{10!} + \dots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \frac{z^{11}}{11!} + \dots$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \dots$$

Dapače, ovako definirane kompleksne funkcije \cos , \sin i \exp otkrivaju nam duboku vezu trigonometrijskih i eksponencijalnih funkcija. Ona je čitatelju sigurno upala u oči kao sličnost razvoja ovih funkcija u red potencija. No tek kad \cos , \sin i \exp promatramo kao kompleksne funkcije ta veza postaje sasvim eksplicitnom. Naime,

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \dots = \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) = \cos x + i \sin x, \end{aligned}$$

tj. veza je određena slavnom Eulerovom formulom:

EULEROVA FORMULA

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

PRIMJER 1.

Koristeći se Eulerovom formulom izrazimo funkciju \cos i \sin preko funkcije \exp .

Rješenje:

Uvrštavanjem $-x$ za x u Eulerovu formulu

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

dobijamo

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Zbrajanjem gornjih jednakosti i dijeljenjem s 2 nalazimo

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

dok njihovim oduzimanjem i dijeljenjem s $2i$ nalazimo

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

PRIMJER 2.

Izračunajmo $e^{\pi i}$, $e^{\frac{\pi}{2}i}$, $e^{2\pi i}$, $\cos i$ i $\sin i$.

Rješenje:

$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1, \quad e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i,$$

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1, \quad e^{\frac{3\pi}{2}i} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\cos i = \frac{1}{2}(e^{ii} + e^{-ii}) = \frac{1}{2}(e^{-1} + e), \quad \sin i = \frac{1}{2i}(e^{ii} - e^{-ii}) = \frac{1}{2i}(e^{-1} - e).$$

Naravno, da bi ovakva razmatranja bila sasvim korektna potrebno je precizno definirati zbrajanje beskonačno mnogo kompleksnih pribrojnika, po uzoru na beskonačno zbrajanje realnih pribrojnika, s kojima smo se bavili u prethodnim odjeljcima. Definicije i (gotovo) svi zaključci biti će isti kao i u slučaju realnih brojeva. No, prije nego to pokažemo, prisjetimo se (konačne) aritmetike kompleksnih brojeva.

Što su kompleksni brojevi? Radi se o sustavu brojeva koji je takvo proširenje sustava realnih brojeva u kojem -1 ima kvadratni korijen, pa stoga u njemu i svaki negativni realni broj ima kvadratni korijen. Kada su se kvadratni korijeni negativnih brojeva počeli razmatrati u matematici smatrani su pukim simbolima koji ne označavaju nešto što usitinu postoji, pa su stoga prozvani imaginarnim brojevima. Pravi način da se definiraju ovi brojevi konačno je ustanovljen zahvaljujući radovima Cardana i Bombellia u 16. stoljeću, ali je značaj tih brojeva potpuno shvaćen tek kroz Eulerove radove u 18. stoljeću. Način da se oni objasne preko realnih brojeva, kojim ćemo se i mi koristiti, otkrili su Argand, Gauss i mnogi drugi matematičari početkom 19. stoljeća.

Da bismo definirali sustav brojeva koji sadrži $\sqrt{-1} = i$, uočimo da takav sustav mora sadržavati sve brojeve oblika $a + b\sqrt{-1} = a + bi$, gdje su a i b obični realni brojevi. Želimo li zadržati elementarna pravila računanja i u proširenom sustavu, ti se brojevi moraju zbrajati, oduzimati i množiti na sljedeći način:

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Dakle, zbroj, razlika i umnožak dvaju brojeva oblika $a + bi$ opet je broj istog oblika. No, svi podaci o “broju” $a + bi$ sadržani su u paru (a, b) realnih brojeva, koji možemo predstaviti točkom koordinatne ravnine x, y . Stoga prošireni sustav kompleksnih brojeva definiramo na sljedeći način:

KOMPLEKSNI BROJEVI

Kompleksni broj je svaki par realnih brojeva (a, b) . Zato svaki kompleksni broj možemo predstaviti točkom koordinatne ravnine x, y . Kompleksni brojevi zbrajaju se, oduzimaju i množe na sljedeći način:

$$(a, b) \pm (c, d) = (a \pm c, b \pm d),$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Broj $(0, 1)$ označavamo s i . Dakle, $i^2 = (-1, 0)$. Kompleksni broj oblika $(a, 0)$ identificiramo s realnim brojem a , pa slijedi da je

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$$

Os x zovemo realnom, a os y imaginarnom osi koordinatne ravnine u kojoj prikazujemo kompleksne brojeve. Tu ravninu zovemo kompleksnom ravninom.

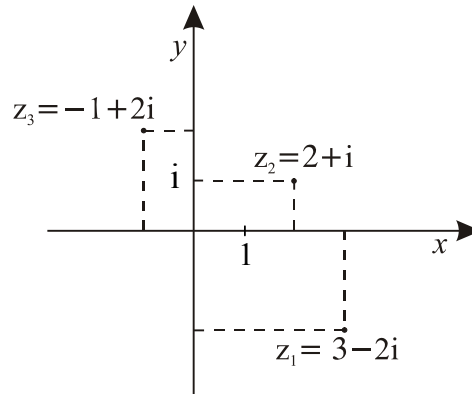
Lako je provjeriti da sustav kompleksnih brojeva zadovoljava uobičajene algebarske zakone. Na primjer, označimo li kompleksne brojeve $a + bi$, $c + di$, $e + fi$ redom sa z , w , u lako provjeravamo da je

$$z(w + u) = zw + zu, \quad zw = wz, \quad z(wu) = (zw)u \text{ itd.}$$

PRIMJER 3.

Prikažimo brojeve $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 2 + i$ i $z_3 = -1 + 2i$ u kompleksnoj ravnini.

Rješenje:



Slika 1.

PRIMJER 4.

Izračunajmo (a) $(2 - 4i) + (3 + 2i)$, (b) $(2 - 3i)(3 + 2i)$, (c) $(2 - 3i)^2$, (d) \sqrt{i}

Rješenje:

(a) $(2 - 4i) + (3 + 2i) = 5 - 2i$

(b) $(2 - 3i)(3 + 2i) = 6 + 4i - 9i - 6i^2 = 12 - 5i$

(c) $(2 - 3i)^2 = 4 - 6i + 9i^2 = -5 - 6i$

(d) Tražimo kompleksni broj $a + bi$ takav da je $(a + bi)^2 = i$ tj. takav da je $a^2 - b^2 + 2abi = i$. To znači da trebamo naći a i b takve da je $a^2 - b^2 = 0$ i $2ab = 1$. Iz prve jednadžbe slijedi $a = \pm b$, pa uvrštavanjem u drugu nalazimo $b = \pm 1/\sqrt{2}$. Dakle,

$$\sqrt{i} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i).$$

Podijeliti broj $a + bi$ s brojem $c + di$ znači naći takav broj $x + yi$ koji pomnožen sa $c + di$ daje $a + bi$. To zapravo znači da je odredbena jednadžba kvocijenta

$$\frac{a + bi}{c + di} = x + yi \text{ ekvivalentna jednadžbi } (x + yi)(c + di) = a + bi.$$

Množenjem kompleksnih brojeva na lijevoj strani nalazimo

$$xc - yd = a, \quad xd + yc = b.$$

Rješavanjem ovog para linearnih jednadžbi po x i y nalazimo

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Dakle,

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Kvocijent dvaju kompleksnih brojeva opet je kompleksan broj. Do istog smo rezultata mogli doći množenjem brojnika i nazivnika kvocijenta $(a + bi) / (c + di)$ s kompleksnim brojem $c - di$:

$$\frac{a + bi}{c + di} \frac{c - di}{c - di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

PRIMJER 5.

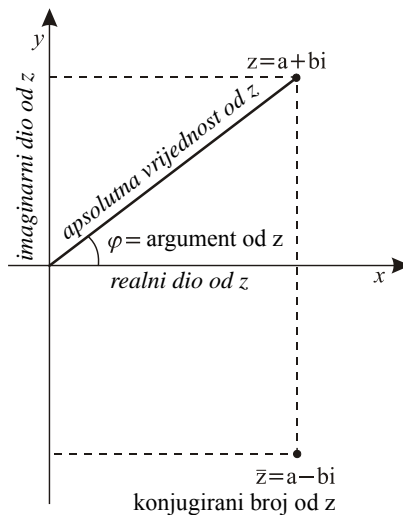
Izračunajmo $\frac{1 - i}{2 + 3i}$.

Rješenje:

$$\frac{1 - i}{2 + 3i} \frac{2 - 3i}{2 - 3i} = \frac{(2 - 3) + (-3 - 2)i}{13} = -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$$

Uz svaki kompleksni broj $z = a + bi$ vezane su neke karakteristične vrijednosti (Usp.sl.2.):

- (i) njegov realni dio a ,
- (ii) njegov imaginarni dio b (uočite da je imaginarni dio kompleksnoga broja realan broj),
- (iii) njemu konjugirani broj $\bar{z} = a - bi$,
- (iv) njegova apsolutna vrijednost $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- (v) njegov argument φ definiran sa $a = |z| \cos \varphi$ i $b = |z| \sin \varphi$ (odakle slijedi $b/a = \operatorname{tg} \varphi$).



Slika 2.

Uočimo da je

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

PRIMJER 6.

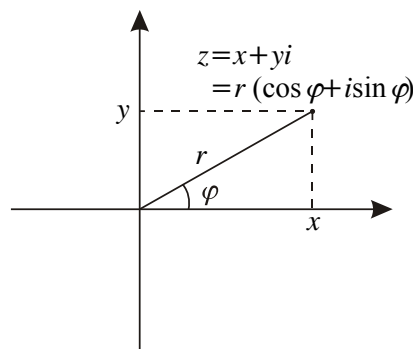
Nađimo realni dio, imaginarni dio, apsolutnu vrijednost i argument od $(8 + 2i) / (1 - i)$.

Rješenje:

$$\frac{8 + 2i}{1 - i} = \frac{8 + 2i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{8 + 10i - 2}{2} = 3 + 5i$$

Dakle, realni dio je 3, a imaginarni 5. Apsolutna vrijednost je $\sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$. Iz $\text{tg } \varphi = 5/3$ slijedi da je argument $\varphi = \text{arctg } 5/3$

Apsolutna vrijednost r (uvijek veća od 0) i argument φ , kompleksnog broja $z = x + iy$, su polarne koordinate one točke kojom je taj broj predstavljen u kompleksnoj ravnini. Drugim riječima $x = r \cos \varphi$ i $y = r \sin \varphi$, pa se svaki kompleksni broj $z = x + iy$ može predstaviti i u tzv. trigonometrijskom obliku (vidi sl.3.) $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.



Slika 3.

Koristeći se trigonometrijskim oblikom kompleksnih brojeva $r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ i $r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, lako ćemo naći trigonometrijski oblik njihovoga umnoška:

$$\begin{aligned} r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) &= \\ &= r_1r_2[(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] = \\ &= r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Vidimo da je apsolutna vrijednost umnoška dvaju kompleksnih brojeva jednaka umnošku njihovih apsolutnih vrijednosti, dok je argument umnoška jednak zbroju argumenta njegovih faktora. Odavde odmah slijedi da je apsolutna vrijednost kvocijenta jednaka kvocijentu apsolutnih vrijednosti, dok je njegov argument jednak razlici argumenata djeljenika i djelitelja.

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

PRIMJER 7.

Izračunajmo $(1 - i)(i - 1)$ te $\frac{1 - i}{i - 1}$ koristeći se trigonometrijskim oblikom kompleksnoga broja.

Rješenje:

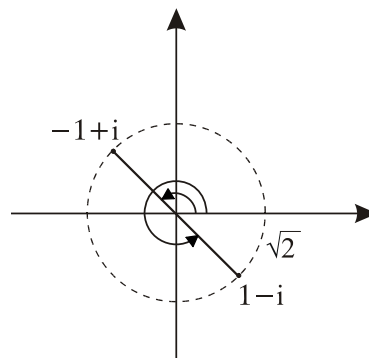
Lako nalazimo (v.sl.4.) da je:

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right), \quad -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$$

Dakle,

$$(1 - i)(-1 + i) = 2\left(\cos \frac{10\pi}{4} + i \sin \frac{10\pi}{4}\right) = 2\left(\cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4}\right) = 2i$$

(Ako je φ argument od z onda je $i \varphi + 2k\pi$ argument od z , za svaki cjelobrojni k .)



Slika 4.

$$\frac{1 - i}{-1 + i} = \cos \frac{4\pi}{4} + i \sin \frac{4\pi}{4} = -1$$

Vratimo se sada našem osnovnom problemu. Definiirajući osnovne računске operacije s kompleksnim brojevima definirali smo i racionalne funkcije kompleksne varijable.

Na primjer,

$$f(z) = \frac{3z^2 - 2z + 1}{2z^3 + z - 1}$$

dobro je definirana kompleksna funkcija koja svakom kompleksnom broju z pridružuje vrijednost $f(z)$, koja se računa zbrajanjem, množenjem, oduzimanjem i dijeljenjem odgovarajućih kompleksnih brojeva. Općenitije funkcije kao \exp , \cos , \sin itd. mogu se u realnom području razviti u red potencija, što znači da se njihovo računanje može svesti na osnovne računске operacije. Te operacije možemo izvoditi i u kompleksnom području, pa slijedi da funkcije koje možemo razviti u red potencija možemo definirati i za kompleksne argumente.

Na primjer

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \dots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \dots \text{ itd.}$$

Naravno, definicija je smisljena samo ako odgovarajući red potencija konvergira. Budući da je apsolutna vrijednost kompleksnog broja pozitivan realan broj, apsolutna konvergencija takvoga reda jest apsolutna konvergencija kojom smo se bavili u prethodnom odjeljku. Stoga možemo zaključiti da redovi potencija od e^z , $\cos z$ i $\sin z$ apsolutno konvergiraju, za svaki kompleksni broj z . Odavde slijedi (što se lako dokazuje) da i obično konvergiraju za svaki kompleksni broj z . Dakle i za $z = ix$, što dokazuje Eulerovu formulu s početka ovog odjeljka:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

PRIMJER 8.

Dokažimo da je $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$.

Rješenje:

$$e^{ix}e^{iy} = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) = \cos(x+y) + i\sin(x+y) = e^{i(x+y)}$$

Jednakost $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ sadrži istu informaciju koju sadrži i odgovarajuća trigonometrijska adicijska formula. Upotreba imaginarnih eksponenta izuzetno je korisna i stoga jer je rad s eksponentima puno jednostavniji od rada s trigonometrijskim identitetima.

PRIMJER 9.

(a) Izračunajmo $\overline{e^{i\varphi}}$ i $|e^{i\varphi}|$.

(b) Prijelazom na imaginarne eksponente izračunajmo:

$$1 + \cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi.$$

Rješenje:

(a) $\overline{e^{i\varphi}} = \overline{\cos \varphi + i \sin \varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = e^{-i\varphi}$

$$|e^{i\varphi}| = |\cos \varphi + i \sin \varphi| = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

(b) Realni dio od $e^{ik\varphi}$ je $\cos k\varphi$, pa je tražena vrijednost realni dio od $1 + e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \dots + e^{in\varphi}$.

Sjetimo li se da je

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

(dokaz u 4.1. vrijedi i za kompleksne brojeve), lako ćemo izračunati

$$\begin{aligned} 1 + e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \dots + e^{in\varphi} &= 1 + e^{i\varphi} + (e^{i\varphi})^2 + \dots + (e^{i\varphi})^n = \frac{1 - (e^{i\varphi})^{n+1}}{1 - e^{i\varphi}} = \\ &= \frac{1 - e^{i(n+1)\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} \frac{1 - e^{-i\varphi}}{1 - e^{-i\varphi}} = \frac{1 - e^{-i\varphi} - e^{i(n+1)\varphi} + e^{in\varphi}}{2 - (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})} = \frac{1 - e^{-i\varphi} - e^{i(n+1)\varphi} + e^{in\varphi}}{2(1 - \cos \varphi)} \end{aligned}$$

Realni dio dobivenog kompleksnog broja je

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi}{1 - \cos \varphi} \right)$$

pa je to tražena vrijednost.

Upotrebom imaginarnih eksponenata, kompleksni broj z s apsolutnom vrijednošću r i argumentom φ , možemo prikazati u sljedećem obliku

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi},$$

koji zovemo njegovim polarnim oblikom.

POLARNI OBLIK KOMPLEKSNOGA BROJA

Ako kompleksni broj z ima apsolutnu vrijednost r i argument φ onda je

$$z = re^{i\varphi}$$

Taj je oblik izuzetno pogodan za algebarske manipulacije.

Na primjer,

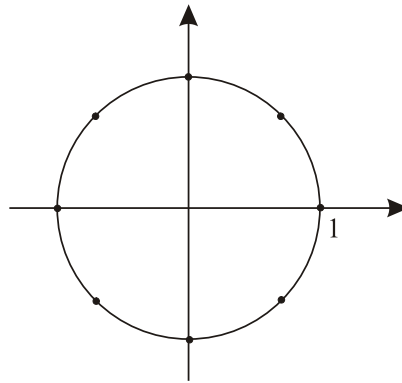
$$r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Iz zadnje formule slijedi da je $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}}$ takav kompleksni broj $re^{i\varphi}$ za koji je $r^n = \rho$ i $n\varphi = \theta + 2k\pi$, za $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Slijedi da je $r = \sqrt[n]{\rho}$ i $\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, pa je $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\theta/n + 2k\pi/n)}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Za $k = 0, 1, \dots, n-1$ dobivamo različite vrijednosti dok se za ostale vrijednosti od k ponavljaju već dobivene vrijednosti. Dakle, $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}}$ ima n različitih vrijednosti koje opisuje De Moivreova formula.

DEMOIVREOVA FORMULA

$$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Na primjer $\sqrt[8]{1}$ ima 8 različitih vrijednosti $e^{2k\pi/8}$, $k = 0, 1, \dots, 7$, koje dijele jediničnu kružnicu kompleksne ravnine na 8 jednakih lukova. (vidi sl.5.)



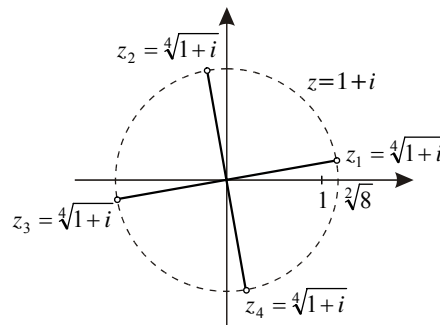
Slika 5.

PRIMJER 10.

Izračunajmo $\sqrt[4]{1+i}$

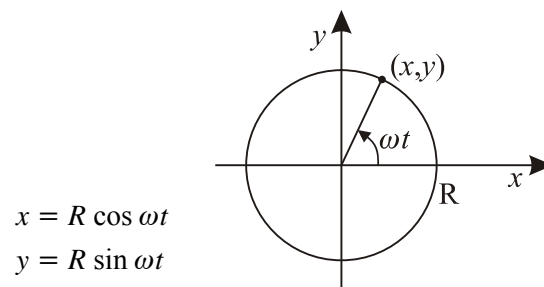
Rješenje:

$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, pa prema DeMoivreovoj formuli slijedi $\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2}e^{i(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2})}$, $k=0, 1, 2, 3$ (vidi sl.6.).



Slika 6.

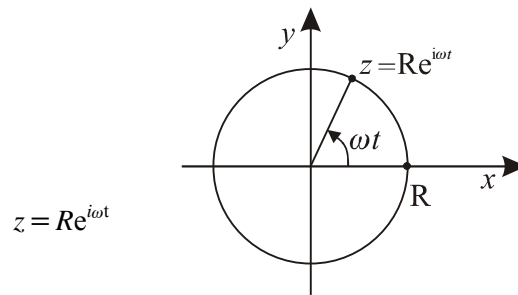
U 5.5. trigonometrijskim smo se funkcijama koristili za opisivanje jednolikog kružnog gibanja točke (x, y) , po kružnici radijusa R uz kutnu brzinu ω . Ono je bilo određeno parametarskim jednačbama gibanja (vidi sl.7.):



$$\begin{aligned} x &= R \cos \omega t \\ y &= R \sin \omega t \end{aligned}$$

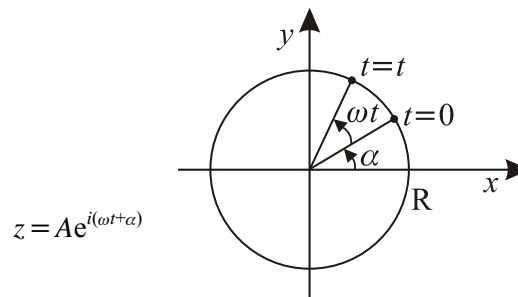
Slika 7.

Isto gibanje možemo shvatiti i kao gibanje kompleksne točke $z = x + iy$, koje je tada određeno sa $z = x + iy = R\cos \omega t + iR\sin \omega t = Re^{i\omega t}$ (vidi sl. 8.). Dakle, parametarska funkcija



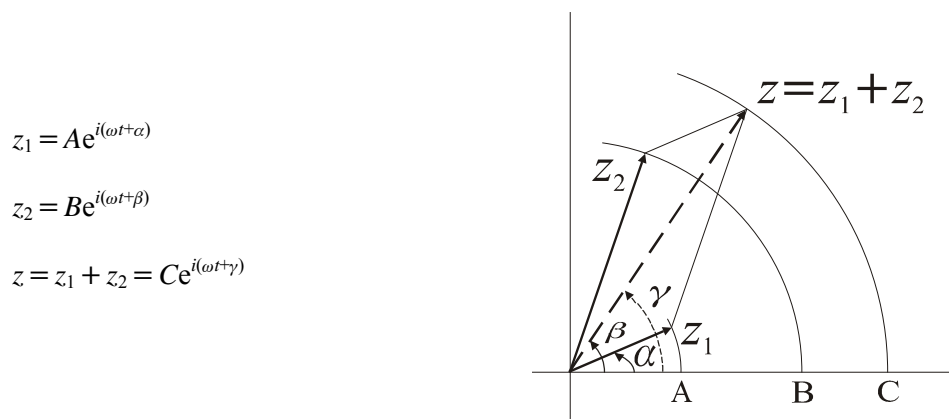
Slika 8.

opisuje gibanje točke z po kružnici radijusa R , s kutnom brzinom ω (periodom $T = 2\pi/\omega$, frekvencijom $\nu = \omega/2\pi$) i s početnim položajem $z = R$, za $t = 0$. Jednoliko kružno gibanje kutne brzine ω , po kružnici radijusa A , s početnim položajem $z = Re^{i\omega\alpha}$ zadano je funkcijom (vidi sl.9.)



Slika 9.

Ako se točka $z_1 = Ae^{i(\omega t + \alpha)}$ giba po kružnici radijusa A s faznim pomakom α , a točka $z_2 = Be^{i(\omega t + \beta)}$ po kružnici radijusa B s faznim pomakom β , i s istom kutnom brzinom ω , onda će se njihov zbroj $z = z_1 + z_2 = Ae^{i(\omega t + \alpha)} + Be^{i(\omega t + \beta)} = Ce^{i(\omega t + \gamma)}$ gibati po kružnici radijusa C s faznim pomakom γ gdje su C i γ određeni dijagramom na slici 10:



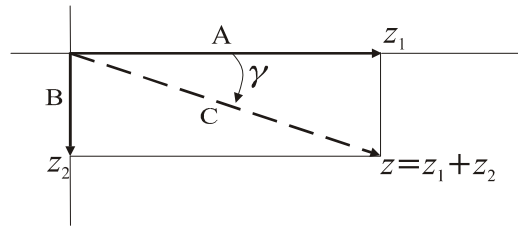
Slika 10.

Posebno je zanimljiv onaj slučaj u kojem je $z_1 = Ae^{i\omega t}$ i $z_2 = Be^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$ (v.sl.11.).

$$\gamma = -\theta, \quad \text{tg } \theta = \frac{B}{A}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$Ae^{i\omega t} + Be^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} = Ce^{i(\omega t - \theta)}$$



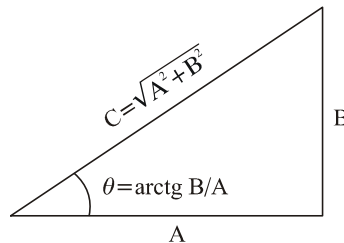
Slika 11.

Izjednačimo li realni dio lijeve i desne strane posljednje jednakosti nalazimo sljedeće pravilo za superponiranje oscilacija jednake frekvencije.

SUPERPONIRANJE OSCILACIJA ISTE FREKVENCIJE

Superpozicija (zbroj) dvaju oscilacija iste frekvencije opet je oscilacija te iste frekvencije, s novim faznim pomakom i novom amplitudom (vidi sl.12.)

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t = C \cos(\omega t - \theta)$$



Slika 12.

PRIMJER 11.

Izračunajmo $\sqrt{2} \cos 5t + \sin 5t$.

Rješenje:

$$\sqrt{2} \cos 5t + \sin 5t = \sqrt{2+1} \cos(5t - \text{arctg } 1/\sqrt{2}) = \sqrt{3} \cos(5t - \pi/4).$$

Deriviranje i integriranje kompleksnih funkcija može se definirati analogono deriviranju i integriranju realnih funkcija i to je predmet računa kompleksnih funkcija kojim se ovdje nećemo baviti. Razmotrit ćemo samo posebni ali izuzetno važni slučaj kompleksne funkcije $e^{\lambda x}$, gdje je λ proizvoljna kompleksna konstanta. Riječ je o kompleksnoj funkciji koja svakom realnom broju x pridružuje kompleksnu vrijednost $e^{\lambda x}$. Standardni postupak deriviranja može se primjeniti na tu kompleksnu funkciju kao i na svaku realnu funkciju:

$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda(x+\Delta x)} - e^{\lambda x}}{\Delta x}$$

Izračunamo li traženi limes koristeći se odgovarajućim redom potencija (koji definiira $e^{\lambda x}$) naći ćemo da je

$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}.$$

Oдавde neposredno izračunavamo i antiderivaciju od $e^{\lambda x}$.

DERIVACIJA I ANTIDERIVACIJA OD $e^{\lambda x}$

Za svaki kompleksni broj λ

$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \quad \int e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$$

7.6 HIPERBOLIČKE FUNKCIJE

Vidjeli smo u prethodnom odjeljku da se realna eksponencijalna funkcija

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

sastoji iz “parnoga” i “neparnoga” dijela, koji podsjećaju na funkcije kosinus i sinus. “Parni” dio zovemo hiperboličkim kosinusom i označavamo ga s ch :

$$ch x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

dok “neparni” dio zovemo hiperboličkim sinusom i označavamo ga sa sh :

$$sh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Hiperboličke funkcije $ch x$ i $sh x$ definirane su za svaki realni x , budući da redovi potencija, koji ih definiraju, konvergiraju za svaki x (usp. 3). Iz definicije hiperboličkih funkcija neposredno slijedi

$$(1) \quad e^x = ch x + sh x,$$

dok je s druge strane

$$(2) \quad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \dots \right) - \left(x + \frac{x^3}{3!} + \dots \right), \text{ tj. } e^{-x} = ch x - sh x.$$

Zbrajanjem i oduzimanjem jednakosti (1) i (2), nalazimo

$$ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

što nam pokazuje da se hiperbolički kosinus i sinus mogu definirati pomoću eksponencijalne funkcije e^x .

HIPERBOLIČKI KOSINUS I SINUS

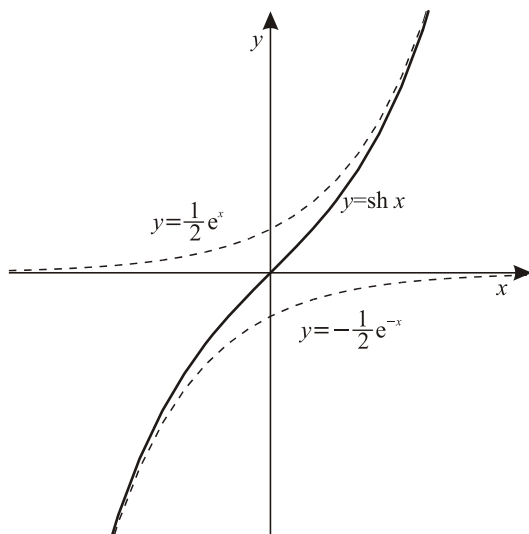
Hiperbolički kosinus je funkcija

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

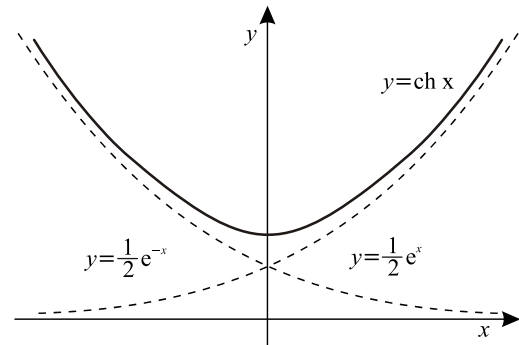
Hiperbolički sinus je funkcija

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Iz definicija hiperboličkih funkcija lako nalazimo njihove grafove. (vidi sl.1. i 2.)



Slika 1.,



Slika 2.

Uočimo da je $\operatorname{ch} x$ parna funkcija, $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$, dok je $\operatorname{sh} x$ neparna, $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh}(x)$.

Sličnost hiperboličkih i trigonometrijskih funkcija očituje se u njihovim sličnim svojstvima. Paralelno navodimo neka od tih svojstava:

$$(3) \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad (\text{usp. } \cos^2 x + \sin^2 x = 1)$$

$$(4) \quad \operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \quad (\text{usp. } \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

$$(5) \quad \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \quad (\text{usp. } \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y)$$

$$(6) \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1) \quad (\text{usp. } \cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1))$$

$$(7) \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1) \quad (\text{usp. } \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)).$$

PRIMJER 1.

Dokažimo formule (3), (4) i (6).

Rješenje:

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}),$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}),$$

pa oduzimanjem dolazimo do formule (3).

$$\operatorname{ch}(x+y) = \frac{1}{2}(e^{x+y} + e^{-x-y}) = \frac{1}{2}(e^x e^y + e^{-x} e^{-y}),$$

uvrštavanjem $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$ i $e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$ nalazimo

$$\operatorname{ch}(x+y) = \frac{1}{2}[(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y) + (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y)].$$

Sređivanjem desne strane dolazimo do formule (4).

Iz formule (4) slijedi $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$, pa zbrajanjem s formulom (3) nalazimo

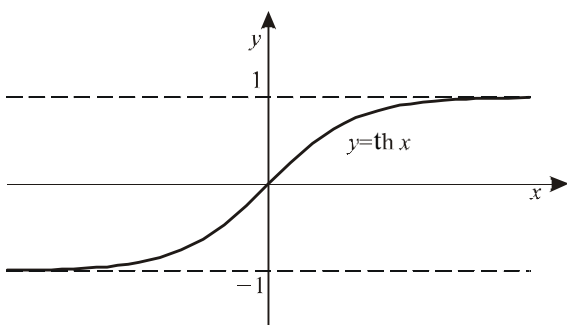
$\operatorname{ch} 2x + 1 = 2\operatorname{ch}^2 x$, čime je dokazana formula (6).

Analogno trigonometrijskom tangensu i kotangensu definiramo i hiperbolički tangens i kotangens:

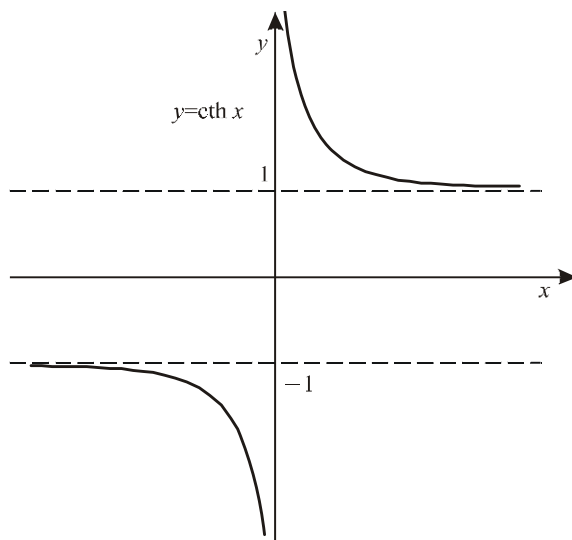
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

Iz definicija hiperboličkog tangensa i kotangensa lako nalazimo njihove grafove (vidi sl.3. i 4.).



Slika 3.,



Slika 4.

Derivacije i antiderivacije hiperboličkih funkcija slične su derivacijama i antiderivacijama trigonometrijskih funkcija:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sh} x = \frac{d}{dx} \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{ch} x = \frac{d}{dx} \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{th} x = \frac{d}{dx} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cth} x = \frac{d}{dx} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

DERIVACIJE I ANTIDERIVACIJE HIPERBOLIČKIH FUNKCIJA

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{th} x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cth} x = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

PRIMJER 2.

Izračunajmo (a) $\frac{d}{dx} \operatorname{ch}(x^2 - 2x)$, (b) $\frac{d}{dx} e^{\operatorname{th} 2x}$, (c) $\int 2 \operatorname{th} 4x dx$, (d) $\int \frac{\operatorname{ch}^2 x - 2 \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} dx$

Rješenje:

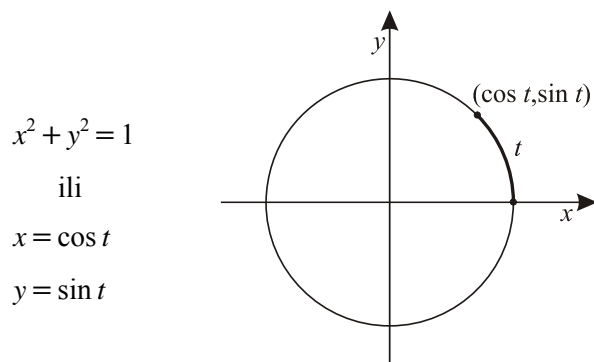
$$(a) \frac{d}{dx} \operatorname{ch}(x^2 - 2x) = [\operatorname{sh}(x^2 - 2x)](2x - 2)$$

$$(b) \frac{d}{dx} e^{\operatorname{th} 2x} = e^{\operatorname{th} 2x} \frac{2}{\operatorname{ch}^2 2x}$$

$$(c) \int \frac{2 dx}{\operatorname{ch}^2 4x} = 2 \cdot \frac{1}{4} \operatorname{th} 4x = \frac{1}{2} \operatorname{th} 4x$$

$$(d) \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - 2 \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} - 1 \right) dx = -\operatorname{cth} x - x + C.$$

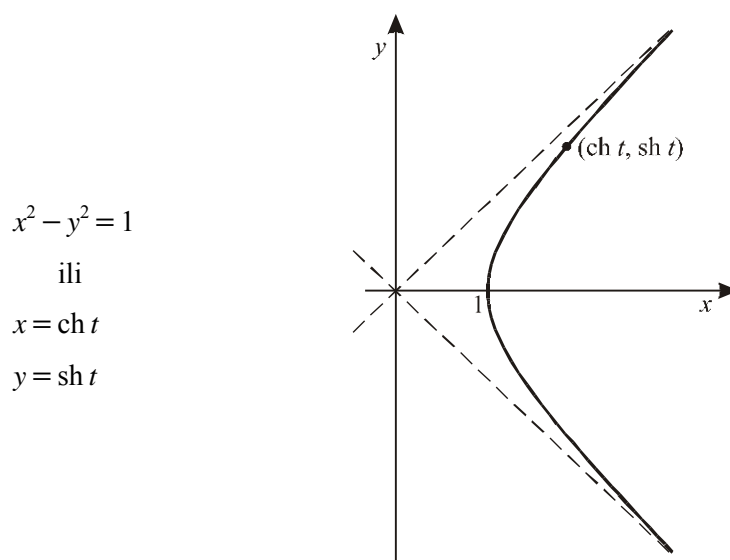
Trigonometrijski kosinus i sinus vezani su uz kružnicu, budući da su $\cos t$ i $\sin t$ koordinate točke koja omeđuje luk duljine t na jediničnoj kružnici (v.sl.5.).



Slika 5.

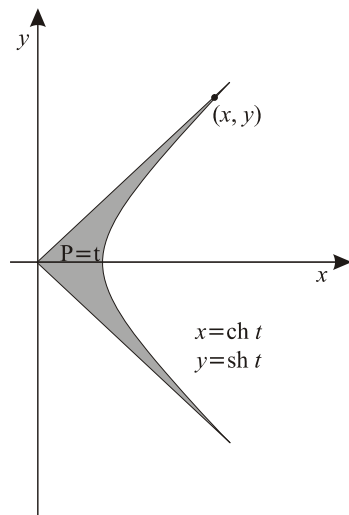
Drugim riječima $x = \cos t$, $y = \sin t$ parametarske su jednadžbe jedinične kružnice $x^2 + y^2 = 1$.

Na sličan način su i hiperbolički kosinus i sinus vezani uz jediničnu hiperbolu $x^2 - y^2 = 1$ (otuda i njihovo ime). Naime, iz identiteta $\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$ slijedi da su $x = \text{ch } t$, $y = \text{sh } t$ parametarske jednadžbe jedinične hiperbole $x^2 - y^2 = 1$. (v.sl.6.)

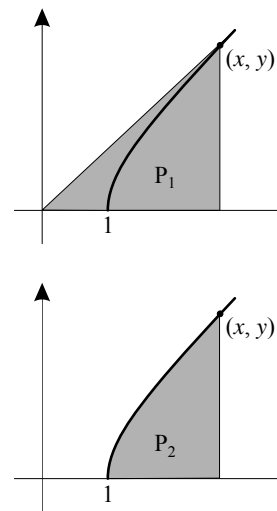


Slika 6.

Geometrijsko značenje parametra t , u slučaju parametrizacije kružnice, poznato nam je. To je mjera luka kružnice. Značenje parametra t u slučaju parametrizacije hiperbole za sada ne znamo, no dokazat ćemo da je t mjera osjenčene površine na sl.7.



Slika 7.



Slika 8.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P &= P_1 - P_2 = \frac{1}{2}xy - \int_1^x y dx = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2t - \int_0^t \operatorname{sh}^2 t dt = \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2t - \frac{1}{2} \int_0^t (\operatorname{ch} 2t - 1) dt = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2t - \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2t + \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}t, \end{aligned}$$

tj. $P = t$, što smo i željeli dokazati.

Dakle, hiperbolički kosinus i sinus pridružuju površini omeđenoj hiperbolom koordinate točke koja definira tu površinu (kao što trigonometrijski kosinus i sinus pridružuju luku kružnice koordinate točke koja definira luk).

Ipak, veza hiperbolnih i trigonometrijskih funkcija najbolje se vidi u području kompleksnih brojeva. Iz razvoja u redove potencija lako se nalazi

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = 1 + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \dots = \operatorname{ch}(ix), \\ i \sin x &= ix - \frac{ix^3}{3!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{ix^7}{7!} + \dots = ix + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \dots = \operatorname{sh}(ix), \\ i \operatorname{tg} x &= \frac{i \sin x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sh}(ix)}{\operatorname{ch}(ix)} = \operatorname{th}(ix), \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{i}{\operatorname{th}(ix)} = i \operatorname{cth}(ix) \end{aligned}$$

VEZA TRIGONOMETRIJSKIH I HIPERBOLNIH FUNKCIJA

$$\begin{aligned} \sin(ix) &= i \operatorname{sh}(x), & \operatorname{sh}(ix) &= i \sin(x), & \cos(ix) &= \operatorname{ch} x, & \operatorname{ch}(ix) &= \cos x \\ \operatorname{tg}(ix) &= i \operatorname{th}(x), & \operatorname{th}(ix) &= i \operatorname{tg} x, & \operatorname{ctg}(ix) &= -i \operatorname{cth}(x), & \operatorname{cth}(ix) &= -i \operatorname{ctg} x \end{aligned}$$

PRIMJER 3.

Razvijmo u red potencija funkcije $\operatorname{th} x$ i $\operatorname{cth} x$.

Rješenje:

$$\frac{x}{2} \operatorname{cth} \frac{x}{2} = \frac{x e^{x/2} + e^{x/2}}{2 e^{x/2} - e^{x/2}} = \frac{x e^x + 1}{2 e^x - 1} = \frac{x}{2} + \frac{x}{e^x - 1}$$

Prema 7.4 primjer 5. slijedi:

$$\frac{x}{2} \operatorname{cht} \frac{x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n},$$

gdje su B_{2n} Bernoullijevi brojevi. Uvrštavanjem $2x$ umjesto x i dijeljenjem s x konačno nalazimo

$$\operatorname{cht} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} x^{2n-1}.$$

Uz pomoć identiteta $\operatorname{th} x = 2 \operatorname{cth}(2x) - \operatorname{cth} x$ nalazimo

$$\operatorname{th} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1)}{(2n)!} B_{2n} x^{2n-1}.$$

Iz tih razvoja i već dokazanih veza $\operatorname{tg} x = -\operatorname{th}(ix)$, $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{cth}(ix)$, lako nalazimo razvoje funkcija $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$.

RAZVOJI TANGENSA I KOTANGENSA

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1)}{(2n)!} B_{2n} x^{2n-1} \quad \operatorname{th} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1)}{(2n)!} B_{2n} x^{2n-1}$$

$$\operatorname{ctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} x^{2n-1} \quad \operatorname{cth} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} x^{2n-1}$$

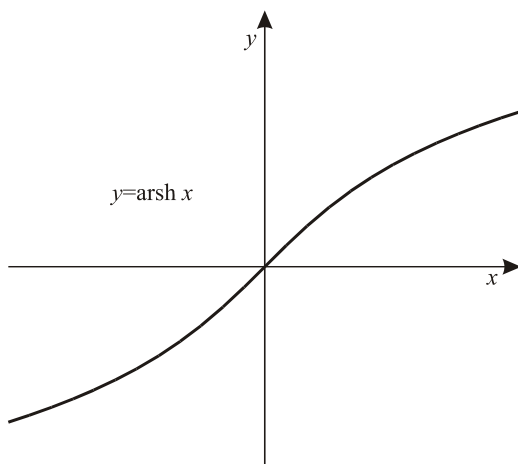
gdje su B_{2n} Bernoullijevi brojevi određeni s $B_0 = 1$ i $\binom{n+1}{0} B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \binom{n+1}{2} B_2 + \dots + \binom{n+1}{n} B_n = 0$.

(Za sve neparne n , osim B_1 , $B_n = 0$.)

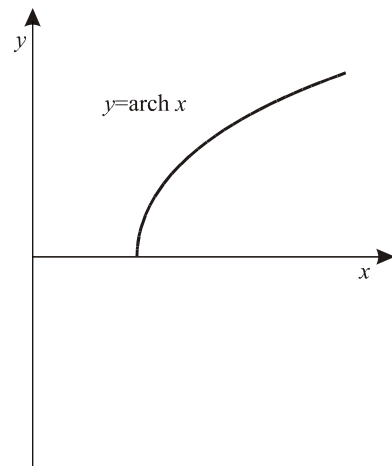
Funkcije inverzne hiperboličkim funkcijama zovemo area funkcijama (area – lat. površina), jer one koordinatama točke na jediničnoj hiperboli pridružuju odgovarajuće površine. (Sjetimo se da smo funkcije inverzne trigonometrijskim funkcijama zvali arkus funkcijama, arcus – lat. luk.)

Upotrebom testa invertibilnosti (usp. 5.4.) lako ćemo ustanoviti da je funkcija $\operatorname{sh} x$ invertibilna na čitavom području realnih brojeva $(-\infty, \infty)$, funkcija $\operatorname{ch} x$ invertibilna je na intervalu $[0, \infty)$, $\operatorname{th} x$ na intervalu $(-1, 1)$ i $\operatorname{cth} x$ na uniji intervala $(-\infty, -1)$ i $(1, \infty)$.

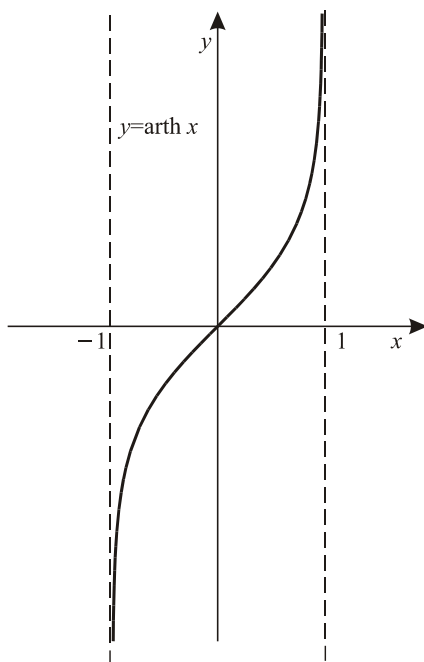
Zrcaljenjem grafova hiperboličkih funkcija oko pravca $y = x$ lako nalazimo grafove area funkcija (v.sl. 9, 10, 11 i 12.).



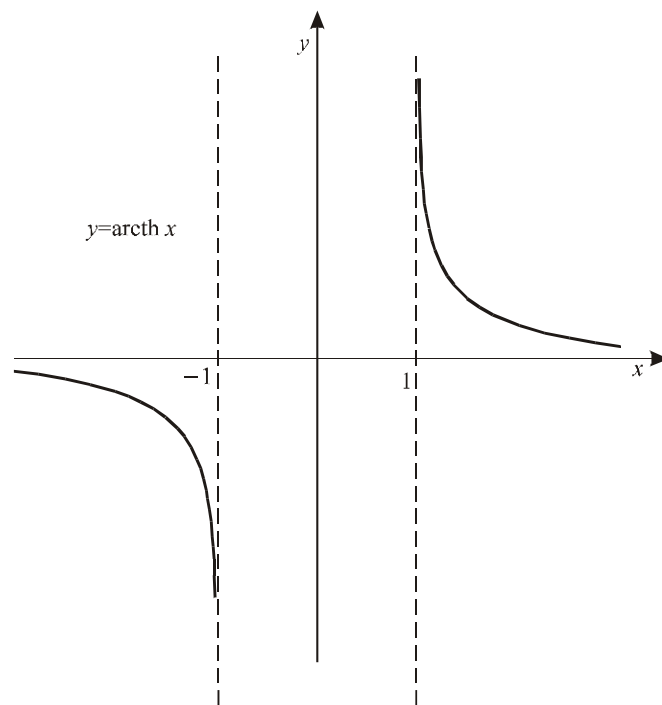
Slika 9.



Slika 10.



Slika 11.



Slika 12.

Hiperboličke funkcije možemo eksplicitno izraziti pomoću eksponencijalnih, pa s pravom očekujemo da se njihovi inverzi, area funkcije, mogu eksplicitno izraziti pomoću logaritamskih funkcija. Na primjer, $y = \operatorname{arsh} x$ znači $x = \operatorname{sh} y = (e^y - e^{-y})/2$, odakle množenjem s $2e^y$ slijedi $2e^y x = e^y e^y - e^{-y} e^y$, tj.

$$(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0.$$

Rješavanjem te kvadratne jednadžbe za e^y ($e^y > 0$ pa moramo odabrati pozitivno rješenje) dobit ćemo

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

odakle slijedi

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \quad \operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

Slično bismo našli da je

$$\operatorname{arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad \text{za } x > 1.$$

PRIMJER 4.

Izračunajmo $\operatorname{arsh} 5$.

Rješenje:

$$\operatorname{arsh} 5 = \ln\left(5 + \sqrt{5^2 + 1}\right) \approx \ln(10.1) \approx 2.31.$$

Derivacije area funkcija nalazimo lako. Iz $y = \operatorname{arsh} x$ i $x = \operatorname{sh} y$ slijedi

$$\frac{d \operatorname{arsh} x}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Slično bismo našli

$$\frac{d \operatorname{arch} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x > 1).$$

Odavde neposredno slijede odgovarajuća pravila integriranja:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \operatorname{arsh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arch} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + C$$

PRIMJER 5.

Izračunajmo $\frac{d}{dx} \operatorname{arch} \sqrt{x^2 + 1}$, $x \neq 0$.

Rješenje:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arch} \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-1} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} & \text{za } x > 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} & \text{za } x < 0. \end{cases}$$

Preostale area funkcije istražuju se na sličan način; rezultate navodimo u sljedećem okviru.

AREA FUNKCIJE

$$\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\frac{d \operatorname{arsh} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\operatorname{arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\frac{d \operatorname{arch} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1,$$

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\frac{d \operatorname{arth} x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1,$$

$$\operatorname{arcsh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\frac{d \operatorname{arcsh} x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| > 1,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C, \quad |x| > 1,$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C, & |x| < 1, \\ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C, & |x| > 1. \end{cases}$$

7.7 BESKONAČNO MNOŽENJE

Svaki polinom n -tog stupnja $y = a + bx + \dots + cx^{n-1} + dx^n$ ima n kompleksnih korijena x_1, x_2, \dots, x_n (koji mogu biti višestruki) i može se prikazati kao produkt linearnih faktora sljedećeg oblika:

$$y = d(x-x_1)(x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n).$$

Polinom nije jednoznačno određen svojim korijenima x_1, x_2, \dots, x_n . Za to je potreban još jedan podatak. U gornjoj faktorizaciji to je njegov vodeći koeficijent d . To može biti i njegova vrijednost u nuli, tj. njegov slobodni koeficijent a :

$$y = a \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{x}{x_n}\right).$$

Lako je provjeriti da polinom s desne strane ima koeficijente x_1, x_2, \dots, x_n , te da mu je vrijednost u nuli a , što znači da je i ova faktorizacija valjana.

Beskonačni polinomi $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ imaju beskonačno mnogo kompleksnih korijena x_1, x_2, x_3, \dots , pa možemo očekivati da njihova faktorizacija (ako postoji) ima beskonačno mnogo faktora:

$$y = a_0 \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \left(1 - \frac{x}{x_3}\right) \dots$$

(Uočimo da faktorizacija oblika $y = d(x - x_1)(x - x_2) \dots$ nije moguća, jer beskonačni polinomi nemaju vodeći koeficijent d .)

PRIMJER 1.

Kako bi, ako postoji, izgledala faktorizacija funkcija (beskonačnih polinoma) $\sin x$ i $\cos x$?

Rješenje:

Funkcija $\frac{\sin x}{x}$ ima korijene $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$. Dakle,

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) \dots,$$

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{(3\pi)^2}\right) \dots$$

Funkcija $\cos x$ ima korijene $\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \dots$. Dakle,

$$\begin{aligned} \cos x &= \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{2x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{2x}{3\pi}\right) \left(1 + \frac{2x}{3\pi}\right) \left(1 - \frac{2x}{5\pi}\right) \left(1 + \frac{2x}{5\pi}\right) \dots \\ &= \left(1 - \frac{(2x)^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{(2x)^2}{(3\pi)^2}\right) \left(1 - \frac{(2x)^2}{(5\pi)^2}\right) \dots \end{aligned}$$

Nakon što precizno definiramo beskonačno množenje iz prethodnog primjera, dokazat ćemo da su dobivene faktorizacije točne.

FAKTORIZACIJA SINUSA I KOSINUSA

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{(3\pi)^2}\right) \dots = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(n\pi)^2}\right)$$

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{(3\pi)^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{(5\pi)^2}\right) \dots = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(n\pi)^2}\right)$$

Pozabavimo se dakle postupkom množenja beskonačnog broja faktora, koje ćemo kraće zvati beskonačnim množenjem. Da bi takvo beskonačno množenje imalo beskonačni produkt nužno je (što ćemo uskoro dokazati) da njegovi faktori teže prema 1, pa ćemo ih zato prikazivati u obliku $(1 + a_n)$.

PRODUKT BESKONAČNOG MNOŽENJA

Beskonačno množenje je postupak u kojem treba pomnožiti beskonačno mnogo faktora:

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \cdot \dots = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + a_i).$$

Broj $P_n = \prod_{i=1}^n (1 + a_i) = (1 + a_1) \cdot \dots \cdot (1 + a_n)$ zovemo n -tim djelomičnim produktom beskonačnog množenja $\prod_{i=1}^{\infty} (1 + a_i)$.

Ako niz djelomičnih produkata P_1, P_2, P_3, \dots konvergira prema P , za $n \rightarrow \infty$, onda kažemo da beskonačno množenje $\prod_{i=1}^{\infty} (1 + a_i)$ konvergira, i da mu je produkt P . To zapisujemo ovako:

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + a_i) = P.$$

Ako $\prod_{i=1}^{\infty} (1 + a_i)$ ne konvergira, tj. ako divergira, onda kažemo da beskonačno množenje nema produkta.

Ako $\prod_{i=1}^{\infty} (1 + a_i)$ konvergira (tj. ima produkt) onda postoji $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ i naravno $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{n-1}$, odakle slijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} P_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n-1}} = 1, \text{ tj. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

NUŽNI UVJET KONVERGENCIJE

Uvjet $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ nužan je uvjet konvergencije beskonačnog množenja $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$. Dakle, ako produkt postoji onda je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ onda produkt ne postoji.

Uvjet $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ nije dovoljan uvjet konvergencije. Uz taj uvjet $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ može, ali i ne mora imati produkt. Da bi se to odlučilo potrebna je daljnja analiza.

PRIMJER 2.

Dokažimo da je $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1-x}$, za svaki $|x| < 1$.

Rješenje:

Izračunajmo djelomične produkte P_n .

$P_{n-1} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdot \dots \cdot (1+x^{2^{n-1}}) = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^{2^n-1}$ (jer je $1+2+4+\dots+2^{n-1} = 2^n - 1$). Dakle,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 1+x+x^2+x^3+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \text{ za svaki } |x| < 1.$$

(Uočimo da je tada zadovoljen nužan uvjet konvergencije.)

Zainteresiranom čitatelju sada nudimo i dokaz da su gornje faktorizacije funkcija $\sin x$ i $\cos x$ točne. Dokažimo najprije da vrijedi

$$(1) \quad a^{2N} - b^{2N} = (a^2 - b^2) \prod_{n=1}^{N-1} \left(a^2 - 2ab \cos \frac{n\pi}{N} + b^2 \right).$$

Prema De Moivreovoj formuli (usp. okvir u 7.5) kompleksni korijeni polinoma $y = x^{2N} - 1$ su

$$\sqrt[2N]{1} = \pm 1; \cos \frac{2n\pi}{2N} \pm i \sin \frac{2n\pi}{2N}, \text{ za } n = 1, \dots, N-1.$$

Zato $x^{2N} - 1$ možemo faktorizirati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} x^{2N} - 1 &= (x^2 - 1) \prod_{n=1}^{N-1} \left[\cos \frac{n\pi}{N} + i \sin \frac{n\pi}{N} \right] \left[x - \left(\cos \frac{n\pi}{N} - i \sin \frac{n\pi}{N} \right) \right] = \\ &= (x^2 - 1) \prod_{n=1}^{N-1} \left[\left(x - \cos \frac{n\pi}{N} \right)^2 + \left(\sin \frac{n\pi}{N} \right)^2 \right] = (x^2 - 1) \prod_{n=1}^{N-1} \left[\left(x^2 - 2x \cos \frac{n\pi}{N} + 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $x = a/b$ i množenjem s b^{2N} dobijamo (1).

Primijetimo zatim da vrijedi

$$(2) \quad \frac{\operatorname{sh} \pi x}{\pi x} = \frac{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}{2\pi x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{\pi x}{2N} \right)^{2N} - \left(1 - \frac{\pi x}{2N} \right)^{2N}}{2\pi x}.$$

Naime (usp. 6.2), iz $e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h}$ slijedi $e = \lim_{m \rightarrow \infty} (1+y/m)^{m/y}$, dakle $e^y = \lim_{m \rightarrow \infty} (1+y/m)^m$, iz čega za $m = 2N$ i $y = \pm \pi x$ slijedi (2).

Limes izraza na desnoj strani od (2) izračunat ćemo primjenom formule (1) uz $a = (1+\pi x / 2N)$ i $b = (1-\pi x / 2N)$.

$$\frac{\left(1 + \frac{\pi x}{2N} \right)^{2N} - \left(1 - \frac{\pi x}{2N} \right)^{2N}}{2\pi x} = \frac{1}{2\pi x} \frac{2\pi x}{N} \prod_{n=1}^{N-1} \left[1 + \frac{\pi x}{N} + \frac{\pi^2 x^2}{4N^2} - 2 \left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{2N^2} \right) \cos \frac{n\pi}{N} + 1 - \frac{\pi x}{N} + \frac{\pi^2 x^2}{4N^2} \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{N} \prod_{n=1}^{N-1} \left[2 \left(1 - \cos \frac{n\pi}{N} \right) + \frac{\pi^2 x^2}{2N^2} \left(1 + \cos \frac{n\pi}{N} \right) \right] = \frac{1}{N} \prod_{n=1}^{N-1} \left(4 \sin^2 \frac{n\pi}{2N} + \frac{\pi^2 x^2}{N^2} \cos^2 \frac{n\pi}{2N} \right) = \\
 &= \frac{1}{N} \prod_{n=1}^{N-1} \left(1 + \frac{\pi^2 x^2}{4N^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{n\pi}{2N} \right) 4 \sin^2 \frac{n\pi}{2N} = \prod_{n=1}^{N-1} \left(1 + \frac{\pi^2 x^2}{4N^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{n\pi}{2N} \right) \cdot \prod_{n=1}^{N-1} 4 \sin^2 \frac{n\pi}{2N}
 \end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{\operatorname{sh} \pi x}{\pi x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{N-1} \left(1 + \frac{\pi^2 x^2}{4N^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{n\pi}{2N} \right) \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{N-1} 4 \sin^2 \frac{n\pi}{2N}.$$

Budući da je $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sh}(\pi x)/(\pi x) = 1$, uvrštavanjem $x = 0$ u gornju jednadžbu nalazimo da je desni limes 1, pa je

$$\frac{\operatorname{sh} \pi x}{\pi x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{N-1} \left(1 + \frac{\pi^2 x^2}{4N^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{n\pi}{2N} \right).$$

Uzimajući u obzir (usp. 7.4 primjer 5), da je $\operatorname{tg} \alpha = \alpha + \alpha^3/3 + \dots$, tj. da se $\operatorname{tg} \alpha$ za $\alpha \rightarrow 0$ ponaša kao α , zaključujemo da se $\operatorname{ctg}^2 \alpha$ ponaša kao $1/\alpha^2$, odakle slijedi

$$\frac{\operatorname{sh} \pi x}{\pi x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{N-1} \left(1 + \frac{\pi^2 x^2}{4N^2} \cdot \left(\frac{2N}{n\pi} \right)^2 \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{N-1} \left(1 + \frac{x^2}{n^2} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2} \right).$$

Odavde (uvrštavanjem x/π za x , te potom ix za x) slijedi

$$\frac{\operatorname{sh} x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right), \quad \frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right),$$

jer je $\sin x/x = \operatorname{sh}(ix)/(ix)$ (usp. Okvir o vezi trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija u 7.6). Slično se dokazuje i valjanost faktorizacije kosinusa.

PRIMJER 3.

Funkcija $\operatorname{ctg} x$ nema realnih nultočaka ali ima beskonačno mnogo prekida u $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ (v. sl. 19. u 6.2). Funkcije $1/x, 1/(x - \pi), 1/(x + \pi), 1/(x - 2\pi), 1/(x + 2\pi), \dots$ imaju beskonačne prekide u $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$, pa njihov beskonačni zbroj ima iste prekide kao i $\operatorname{ctg} x$. Dokažimo da je $\operatorname{ctg} x$ zapravo jednak tom zbroju:

$$\operatorname{ctg} x = \dots + \frac{1}{x + 2\pi} + \frac{1}{x + \pi} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x - \pi} + \frac{1}{x - 2\pi} + \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - n\pi}$$

Rješenje:

Logaritmiranjem jednakosti

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)$$

nalazimo

$$\ln \sin x - \ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right).$$

Integriranjem nalazimo

$$\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2 \pi^2}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - n\pi}.$$

RAZVOJ KOTANGENSA

$$\operatorname{ctg} x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - n\pi}$$

PRIMJER 4.

Uspoređujući razvoje kotangensa iz ovog odjeljka (vidi gornji okvir i odgovarajući okvir u 7.6)

izračunajmo sumu $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$, za sve parne p .

Rješenje:

Iz razmatranja koja su prethodila ovom primjeru neposredno slijedi

$$(3) \quad \pi x \operatorname{ctg} \pi x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - n\pi} = 1 + 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2}.$$

S druge strane, iz razvoja kotangensa koji smo našli u 7.6 (usp. okvir u 7.6) slijedi

$$(4) \quad \pi x \operatorname{ctg} \pi x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} B_{2k} (\pi x)^{2k}.$$

Razvoj (3) možemo transformirati koristeći se razvojem u geometrijski red:

$$\frac{2x^2}{x^2 - n^2} = -2 \frac{(x/n)^2}{1 - (x/n)^2} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n^2} \right)^k.$$

Dakle,

$$(5) \quad \pi x \operatorname{ctg} \pi x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{n^{2k}} \right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) x^{2k}.$$

Uspoređujući (4) i (5) konačno nalazimo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} B_{2k} \pi^{2k}.$$

Budući da je $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, ... (usp. 7.4 primjer 5) slijedi da je

$$\sum \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\sum \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90},$$

$$\sum \frac{1}{n^6} = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \dots = \frac{\pi^6}{945},$$

i tako dalje (usp. 8.3 primjer 19).

Problem izračunavanja suma harmonijskih p -redova postavio je J. Bernoulli u jednom testu pisanom u Baselu, pa je on otada poznat kao baselski problem. Za parne brojeve p riješio ga je L. Euler (na gornji način), a za neparne brojeve p on do danas nije riješen.

EULEROVO RJEŠENJE BASELSKOG PROBLEMA

Za sve parne brojeve p :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots = (-1)^{p/2+1} \frac{2^{p-1}}{(p)!} B_p \pi^p,$$

gdje su B_p Bernoullijevi brojevi iz 7.4 primjer 5 (usp. i 7.6 okvir o razvoju tangensa i kotangensa).

Bernoullijevi brojevi javljaju se i kao slobodni koeficijenti Bernoullijevih polinoma, čiji su integrali jednaki konačnim sumama potencija prirodnih brojeva:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \int_0^n \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \int_0^n \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) dx = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 = \int_0^n \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right) dx = \frac{n^4}{4} - \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4},$$

i tako dalje. To pokazujemo u zadnjem primjeru ovog odjeljka.

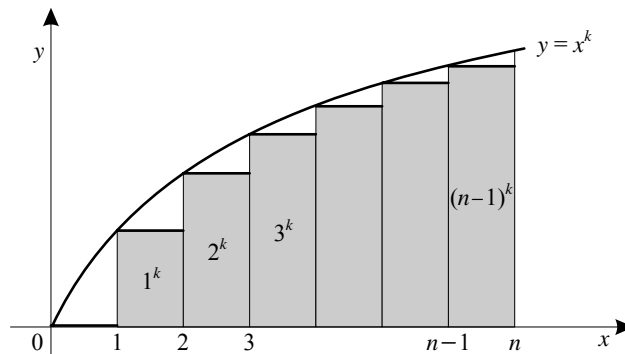
PRIMJER 5.

Suma potencija prirodnih brojeva $\sum_{x=0}^{n-1} x^k$ aproksimirana je integralom $\int_0^n x^k dx$ (v. sliku 1).

$$\sum_{x=0}^{n-1} x^k \approx \int_0^n x^k dx$$

Odredimo polinome k -toga stupnja $B_k(x) = x^k + \dots + bx + a$, takve da bude točno (a ne samo aproksimativno, kao za x^k):

$$(6) \quad \sum_{x=0}^{n-1} x^k = \int_0^n (x^k + \dots + bx + a) dx = \int_0^n B_k(x) dx.$$



Slika 1.

Rješenje:

Iz zahtjeva (6) neposredno slijedi

$$\int_n^{n+1} B_k(x) dx = \int_0^{n+1} B_k(x) dx - \int_0^n B_k(x) dx = \sum_{x=0}^n x^k - \sum_{x=0}^{n-1} x^k = n^k$$

što (uz zahtjev da vodeći koeficijent od $B_k(x)$ mora biti 1) jednoznačno određuje koeficijente polinoma $B_k(x)$. Na primjer, za $k = 3$ imamo:

$$\begin{aligned} n^3 &= \int_n^{n+1} B_3(x) dx = \int_n^{n+1} (a + bx + cx^2 + x^3) dx = \left(ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_n^{n+1} = \\ &= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{1}{4} \right) + (b + c + 1)n + \left(c + \frac{3}{2} \right) n^2 + n^3. \end{aligned}$$

Uspoređivanjem koeficijenata na lijevoj i desnoj strani dobivamo sljedeći sustav za nepoznate koeficijente a , b i c :

$$a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{1}{4} = 0$$

$$b + c + 1 = 0$$

$$c + \frac{3}{2} = 0$$

$$1 = 1$$

Ovakvi trokutasti sustavi uvijek imaju jednoznačno rješenje. U našem slučaju (za $k = 3$) $c = -3/2$, $b = 1/2$ i $a = 0$. Dakle, $B_3(x) = x^3 - 3x^2/2 + x/2$, pa je

$$\sum_{x=0}^{n-1} x^3 = \int_0^n (x^3 - 3x^2/2 + x/2) dx = n^4/4 - n^3/2 + n^2/4$$

(usp. gore). Tako možemo izračunati svaki $B_k(x)$ i svaku sumu $\sum_{x=0}^{n-1} x^k$.

S druge strane, deriviranjem definicione relacije za $B_k(x)$ nalazimo:

$$kn^{k-1} \frac{d}{dn} \int_n^{n+1} B_k(x) dx = \frac{d}{dn} \int_0^{n+1} B_k(x) dx - \frac{d}{dn} \int_0^n B_k(x) dx = B_k(n+1) - B_k(n).$$

Oдавde slijedi

$$(7) \quad k \cdot 0^{k-1} = B_k(1) - B_k(0)$$

$$k \cdot 1^{k-1} = B_k(2) - B_k(1)$$

$$k \cdot 2^{k-1} = B_k(3) - B_k(2)$$

$$\vdots$$

$$k \cdot (n-1)^{k-1} = B_k(n) - B_k(n-1)$$

što nakon zbrajanja svih jednadžbi daje

$$k(0^{k-1} + 1^{k-1} + 2^{k-1} + \dots + (n-1)^{k-1}) = B_k(n) - B_k(0).$$

Iz (6) sada neposredno slijedi

$$(8) \quad B_k(n) = k \int_0^n B_{k-1}(x) dx + B_k(0).$$

Ako znamo vrijednosti $B_k = B_k(0)$, onda iz (8) možemo rekonstruirati sve polinome $B_k(x)$:

$$B_1(x) = x + B_1$$

$$B_2(x) = 2 \int_0^x (x + B_1) dx + B_2 = x^2 + \binom{2}{1} B_1 x + B_2$$

$$B_3(x) = 3 \int_0^x \left(x^2 + \binom{2}{1} B_1 x + B_2 \right) dx + B_3 = x^3 + \binom{3}{1} B_1 x^2 + \binom{3}{2} B_2 x + B_3$$

$$\vdots$$

$$B_k(x) = x^k + \binom{k}{1} B_1 x^{k-1} + \binom{k}{2} B_2 x^{k-2} + \dots + \binom{k}{k-1} B_{k-1} x + B_k$$

Uvrstimo li $x = 1$ u zdanju jednakost i uzmemo li u obzir da je $B_k(0) = B_k(1)$ (usp. (7)), naći ćemo da je

$$B_k = 1 + \binom{k}{1} B_1 + \binom{k}{2} B_2 + \dots + \binom{k}{k-1} B_{k-1} + B_k,$$

to jest (uz uvođenje $B_0 = 1$)

$$\binom{k}{0} B_0 + \binom{k}{1} B_1 + \binom{k}{2} B_2 + \dots + \binom{k}{k-1} B_{k-1} = 0.$$

Budući da je to definiciono svojstvo Bernoullijevih brojeva (usp. 7.4 primjer 5) slijedi da su vrijednosti $B_k(0)$ zapravo Bernoullijevi brojevi.