

JOSEPH LOUIS LAGRANGE

povodom 250-e godine rođenja

ZVONIMIR ŠIKIĆ, Zagreb

Dva najveća matematičara 18. stoljeća bijahu L. Euler i J. L. Lagrange. Kada je L. Euler 1766. godine napustio Berlin, gdje je kao najveći matematičar Evrope stolovao na dvoru najvećeg kralja Evrope Fridrika Velikog, na tom ga je mjestu zamijenio J. L. Lagrange. Debata o tome koji je od dvojice najvećih bio veći traje i danas.

J. L. Lagrange rođen je 1736. godine u Torinu. Tu je stekao klasično obrazovanje. Njegov povećani interes za matematiku obično se veže uz čitanje eseja Newtonovog prijatelja Halleya, u kojem ovaj iznosi prednosti diferencijalnog računa nad sintetičkom geometrijskom metodom Grka. Lagrange je osvojen. U izuzetno kratkom vremenu on savladava sve ono što je bila moderna analiza njegovog vremena. Sa šesnaest godina postaje profesor Kraljevske artiljerijske škole u Torinu. Već tada je napisao svoje remek-djelo „*Mecanique analytique*” koje će biti objavljeno tek 1788. godine u Parizu (u njegovoj 52. godini). Za ovaj Lagrangeov analitički napad na mehaniku može se reći da je prvi potpuni prekid s grčkom tradicijom. Uostalom, pogledajmo što G. Boole u 19. stoljeću kaže o njegovoj „*Mecanique céleste*” koju je Lagrange pisao u istom analitičkom duhu:

Lagrangeovim je radom gibanje planeta, sa svom svojom složenošću i raznovrsnošću, svedeno na čisto matematičko pitanje. Ono je prestalo biti fizikalnim problemom. Nestale su i pobudena i pobuđujuća planeta. Ideje vremena i sile privedene su svome kraju. Elementi orbita iščezavaju, ili još bolje postoje samo kao proizvoljni znaci matematičkih formula.

Malo emfatičan prikaz ali otkriva duh Lagrangeova djela. Naravno, veliki analitičar nije bio samo korisnik analitičke metode, on ju je i usavršavao. Dapače, bavio se i tada otvorenim pitanjem njenog zasnivanja budući da diferencijalni i integralni račun još nisu jasno utemeljeni. Već 1759. on piše Euleru da je došao do istinske metafizike ne samo osnovnih principa mehanike nego i diferencijalnog i integralnog računa. Lagrange misli na metodu koju je objavio 1772. u članku „*Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration*” (o tome uskoro govorimo nešto više). Osim toga Lagrange se bavi teorijom jednadžbi, o čemu je ostavio značajno djelo „*Traite de la résolution des équations numériques de tous degrés*”, 1767. godine. Taj je rad kasnije nastavio mladi Galois došavši tako do svoje teorije grupa. Poznati teorem teorije grupa koji kaže da je red podgrupe neke konačne grupe faktor reda te grupe, nosi Lagrangeovo ime. Značajne rezultate Lagrange

je ostvario i u aritmetici mada se (kako reče D'Alambertu) njome bavio samo radi promjene. Dokazao je npr. da se svaki prirodni broj može izraziti kao zbroj najviše četiri kvadrata.

Produktivni berlinski period trajao je do smrti Fridrika Velikog 1786. godine, kada na poziv Luja XVI Lagrange odlazi u Pariz gdje ostaje i nakon revolucije 1789. Bio je revoltiran okrutnostima Terora koji je uslijedio. Glupost i kratkovidost mnogih egzekucija izrazio je riječima kojima je popratio jednu od najglupljih, giljotiniranje Lavoisiera:

Rulji je trebao samo trenutak da ukloni njegovu glavu, a stoljeće neće dostajati da se ona ponovo stvori.

Kada je 1795. ustanovljena École Normal Lagrange je imenovan za profesora matematike. Kada je ova škola zatvorena i 1797. godine osnovana slavna École Polytechnique, Lagrange je predložio predavanja iz matematike i bio je njen prvi profesor. Prvi put u svojoj karijeri najveći matematičar svojeg vremena postaje učiteljem matematike. U tom periodu u Lagrangea se ponovo javlja interes za rigorozno zasnivanje diferencijalnog i integralnog računa. Očito je da su Lagrangeovi učenici imali poteškoća s pojmovima beskonačno malog i beskonačno velikog u tradicionalnom diferencijalnom računu. Lagrange pokušava savladati te teškoće svojim osebujnim pristupom razvijenim 1797. godine u „*Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*”, koji dalje razvija ideje zacrtane 1772. u „*Sur une nouvelle . . .*”. Ove se Lagrangeove ideje obično smatraju promašenim. To međutim nije sasvim točno pa ćemo zato o njima reći nešto više.

Mnogi matematičari 18. st. jasno uočavaju da beskonačno malo nije zadovoljavajući temelj diferencijalnog i integralnog računa. Većina kao zamjenu ove sumnjive osnove predlaže neku formu ideje granične vrijednosti (u tome je najuspješniji iako ne i sasvim uspješan D'Alambert). J. L. Lagrange jedini je značajni matematičar koji ne ide ovom glavnom linijom. On je skeptičan prema beskonačno malom, što iskazuje Berkeleyevim riječima da rezultati diferencijalnog računa zahvaljuju svoju točnost kompenzaciji grešaka, međutim njegov stav prema pojmu granične vrijednosti također je hladan. On smatra da je D'Alambertova definicija tangente kao granične vrijednosti sekante nezadovoljavajuća, utoliko što sekantu nakon što jednom postane tangenta ništa ne može spriječiti da opet postane sekanta s druge strane promatrane točke, pa mu se čini da je točna specifikacija te granice skočana s mnogim metafizičkim teškoćama. Jasno je da pisac *Mécanique analytique* nije zadovoljan ni Newtonovom metodom fluksija, zbog uvođenja irelevantnog pojma gibanja. Eulerov način da dx i dy pretstavlja kao 0 također ga ne zadovoljava jer osjeća da nemamo jasne i precizne ideje o omjeru dvaju veličina koje postaju 0. Kao rezultat svega toga Lagrange traga za jednostavnom algebarskom idejom koja ne bi trpjela od ovih prigovora. Spomenuli smo da je već 1759. godine pisao Euleru o toj ideji koju je prvi put objavio u „*Sur une nouvelle . . .*” 1772. godine.

Red $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \dots$ poznat je bar od vremena

Taylora čije ime i nosi. U tom redu, koeficijenti potencija od h nisu drugo do omjeri diferencijala ili fluksija. Dakako, ovi redovi se mogu razvijati (kako je već Newton pokazao) bez poziva na ove pojmove. Što je onda prirodnije nego diferencijale i fluksije definirati pomoću koeficijenata ovih redova? Na ovaj bi način zaobišli uvođenje bilo granica bilo diferencijala, ili pak fluksija, pa bi diferencijalni račun

time bio sveden na jednostavne algebarske operacije. To je osnovna Lagrangeova ideja izražena i u dugom naslovu njegova rada iz 1797. godine. On dakle u temelje svojeg pristupa stavlja Taylorov razvoj, implicitno pretpostavljajući da sve funkcije dopuštaju takav razvoj. Koeficijente p', p'', \dots potencija od h u Taylorovom razvoju od $u(x+h)$ on definira kao „*functions dérivées*” od u . Diferencijalni se račun za Lagrangea sastoji u „neposrednom nalaženju, uz pomoć jednostavnih i spretnih postupaka, deriviranih funkcija p', p'', \dots funkcije u ”; a integralni se račun sastoji u „određivanju funkcije u pomoću ovih deriviranih funkcija”.

Danas znamo da se Lagrangeova metoda oslanja na pogrešnu pretpostavku da se svaka funkcija može razviti u Taylorov red. Dapače, znamo i to da je bijeg od beskonačno velikog i beskonačno malog, kao i od pojma granice, samo prividan budući da ti pojmovi ulaze u kritičko ispitivanje konvergencije reda koje Lagrange ne razmatra na adekvatan način. To je ono što čitavu njegovu konstrukciju kvalificira kao očiti promašaj. Međutim, uočimo ipak neke pozitivne novine njegovog pristupa. On je prvi koji u svojem kritičkom pristupu zasnivanju diferencijalnog računa u fokus ispitivanja stavlja sam **formalizam teorije funkcija** a ne predodžbe geometrije, mehanike ili filozofije. Naime, otkrivači diferencijalnog i integralnog računa interpretirali su ga kao instrument za ispitivanje odnosa među veličinama u geometrijskim i mehaničkim problemima i tu istu interpretaciju nalazimo kod njihovih sljedbenika sve do Lagrangea, koji u prvi plan stavlja formalni pojam funkcije. Na taj način on je prvi put usmjerio pažnju na veličinu koja je danas osnovni pojam diferencijalnog računa, na deriviranu funkciju ili kraće derivaciju. (Osim što joj je dao ime Lagrange ju je i označio oznakom $f'(x)$ koja je i danas u upotrebi.) Mada Newtonov krajnji omjer fluksija možemo interpretirati kao **jedan** broj ili veličinu, koju danas zovemo derivacijom, Newton je o ovoj veličini mislio kao o omjeru **dvaju** fluksija. Iako je Leibniz razumio značaj omjera dvaju diferencijala on o njemu nije mislio kao o **jednom** broju, nego kao o kvocijentu **dvaju** „neodredljivih”. S D’Alambertom i njegovim insistiranjem da diferencijalni račun trebamo strogo razumijevati u terminima graničnih vrijednosti približavamo se pojmu derivacije ali ni kod njega ne nalazimo pojam **jedne** funkcije, odnosno **jednog** broja koji je granična vrijednost **jednog** beskonačnog niza. Kao Newton i Leibniz tako i D’Alambert nema na pameti funkciju, nego dvije strane neke jednadžbe kojima su granične vrijednosti jednake. Kod Lagrangea se prvi put „*function dérivée*” javlja kao **jedinstvena** veličina, oslobođena od bilo kakve ideje omjera ili granične jednakosti. Ona je jedna funkcija, i mada Lagrangeova definicija te funkcije nije ona koju smo na kraju prihvatili, Lagrangeov pogled na nju kao jedinstvenu funkciju mogao je doprinijeti njenoj danas opće prihvaćenoj definiciji. Cauchyev revolucionarni obrat kojim derivacija postaje osnovni pojam diferencijalnog računa, pomoću kojega se tek definiraju diferencijali (ili fluksije), ponešto duguje i Lagrangeu. Naime uočavanje tog pojma kao osnovnog Lagrangeovo je. Drugi vjerovnik je naravno D’Alambert od kojeg se moglo naučiti da se taj osnovni pojam treba definirati kao granična vrijednost. Za one koji vole jednostavne iako ne uvijek precizne formule:

$$\text{Lagrange} + \text{D'Alambert} = \text{Cauchy.}$$

Toliko o Lagrangeovom promašaju.

I na kraju recimo da je Lagrange proživio svoju starost kao slava Francuske. Napoleon, koji ga je zvao „veličanstvenom piramidom matematičke znanosti”, ukazivao mu je velike počasti. Kada je Francuska pripojila Piemont Talleyrand je

dobio naređenje da posjeti Lagrangeova oca, koji je još živio u Torinu, i da mu kaže:

Vaš sin, na kojeg je Piemont ponosan što ga je dao, a Francuska što ga posjeduje, služi na čast čitavom čovječanstvu svojim genijem.

Posljednji Lagrangeov znanstveni napor bijaše revizija i proširenje njegovog remek-djela „*Mécanique analytique*” za drugo izdanje. S velikim elanom vratio se djelu za koje je uvijek pokazivao najveći interes i koje će ostati njegov najveći doprinos ljudskoj misli. Završivši ovaj posao uskoro je umro, u rano jutro 10. travnja 1813. godine u 76. godini života.