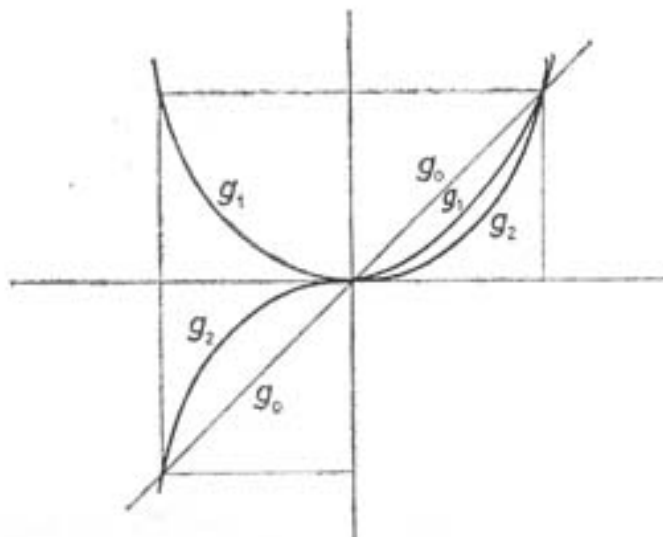


# TAYLOROVA FORMULA I DODIRI VIŠEG REDA

Zvonimir ŠIKIĆ, Zagreb

## I. Dodiri višeg reda

Problem 1.: Ispitajmo odnos funkcije  $f(x) = 0$  i funkcija  $g_0(x) = x$ ,  $g_1(x) = x^2$ ,  $g_2(x) = x^3$  itd., u točki  $x = 0$ .



0. Grafovi funkcija  $f$  i  $g_0$  sijeku se u ishodištu, tj.  $f(0) - g_0(0) = 0$   
ili

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g_0(x)) = 0.$$

Kažemo da funkcije  $f$  i  $g_0$  imaju u točki 0 dodir nultoga reda.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g_1(x)) = 0$ , tj.  $f$  i  $g_1$  imaju u točki 0 dodir nultoga reda. Ali i nakon dijeljenja s  $x$  (koji teži prema nuli) ostaje

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g_1(x)}{x} = 0.$$

Kažemo da funkcije  $f$  i  $g_1$  imaju u točki 0 dodir prvoga reda.

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g_2(x)) = 0$ , tj.  $f$  i  $g_2$  imaju u točki 0 dodir nultoga reda.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g_2(x)}{x} = 0$ , tj.  $f$  i  $g_2$  imaju u točki 0 dodir prvoga reda. Ali čak i nakon dijeljenja s  $x^2$  (koji teži nuli brže od  $x$ ) ostaje

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g_2(x)}{x^2} = 0.$$

Kažemo da funkcije  $f$  i  $g_2$  imaju u točki 0 dodir drugog reda i tako dalje.

**Definicija.** Za funkcije  $f$  i  $g$  kažemo da imaju u točki  $a$  dodir  $n$ -toga reda ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) ako je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - g(a+h)}{h^n} = 0.$$

Iz definicije neposredno proizlazi

**Teorem 1.** Ako funkcije  $f$  i  $g$  imaju u točki  $a$  dodir  $n$ -toga reda, onda one imaju u točki  $a$  i dodir  $k$ -tog reda za  $k \leq n$ .

**Teorem 2.** Funkcije  $f$  i  $g$  iz  $C^n [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$  imaju u točki  $a$  dodir  $n$ -toga reda ako je, i samo ako je,  $f(a) = g(a)$ ,  $f'(a) = g'(a)$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$ .

**Dokaz.** Razliku funkcija  $f$  i  $g$  označimo sa  $p$ ;  $p(x) = f(x) - g(x)$ .

1. Pretpostavimo da  $f$  i  $g$  imaju u točki  $a$  dodir  $n$ -toga reda:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - g(a+h)}{h^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(a+h)}{h^n} = 0.$$

Dakle,  $p(a) = 0$ . Odavde, po L'Hospitalovu pravilu 1) proizlazi

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(a+h)}{h^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p'(a+h)}{nh^{n-1}}.$$

Dakle,  $p'(a) = 0$ . Odavde, po L'Hospitalovu pravilu proizlazi

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p'(a+h)}{nh^{n-1}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p''(a+h)}{n(n-1)h^{n-2}}.$$

Dakle,  $p''(a) = 0$ .

Ponavljajući ovaj postupak lako dokazujemo da je i

$$p'''(a) = p^{(4)}(a) = \dots = p^{(n)}(a) = 0.$$

Dakle,  $f(a) = g(a)$ ,  $f'(a) = g'(a)$ ,  $f''(a) = g''(a)$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$ .

2. Pretpostavimo da je

$$f(a) = g(a), f'(a) = g'(a), f''(a) = g''(a), \dots, f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a).$$

Tada je

$$p(a) = p'(a) = p''(a) = \dots = p^{(n)}(a) = 0,$$

sa primenom L'Hospitalova pravila dobivamo<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - h(a+h)}{h^n} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(a+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p'(a+h)}{nh^{n-1}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p''(a+h)}{n(n-1)h^{n-2}} = \dots = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p^{(n)}(a+h)}{n!} = 0, \end{aligned}$$

tj.  $f$  i  $g$  imaju u  $a$  dodir  $n$ -toga reda.

Q.E.D.

## II. Taylorova formula

**Problem 2.:** Može li se funkcija  $f$  iz  $C^n[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$  aproksimirati polinomom  $n$ -toga stupnja  $0_n$  koji bi s njom u točki  $a$  imao dodir **najvišega** reda?

**Teorem 3.** Postoji jedan jedini polinom  $n$ -toga stupnja  $0_n$  koji u točki  $a$  s funkcijom  $f$  iz  $C^n[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$  ima dodir  $n$ -toga reda. Polinom  $0_n$  je oblika  $0_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}$ .

Svaki drugi polinom  $n$ -toga stupnja  $Q_n \neq 0_n$  ima s funkcijom  $f$  u točki  $a$  dodir reda manjeg od  $n$  (ako uopće ima dodir sa  $f$ ).

Prije dokaza teorema 3. dokazat ćemo jednu lemu.

**Lema.** Polinom  $n$ -toga stupnja  $P_n$  jednoznačno je određen vrijednostima  $P_n(a), P'_n(a), P''_n(a), \dots, P_n^{(n)}(a)$  i za bilo koji odabir ovih vrijednosti moguće je naći polinom  $P_n$ , takav da on i njegove derivacije primaju u točki  $a$  baš te vrijednosti.

**Dokaz.** Neka je  $P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ . Polinom  $\bar{P}_n$  definiramo na sljedeći način:

$$(1) \quad \bar{P}_n(h) = P_n(a+h), \text{ tj.}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \bar{P}_n(h) &= c_0 + c_1(a+h) + c_2(a+h)^2 + \dots + c_n(a+h)^n = \\ &= \bar{c}_0 + \bar{c}_1h + \bar{c}_2h^2 + \dots + \bar{c}_nh^n. \end{aligned}$$

Iz (1) (deriviranjem po  $h$ ) proizlazi

$$(3) \quad \bar{P}_n(0) = P_n(a), \bar{P}'_n(0) = P'_n(a), \bar{P}''_n(0) = P''_n(a), \dots, \bar{P}_n^{(n)}(0) = P_n^{(n)}(a).$$

Iz (2) (deriviranjem po  $h$ ) proizlazi

$$(4) \quad \bar{c}_0 = \bar{P}_n(0), \bar{c}_1 = \bar{P}'_n(0), \bar{c}_2 = \frac{\bar{P}''_n(0)}{2!}, \dots, \bar{c}_n = \frac{\bar{P}_n^{(n)}(0)}{n!}.$$

Iz (1), (2), (3) i (4) proizlazi

$$(5) \quad P_n(a+h) = P_n(a) + P'_n(a)h + P''_n(a) \frac{h^2}{2!} + \dots + P_n^{(n)}(a) \frac{h^n}{n!}$$

<sup>1</sup> Veći broj različitih teorema naziva se L'Hospitalovim pravilom. Mi mislimo na ovu verziju: ako su  $f$  i  $g$  iz  $C^1[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$  i  $f(a) = g(a) = 0$  onda je  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  (tj. ako postoji jedan limes onda postoji i drugi i jednaki su). U slučaju  $g(x) = x^n$  dokaz je sasvim jednostavan.

ili uz supstituciju  $a + h = x$

$$(6) \quad P_n(x) = P_n(a) + P'_n(a)(x-a) + P''_n(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + \\ + P_n^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Formula (6) pokazuje kako je moguće, uz bilo koji odabir vrijednosti polinoma i njegovih  $n$  derivacija u jednoj jedinoj točki  $a$ , uistinu i konstruirati takav polinom  $n$ -tog stupnja da on i njegove derivacije primaju u točki  $a$  baš te vrijednosti.

Neka je, nadalje,  $S_n$  polinom  $n$ -toga stupnja za koji vrijedi

$$S_n(a) = P_n(a), S'_n(a) = P'_n(a), S''_n(a) = P''_n(a), \dots, S_n^{(n)}(a) = P_n^{(n)}(a)$$

Tada za razliku  $R_n$  polinoma  $P_n$  i  $S_n$  ( $R_n(x) = P_n(x) - S_n(x)$ ) vrijedi

$$R_n(a) = R'_n(a) = R''_n(a) = \dots = R_n^{(n)}(a) = 0.$$

Odavde, prema (6), proizlazi da je  $R_n(x) = 0$ , tj.  $P_n(x) = S_n(x)$ .

Q.E.D.

**Dokaz teorema 3.** Prema lemi, uvjeti

$$(7) \quad O_n(a) = f(a), O'_n(a) = f'(a), O''_n(a) = f''(a), \dots, O_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

određuju, i to jednoznačno, polinom  $n$ -toga stupnja  $O_n$ . Prema teoremu 2. polinom  $O_n$  ima u točki  $a$  dodir  $n$ -toga reda s funkcijom  $f$ . Za bilo koji polinom  $n$ -toga stupnja  $Q_n(x) \neq O_n(x)$  postoji (prema lemi)  $k \leq n$  takav da je

$$(8) \quad Q_n^{(k)}(a) \neq P_n^{(k)}(a).$$

Iz (7) i (8), prema teoremu 2, proizlazi da  $Q_n$  i  $f$  imaju, u točki  $a$ , dodir reda nižeg od  $n$ .

Iz formule (6) (koja vrijedi za svaki polinom  $P_n$ ) i uvjeta (7) (koje zadovoljava naš polinom  $O_n$ ) proizlazi da je

$$(9) \quad O_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}$$

Q.E.D.

Polinom  $O_n$  iz teorema 3. zvat ćemo  $n$ -tom oskulacijskom aproksimacijom funkcije  $f$  u točki  $a$ , jer on (prema teoremu 3) od svih polinom  $n$ -toga stupnja ima s funkcijom  $f$ , u točki  $a$ , najbliskiji dodir.

**Problem 3:** S kojom točnošću  $n$ -ta oskulacijska aproksimacija funkcije  $f$  u točki  $a$  (označili smo je s  $O_n$ ) aproksimira funkciju  $f$ .

**Teorem 4 (Taylorova formula).** Greška  $n$ -te oskulacijske aproksimacije (u točki  $a$ ) funkcije  $f$  iz  $C^{n+1}$  je

$$(10) \quad R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi),$$

gdje je vrijednost  $\xi$  smještena između  $a$  i  $x$ .

**Dokaz.**  $n$ -ta oskulacijska aproksimacija funkcije  $f$ , u točki  $a$ , zadovoljava uvjete (7) (prema dokazu teorema 3). Stoga za  $R_n(x) = f(x) - O_n(x)$  vrijedi

$$(11) \quad R_n(a) = R'_n(a) = R''_n(a) = \dots = R_n^{(n)}(a) = 0.$$

Nadimo sada funkciju  $F(z)$  koja uz ove iste uvjete

$$(12) \quad F(a) = F'(a) = F''(a) = \dots = F^{(n)}(a) = 0$$

ispunjava i uvjet

$$(13) \quad F(x) = 0.$$

Očito je (prema (11)) da funkcija

$$(14) \quad F(z) = R_n(z) - (z - a)^{n+1} H$$

uz ovaj odabir konstante  $H$

$$(15) \quad H = \frac{R_n(x)}{(x - a)^{n+1}}$$

ispunjava sve tražene uvjete (12) i (13).

Iz  $F(a) = F(x) = 0$  proizlazi (prema Rolleovu teoremu)  $F'(\xi_1) = 0$  za  $\xi_1$  između  $a$  i  $x$ .

Iz  $F'(a) = F'(\xi_1) = 0$  proizlazi (na isti način)  $F''(\xi_2) = 0$  za  $\xi_2$  između  $a$  i  $\xi_1$ ; dakle između  $a$  i  $x$ .

Iz  $F''(a) = F''(\xi_2) = 0$  proizlazi  $F'''(\xi_3) = 0$  za između  $a$  i  $\xi_2$ ; dakle između  $a$  i  $\xi_1$ ; dakle između  $a$  i  $x$  itd. do

$$(16) \quad F^{(n+1)}(\xi) = 0 \text{ za } \xi \text{ između } a \text{ i } \xi_n$$

dakle između  $a$  i  $\xi_{n-1}; \dots$ ; dakle između  $a$  i  $x$ .

No uzmemo li u obzir da je  $R_n = f - O_n$  i da je  $O_n$  polinom  $n$ -toga stupnja, jasno je da uzastopnim deriviranjem funkcije  $F$  iz (14) dobivamo

$$(17) \quad F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)! H.$$

(16) i (17) daju

$$(18) \quad H = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

(18) i (15) daju (10).

Q.E.D.