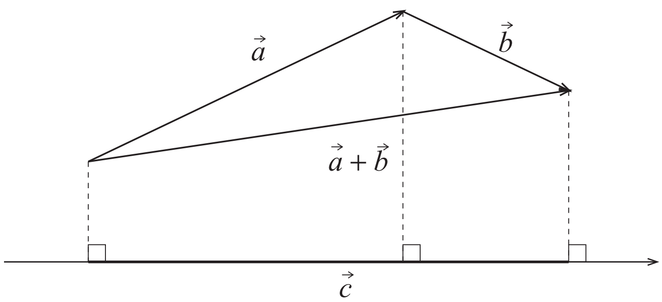
Distributivnost vektorskog produkta

ZVONIMIR ŠIKIĆ, Zagreb

Svatko tko je učenike podučavao vektorskoj algebri zna da je mnogo jednostavnije dokazati distributivnost skalarnog produkta nego distributivnost vektorskog produkta.

Distributivnost skalarnog produkta svodi se na to da je projekcija sume (vektora) jednaka sumi projekcija. Koristeći se svojim zorom svaki će student prihvatiti ovaj planimetrijski stav kao evidentan, gledajući ovu sliku:



Slika 1.

Nije bez značaja ni to što je ovu sliku vrlo jednostavno nacrtati na školsku ploču i precrtati u bilježnicu.

S druge strane, distributivnost vektorskog produkta svodi se na neke stereometrijske stavove. Prihvaćanje tih stavova zahtijeva neusporedivo razvijeniji zor, koji većina učenika nema. Crtanje odgovarajuće slike na školskoj ploči možda i ne stvara velike probleme iskusnim nastavnicima, ali precrtavanje te slike u bilježnicu stvara velike probleme neiskusnim učenicima. (Zato je mi ovdje nećemo crtati.) Kada učenik, na kraju, primijeni svoj loš zor na loše precrtanu sliku rezultat je loš. Učenik ništa ne razumije.

Svrha je ovog članka pokazati kako se "teška" distributivnost vektorskog produkta može izvesti iz "lake" distributivnosti skalarnog produkta. Izvod se temelji na dvije stvari, koje učenik treba znati.

(1) Ako je za svaki vektor $\vec{c}$

$\vec{u} \cdot \vec{c} = \vec{v} \cdot \vec{c}$,

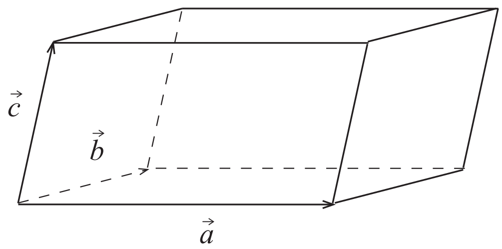
onda je i $\vec{u} = \vec{v}$.

To se lako dokazuje:

ako je $\vec{u} \cdot \vec{c} = \vec{v} \cdot \vec{c}$, onda je $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{c} = 0$. To vrijedi za svaki vektor $\vec{c}$, dakle i za vektor $(\vec{u} - \vec{v})$. Dakle, $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$, tj. $|\vec{u} - \vec{v}| = 0$. Dakle, $\vec{u} - \vec{v} = 0$, tj. $\vec{u} = \vec{v}$.

(2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$

Jednakosti ovih mješovitih produkata jednostavno slijede iz toga što je svaki od njih jednak (relativnom) volumenu paralelopipeda razapetog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.



Slika 2.

Evo sada i najavljenog izvoda distributivnosti vektorskog produkta. Trebamo dokazati

$\vec{a} \times (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \vec{a} \times \vec{b}_1 + \vec{a} \times \vec{b}_2$.

Iz (1) slijedi da je dovoljno za proizvoljni vektor $\vec{c}$ dokazati:

$\left[\vec{a} \times \left(\vec{b}_1 + \vec{b}_2\right)\right] \cdot \vec{c} = \left[\vec{a} \times \vec{b}_1 + \vec{a} \times \vec{b}_2\right] \cdot \vec{c}$.

To dokazujemo ovako:

$\left[\vec{a} \times \left(\vec{b}_1 + \vec{b}_2\right)\right] \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{b}_1 + \vec{b}_2)$ slijedi iz (2),

$(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}_1 + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}_2$ slijedi iz distributivnosti skalarnog produkta,

$(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}_1 + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}_2 = (\vec{a} \times \vec{b}_1) \cdot \vec{c} + (\vec{a} \times \vec{b}_2) \cdot \vec{c}$ slijedi iz (2),

$(\vec{a} \times \vec{b}_1) \cdot \vec{c} + (\vec{a} \times \vec{b}_2) \cdot \vec{c} = \left[\vec{a} \times \vec{b}_1 + \vec{a} \times \vec{b}_2\right] \cdot \vec{c}$ slijedi iz distributivnosti skalarnog produkta.