

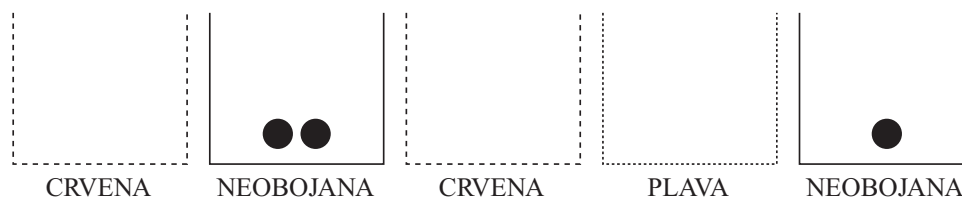
POUČAK 4

Ekvivalent Fermatovog zadnjeg teorema

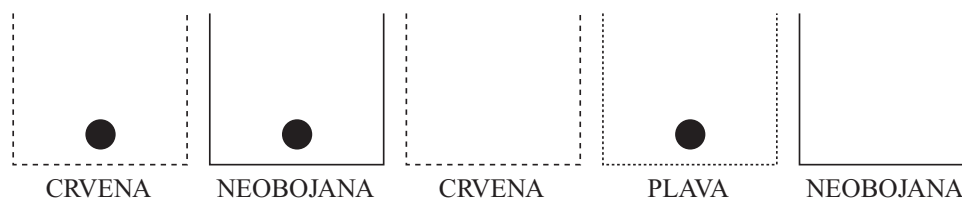
ZVONIMIR ŠIKIĆ, Zagreb

Razmatrat ćemo problem raspoređivanja $n > 2$ kuglica u z kutija od kojih su neke obojane crveno, neke plavo, a neke nisu obojane. (Na donjoj slici prikazana su dva moguća rasporeda za $n = 3$ kuglice i $z = 5$ kutija od kojih su 2 crvene, 1 je plava i 2 su neobojane.)

1. RASPORED:



2. RASPORED:



Od ukupnog broja mogućih rasporeda z^n posebno nas zanimaju oni koji *izbjegavaju obje boje* (takav je npr. 1. raspored na gornjoj slici) i oni koji *pune obje boje* (takav je npr. 2. raspored na gornjoj slici). Za takve rasporede vrijedi sljedeći teorem:

Quineov teorem:

Broj rasporeda koji izbjegavaju obje boje nikada nije jednak broju rasporeda koji pune obje boje.

EKVIVALENT FERMATOVOG ZADNJEG TEOREMA

Teorem zovem Quineovim jer ga je taj slavni američki logičar i filozof formulirao prije nekoliko desetljeća kada je i dokazao njegovu ekvivalentnost s Fermatovim teoremom. Budući da je Fermatov teorem konačno dokazan prije nekoliko godina, slijedi da je i Quineov teorem istinit. Evo i dokaza spomenute ekvivalentnosti.

Ako n kuglica raspoređujemo u z kutija, neka je x broj kutija koje **nisu crvene**, a y broj kutija koje **nisu plave**. Ukupni broj mogućih rasporeda z^n obuhvaća x^n rasporeda koji izbjegavaju crvene kutije i y^n rasporeda koji izbjegavaju plave kutije. S druge strane, sve moguće rasporede možemo podijeliti u 4 međusobno disjunktne klase koje sadrže a , b , c , odnosno d rasporeda:

1. a rasporeda izbjegava obje boje,
2. b rasporeda izbjegava crvenu, ali puni plavu broju,
3. c rasporeda puni crvenu, ali izbjegava plavu boju,
4. d rasporeda puni obje boje.

Dakle:

$$z^n = a + b + c + d, \quad x^n = a + b, \quad y^n = a + c.$$

Odavde odmah slijedi:

$$x^n + y^n = z^n \Leftrightarrow a = d.$$

To znači da su Quineov i Fermatov teorem ekvivalentni.