

Fibonaccijev niz

ZVONIMIR ŠIKIĆ, Zagreb

1. Fibonaccijev trik

Našu raspravu o Fibonaccijevom nizu počet ćemo jednim trikom, koji možete izvesti s grupom učenika, kolega ili prijatelja:

Zamolite svakoga od njih da zamisli dva broja, koje ćemo zvati nultim i prvim brojem. Neka zbroje svoj nulti i prvi broj, pa će tako dobiti svoj drugi broj. Zbrajanjem svojeg prvog i drugog broja dobit će svoj treći broj. Neka tako nastave do svojega desetog broja (svaki je broj zbroj prethodna dva) zapisujući niz dobivenih brojeva na papir. Zatim neka zbroje svih deset zapisanih brojeva, od nultog do devetog. Svakog od sudionika upitajte koji je njegov ili njezin **šesti** broj, pa ga napamet pomnožite s 11. Dobiveni umnožak je njegov ili njezin konačni zbroj!

Evo ilustracije s početnim brojevima 3 i 1 :

n	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
u_n	3	1	4	5	9	14	23	37	60	97
Σ_n	3	4	8	13	22	36	59	96	156	253

Šesti broj je 23 i uistinu: $11 \cdot 23 = 253$.

Da smo na početku zamislili -1 i 1 zbilje bi se ovo:

n	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
u_n	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13
Σ_n	-1	0	0	1	2	4	7	12	20	33

Šesti broj sada je 3 i opet je: $11 \cdot 3 = 33$.

Tajna ovoga trika skrivena je u svojstvima poopćenoga Fibonaccijevog niza i do nje ćemo doći na kraju članka. Zato krenimo redom.

2. Rekurzivna definicija Fibonaccijevog niza

Fibonaccijev niz je niz brojeva koji počinje brojevima 0 i 1, a svaki sljedeći broj u nizu dobije se zbrajanjem prethodna dva:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1; \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Niz je uveo Leonardo iz Pize, poznatiji kao Fibonacci (sin Bonaccijev), u svojoj slavnoj knjizi "Liber abaci" iz 1220. g. Tu on razmatra sljedeći problem.

Nadi broj zečjih parova u n -tom mjesecu ako:

- (1) počinjemo s 1 novorođenim parom;
- (2) svaki par stariji od 1 mjeseca rađa 1 novi par u svakom mjesecu.

Rješenje je očito. U svakom mjesecu imamo sve parove iz prethodnog mjeseca plus broj parova koji su stariji od 1 mjeseca, a to je broj parova iz mjeseca koji prethodi prethodnom mjesecu. Dakle, $Z_n = Z_{n-1} + Z_{n-2}$. Budući da počinjemo s 1 novorođenim parom, kojem prethodi 0 parova, $Z_1 = 1$ i $Z_0 = 0$. Drugim riječima, broj zečeva u n -tom mjesecu jest n -ti član gore definiranog Fibonaccijevog niza. Njegovih prvih dvanaest članova su:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

Fibonaccijev niz pojavljuje se i u mnogim drugim problemima. Na primjer, broj načina S_n na koji se možete uspeti uz n stepenica, prekoračujući po 1 ili 2 stepenice, iznosi F_n (tj. $S_n = F_n$). Naime, očito je $S_0 = 0$ i $S_1 = 1$. S druge strane načini na koje možete prekoračiti n stepenica mogu se podijeliti u dvije skupine. To su oni koji počinju s prekoračenjem 1 stepenice i oni koji počinju s prekoračenjem 2 stepenice:



No prva skupina sadrži S_{n-1} način, a druga S_{n-2} načina, pa je $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$. To pak znači da je S_n Fibonaccijev niz, tj. $S_n = F_n$.

3. Eksplicitna forma Fibonaccijevog niza

Uočimo da smo Fibonaccijev niz u prethodnom odjeljku definirali rekurzivno. Do eksplicitne forme njegovih članova prvi je došao De Moivre dokazavši da je:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}; \quad \alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

De Moivre je promatrao red potencija (tj. beskonačni polinom) čiji su koeficijenti članovi Fibonaccijeva niza, te njegove produkte s $-x$ i $-x^2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + F_4 x^4 + \dots \\ -x f(x) &= -F_0 x - F_1 x^2 - F_2 x^3 - F_3 x^4 - \dots \\ -x^2 f(x) &= -F_0 x^2 - F_1 x^3 - F_2 x^4 - \dots \end{aligned}$$

Zbrajanjem gornjih jednadžbi dobio je:

$$(1 - x - x^2)f(x) = x; \quad f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Rastavljanjem racionalne funkcije $\frac{x}{1 - x - x^2}$ na parcijalne razlomke (α i β su odabrani tako da je $1 - x - x^2 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$, tj. tako da je $\alpha + \beta = 1$ i $\alpha\beta = -1$):

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A}{1 - \alpha x} + \frac{B}{1 - \beta x}; \quad \alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

De Moivre je uspio $f(x)$ prikazati kao zbroj dva geometrijska reda. Dakle,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A}{1 - \alpha x} + \frac{B}{1 - \beta x} = A(1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \dots) + B(1 + \beta x + \beta^2 x^2 + \dots) \\ &= \\ &= (A + B) + (A\alpha + B\beta)x + (A\alpha^2 + B\beta^2)x^2 + \dots \end{aligned}$$

Uspoređujući dobivene koeficijente od $f(x)$ s početno definiranim koeficijentima od $f(x)$, nalazimo da je

$$F_n = A\alpha^n + B\beta^n.$$

S druge strane iz $\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A}{1 - \alpha x} + \frac{B}{1 - \beta x}$, zbog $1 - x - x^2 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$ slijedi

$$\begin{aligned} x &= A(1 - \beta x) + B(1 - \alpha x) = (A + B) - (A\beta + B\alpha)x \\ A + B &= 0, \quad -(A\beta + B\alpha) = 1 \\ A &= -B, \quad A(\alpha - \beta) = 1 \\ A &= \frac{1}{\alpha - \beta}, \quad B = \frac{-1}{\alpha - \beta}. \end{aligned}$$

POUČAK 2/3

Uvrštavanjem u $F_n = A\alpha^n + B\beta^n$, konačno dolazimo do De Moivreve eksplisite forme:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}; \quad \alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

4. Poopćeni Fibonaccijevi nizovi

Svaki niz u_n koji zadovoljava rekurzivne Fibonaccijeve uvjete:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

zove se poopćeni Fibonaccijev niz. Dakle, Fibonaccijev niz je specijalni slučaj koji zadovoljava početne uvjete $u_0 = 0$ i $u_1 = 1$. Svaki drugi odabir početnih uvjeta daje neki drugi poopćeni Fibonaccijev niz. Takve smo odabire imali u našem triku s početka članka. Sada možemo reći da su sudionici zapravo generirali poopćene Fibonaccijeve nizove, a mi smo iz šestih članova njihovih poopćenih Fibonaccijevih nizova uspjeli rekonstruirati zbroj prvih deset članova njihovih nizova.

Još jedan od poopćenih Fibonaccijevih nizova (osim Fibonaccijevog) ima posebno ime. To je Lucasov niz definiran s:

$$L_0 = 2, L_1 = 1; \quad L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

Njegovih prvih dvanaest članova su:

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, \dots$$

Najvažnije svojstvo skupa poopćenih Fibonaccijevih nizova jest njegova **linearnost**:

Ako su (a_n) i (b_n) poopćeni Fibonaccijevi nizovi, onda je to i niz

$$(ra_n + sb_n),$$

za bilo koji odabir realnih brojeva r i s .

Naime iz:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{i} \quad b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$$

neposredno slijedi:

$$ra_n + sb_n = (ra_{n-1} + sb_{n-1}) + (ra_{n-2} + sb_{n-2}).$$

Da bismo ustanovili koji sve nizovi pripadaju u skup poopćenih Fibonaccijevih nizova, pokušajmo pronaći poopćene Fibonaccijeve nizove oblika $u_n = x^n$, gdje je x za sada nepoznati realni broj. Iz $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ slijedi:

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2}, \quad x^n - x^{n-1} - x^{n-2} = 0,$$

$$x^{n-2}(x^2 - x - 1) = 0, \quad x_{1,2} = \alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(trivijalno rješenje $x_3 = 0$ ne zanima nas, jer ono generira trivijalni niz $0, 0, 0, \dots$).

Dakle, našli smo dva poopćena Fibonaccijeva niza oblika $u_n = x^n$. To su

$$a_n = \alpha^n, \quad \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \quad b_n = \beta^n, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Zbog linearnosti skupa poopćenih Fibonaccijevih nizova slijedi da za svaki odabir realnih brojeva r i s dobivamo poopćeni Fibonaccijev niz oblika:

$$u_n = r\alpha^n + s\beta^n; \quad \alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha + \beta = 1$$

$$\alpha\beta = -1$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 3$$

$$(\alpha - \beta)^2 = 5$$

(Naime, $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ i $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$).

S druge strane, zadane početne vrijednosti u_0 i u_1 jednoznačno određuju r i s :

$$\begin{aligned} r + s &= u_0 & \Rightarrow & \quad r = \frac{u_1 - u_0\beta}{\alpha - \beta} \\ r\alpha + s\beta &= u_1 & & \quad s = \frac{u_1 - u_0\alpha}{\beta - \alpha} \end{aligned}$$

što znači da svaki poopćeni Fibonaccijev niz ima oblik $u_n = r\alpha^n + s\beta^n$,

($\alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$), uz odgovarajući odabir realnih brojeva r i s .

Primjerice, za Lucasov niz $u_0 = 2$ i $u_1 = 1$, pa iz $r + s = 2$ i $r\alpha + s\beta = 1$ slijedi $r = s = 1$ (jer je $\alpha + \beta = 1$; usp. gore). Dakle,

$$L_n = \alpha^n + \beta^n; \quad \alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

5. Neka svojstva poopćenih Fibonaccijevih nizova

Sve do sada izvedene formule vrijede i za $n \in \mathbf{Z}$, tj. poopćeni Fibonaccijev niz možemo produžiti i u “negativnom smjeru”. Na primjer, za Fibonaccijev niz vrijedi:

$$F_{-n} = \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \frac{-1}{(\alpha\beta)^n} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = (-1)^{n+1} F_n,$$

što znači da Fibonaccijev niz produžen u “negativnom smjeru” izgleda ovako:

$$\dots, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

Za Lucasov niz vrijedi

$$L_{-n} = \alpha^{-n} + \beta^{-n} = \frac{1}{(\alpha\beta)^n} (\alpha^n + \beta^n) = (-1)^n L_n,$$

što znači da Lucasov niz produžen u “negativnom smjeru” izgleda ovako:

$$\dots, 18, -11, 7, -4, 3, -1, 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots$$

Primijetimo da u gornjim nizovima zapravo i nije bitno gdje je njihov početak, tj. što je njihov nulti član. Koji god član odaberemo kao nulti opet se radi o poopćenom Fibonaccijevom nizu. To znači da je skup poopćenih Fibonaccijevih nizova **translatoran**:

Ako je (u_n) poopćeni Fibonaccijev niz, onda je to i translirani niz (u_{n+k}) za svaki $k \in \mathbf{Z}$.

Vidjeli smo da se svaki poopćeni Fibonaccijev niz može prikazati kao linearna kombinacija nizova (α^n) i (β^n) :

$$u_n = r\alpha^n + s\beta^n; \quad \alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

jer se sve početne vrijednosti u_0, u_1 mogu dobiti odgovarajućim odabirima realnih brojeva r i s (usp. gore). No, isto vrijedi i za Fibonaccijev niz (F_n) i njegovu translaciju (F_{n-1}) .

Svaki poopćeni Fibonaccijev niz (u_n) , s početnim vrijednostima u_0 i u_1 linearna je kombinacija nizova (F_n) i (F_{n-1}) , sljedećeg oblika:

(1)
$$u_n = u_0 F_{n-1} + u_1 F_n.$$

(Naime, $u_0 = u_0 F_{-1} + u_1 F_0 = u_0 \cdot 1 + u_1 \cdot 0 = u_0$ i

$u_1 = u_0 F_0 + u_1 F_1 = u_0 \cdot 0 + u_1 \cdot 1 = u_1$.)

Naprimjer, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, pa je zato:

$$L_n = 2 F_{n-1} + F_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$

Druga jednakost slijedi iz činjenice da je $F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$.

Iz eksplicitnih formula za F_n i L_n koje smo izveli u prethodnom odjeljku, lako izvodimo i mnoga multiplikativna svojstva tih nizova. Sljedeće svojstvo Fibonaccijevog niza, koje ga povezuje sa zlatnim rezom (usp. sljedeći odjeljak), vjerojatno je najvažnije:

$$F_n^2 = F_{n-1} F_{n+1} + (-1)^{n-1}$$

Dokazujemo ga tako da izračunamo $F_n^2 - F_{n-1} F_{n+1}$ i uvjerimo se da je to $(-1)^{n-1}$:

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha^n - \beta^n)^2}{(\alpha - \beta)^2} - \frac{(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})^2}{(\alpha - \beta)} \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})}{(\alpha - \beta)} = \\ & = \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2\alpha^n \beta^n - \alpha^{2n} - \beta^{2n} + \alpha^{n-1} \beta^{n-1} (\alpha^2 + \beta^2)) = \\ & = \frac{1}{5} (-2(-1)^n + (-1)^{n-1} \cdot 3) = \frac{1}{5} (2(-1)^{n-1} + 3(-1)^{n-1}) = (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

(Vrijednosti: $\alpha\beta = -1$, $(\alpha - \beta)^2 = 5$ i $(\alpha^2 + \beta^2) = 3$ izračunali smo u prethodnom odjeljku.)

Sljedeća dva svojstva pomoći će nam (u zadnjem odjeljku) da konačno otkrijemo tajnu Fibonaccijevog trika:

$$(2) \quad F_n L_n = F_{2n}$$

$$(3) \quad F_n L_{n-1} = F_{2n-1} + (-1)^{n-1}$$

Svojstvo (2) posljedica je sljedećeg identiteta:

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} (\alpha^n + \beta^n) = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta}.$$

POUČAK 2/3

Svojstvo (3) posljedica je sljedećeg identiteta:

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) = \frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{\alpha - \beta} + (\alpha\beta)^{n-1}.$$

Evo još nekih svojstava koja čitatelj može dokazati sam:

$$F_{n-1} L_n = F_{2n-1} + (-1)^n$$

$$F_{n+1} (F_n + F_{n+2}) = F_{2n+2}$$

$$F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n+1}$$

$$L_n^2 + L_{n-1}^2 = 5F_{2n+1}$$

$$F_n + F_{n+2} = L_{n+1}$$

$$L_n + L_{n+2} = 5F_{n+1}$$

6. Fibonaccijev niz i zlatni rez

Jedno od najvažnijih svojstava Fibonaccijevog niza

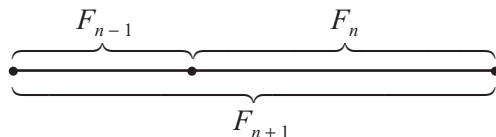
$$F_n^2 = F_{n-1} F_{n+1} + (-1)^{n-1}$$

izveli smo u prethodnom odjeljku. Ono se može zapisati i u ekvivalentnom obliku:

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n+1}}{F_n} \pm \frac{1}{F_{n-1} F_n}$$

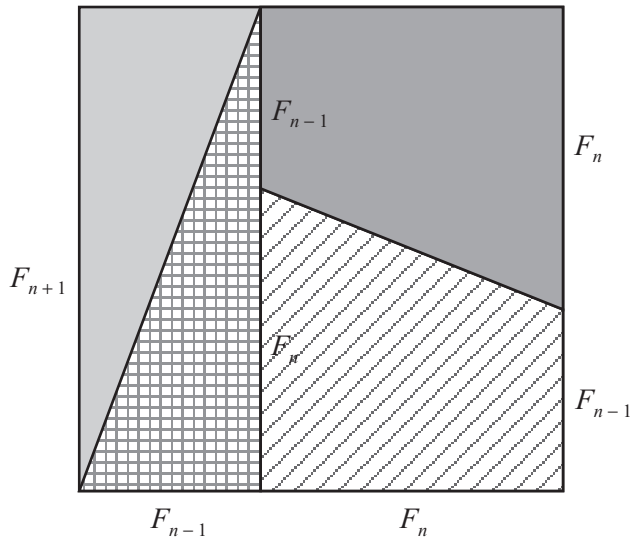
Budući da $\frac{1}{F_{n-1} F_n} \rightarrow 0$ za $n \rightarrow \infty$, vrijedi sljedeća aproksimacija:

$$F_n : F_{n-1} \approx F_{n+1} : F_n$$



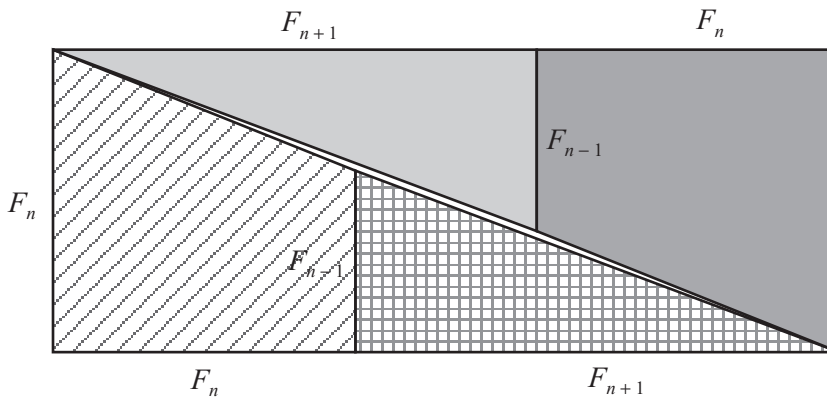
Slika 1.

No to znači da F_{n-1} i F_n dijele F_{n+1} u omjeru koji je aproksimacija zlatnoga reza (tj. za $n \rightarrow \infty$ omjeri $F_{n+1} : F_n$ teže prema omjeru zlatnoga reza). Preciznost te aproksimacije možemo geometrijski predstaviti na sljedeći način. Promotrimo kvadrat sa stranicom F_{n+1} , koji je uz pomoć F_n i F_{n-1} podijeljen na dva trapeza i dva trokuta, kao na sljedećoj slici:



Slika 2.

Presložimo trapeze i trokute u “pravokutnik s rupom R”, kao na sljedećoj slici (na njoj je rupa pozitivna, a može biti i negativna).



Slika 3.

Veličina “rupe R” u odnosu na cijeli pravokutnik geometrijski je predočenje greške koju činimo kada podjelu dužine F_{n+1} u omjeru zlatnoga reza zamijenimo podjelom $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Naime, iz formule s početka ovog odjeljka slijedi da površina “rupe R” ima stalno istu apsolutnu vrijednost $|(-1)^n| = 1$:

$$F_{n+1}^2 - F_n(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n.$$

Ona je sve manja u odnosu na sve veću površinu pravokutnika, $F_n F_{n+2}$.

7. Tajna Fibonaccijevog trika

Već smo stekli dovoljno znanja o Fibonaccijevim nizovima da možemo objasniti trik s početka članka. Po odabiru prva dva broja, u_0 i u_1 , sudionik konstruira daljnje brojeve poopćenog Fibonaccijevog niza, pa ih potom zbraja, što dovodi do sljedećeg rezultata:

$$\begin{array}{rcl} u_0 + \cancel{u_1} & = & \cancel{u_2} \\ u_1 + \cancel{u_2} & = & \cancel{u_3} \\ u_2 + \cancel{u_3} & = & \cancel{u_4} \\ \vdots & & \vdots \\ u_N + \cancel{u_{N+1}} & = & u_{N+2} \end{array} \Rightarrow \sum_{n=0}^N u_n = u_{N+2} - u_1$$

Uvedemo li pokratu $\sum_{n=0}^N u_n = \sum_N$ konačni rezultat možemo zapisati u obliku:

$$\sum_N = u_{N+2} - u_1$$

Odavde slijedi:

$$\sum_{4K+1} = u_{4K+3} - u_1 = u_0 F_{4K+2} + u_1 F_{4K+3} - u_1 =$$

(Tu smo primijenili (1) iz 5. odj.)

$$= u_0 F_{4K+2} + u_1 (F_{4K+3} - 1) = u_0 L_{2K+1} F_{2K+1} + u_1 L_{2K+1} F_{2K+2} =$$

(Tu smo primijenili (2) i (3) iz 5. odj.)

$$= L_{2K+1} (u_0 F_{2K+1} + u_1 F_{2K+2}) = L_{2K+1} u_{2K+2}$$

(Tu smo opet primijenili (1) iz 5. odj.)

Dakle, konačno smo dobili:

$$\sum_{4K+1} = L_{2K+1} u_{2K+2}$$

Za $K=2$ imamo:

$$\sum_{4K+1} = L_5 u_6 = 11u_6$$

(jer je $L_5 = 11$), a u tome je i cijela tajna Fibonaccijevog trika.

Teško je krivotvoriti podatke

THEODORE P. HILL

Stoljeće staro opažanje o razdiobi signifikantnih znamenaka danas pomaže u otkrivanju prijevара.

Ono što većina ljudi podrazumijeva pod pojmom slučajno, nasumce, bitno je drugačije od onog što prava slučajnost jest. Omiljeni primjer kojim se koristim u nastavi je podatak kojemu se intuicija protivi: od nasumce odabrane 23 osobe vjerojatnost da su barem dvije rođene istog datuma veća je od 50 %. Ozbiljniji primjer odnosi se na “negativno-pozitivna” medicinska testiranja. Pretpostavimo da je nasumce odabrana jedna osoba iz velike populacije u kojoj 1 % uzima drogu te da se primjenjuje 98 % pouzdan test na drogu (tj. da je za konzumenta droge test pozitivan u 98 % slučajeva, a za nekonzumenta test je negativan u 98 % slučajeva). U neku je ruku začuđujući podatak da ako je test na drogu *pozitivan*, svejedno je *dva puta vjerojatnije da testirana osoba ne uzima drogu* nego da je uzima. Slična iznenađenja vezana uz neočekivana svojstva pravih slučajnih podataka razlog su poteškoćama uspješnog stvaranja lažnih podataka.

Pogrešne percepcije slučajnosti

Da bih studentima koji počinju slušati kolegij o vjerojatnosti ukazao na pogrešne dojmove o slučajnosti, često im na prvom satu zadam zadaću. Mogu 200 puta bacati novčić i zabilježiti redom ishode ili mogu naprosto napisati ishode tobožnjih 200 bacanja novčića. Na sljedećem su satu zaprepašteni kad, nakon što bacim pogled na listu svakog od njih, korektno odvojim gotovo sve istinite podatke od krivotvorenih. Objašnjenje u ovom slučaju je da će se u stvarno slučajnom nizu od 200 bacanja novčića vrlo vjerojatno pojaviti serija od šest grbova ili šest pisama (nešto je složenije izračunati točnu vjerojatnost), no prosječna će ih osoba rijetko uključiti u svoje krivotvorene podatke.

To je samo jedan od primjera bogato dokumentiranog opažanja da većina ljudi ne može stvoriti zaista slučajne numeričke podatke. U studiji objavljenoj 1953. godine psiholog A. Chapanis opisuje pokus u kojem je od ispitanika traženo da za-

Poučak 2/3

pišu duge nizove brojeva (znamenaka od 0 do 9) slučajnim redoslijedom. Njegovi rezultati pokazuju da različiti pojedinci iskazuju značajnu sklonost prema nekim znamenkama, dok se parovi ili trojke znamenaka koje se ponavljaju poput 222, 333 izbjegavaju. Među trojkama najčešće su one gdje su sve znamenke međusobno različite, npr. 653 ili 231. Ta sklonost izbjegavanju dužih nizova istih znamenaka i uključivanju prevelikog broja alternacija, baš kao u pokusu sa studentima, potvrđena je u mnogim istraživanjima. Na to su nedavno u svojoj raspravi ukazali spoznajni psiholozi Gilovich, Vallone i Tversky (1985.) utvrdivši da "hot hand" u košarci (tj. situacija kad jedan igrač u jednoj utakmici pogađa svaki udarac, kad mu sve polazi za rukom) nije ništa drugo do najobičnija kriva predodžba, budući da se dugačke serije u stvarno slučajnim podacima pojavljuju mnogo češće nego što se to obično vjeruje.

Takva se kriva predodžba o slučajnim podacima može iskoristiti. U igri brojeva države Massachusetts igrači biraju četveroznamenasti broj, a zatim se slučajnim izborom (bilo mehanički bilo kompjutorski) izvlači četveroznamenasti broj. Na prvi će pogled mnogima izgledati da je svaki četveroznamenasti broj jednako dobar kao i bilo koji drugi, no kratko razmatranje otkrit će da brojeve kao 1776 ili 1960 ljudi biraju češće nego brojeve kao što su 7716 ili 9061. Budući da je vjerojatnost izvlačenja bilo kojega četveroznamenastog broja uvijek ista, poželjnije je birati one brojeve koje će izabrati mali broj ljudi jer u slučaju da budu izvučeni upravo ti brojevi dobitnici neće morati dijeliti dobitak s mnogo drugih osoba.

Statističar M. I. T.-a H. Chernoff je 1976. g. upotrijebio dotadašnje višegodišnje novinske izvještaje o izvučenim brojevima i isplatama igre brojeva da bi empirijski utvrdio listu brojeva s pozitivnom isplativošću.

(Njegov je članak iz 1981. sadržavao i proračun "problema istog rođendana" kojim pokazuje kako je vjerojatnost da se u 500 izvlačenja brojeva neće ponoviti jedan te isti četveroznamenasti broj otprilike 0.00003, dok se tome naprotiv u izvještaju lista *Boston Globe* o igri brojeva tvrdilo da se "kao što se i moglo očekivati" (jer ima 10 000 mogućih brojeva), nije dogodilo da se ponovio i jedan od prvih 500 slučajno izvučenih četveroznamenastih brojeva. No, naknadno je, u pismu uredniku, povjerenik Državne lutrije ispravio prvotni izvještaj ističući da je bilo nekoliko ponavljanja četveroznamenastih brojeva u relativno kratkoj povijesti te igre.)

Istiniti nasuprot krivotvorenim podacima

Ustanovljavanje jesu li stvarni numerički podaci bili krivotvoreni ili promijenjeni često je od presudne važnosti - u verificiranju eksperimentalnih znanstvenih podataka kao što su medicinska ispitivanja na osnovu kojih se donose bitne odluke, u podacima o stanovništvu koji pomažu određivanju političkih granica i vladine financijske pomoći, u poreznim prijavama koje podnose pojedinci i korporacije. Različite tehnike koje se upotrebljavaju u otkrivanju prevara ili krivotvorenja uključuju determinističke i statističke metode.

Primjer determinističke metode je analiza aproksimacija pri zaokruživanju brojeva. U članku o zaokruživanju postotaka u *Journal of the American Statistical Association* iz 1979. g., str. 363, statističari P. Diaconis i D. Freedman objavili su analizu numeričkih podataka iz jednog dobro poznatog izvještaja koji

bude sumnju da je autor manipulirao podacima kako bi postigao da mu zaokruživanje po retcima odgovara. Ovu sumnju nije teško potvrditi... Autor navodi da je među 335 promatranih slučajeva postotak brojeva s prvom ne-nul znamenkom 7 iznosio 5.5. No, jedini razlomci spojivi s postotkom 5.5 su 18/335, što zaokruženo iznosi 5.4 ili 19/335, što zaokruženo iznosi 5.7 postotaka. Nema ni jednog razlomka koji zaokruživanjem daje 5.5.

Ostatak tog članka usredotočen je na *statističke* metode za otkrivanje lažiranja podataka. Opća ideja na kojoj se takvi testovi zasnivaju prilično je jednostavna: ustanoviti svojstva skupova numeričkih podataka (određenih tipova) za koja je (a) vrlo vjerojatno da će se pojaviti kod istinskih skupova podataka toga tipa i (b) malo vjerojatno da će se pojaviti u krivotvorenim skupovima podataka toga tipa.

Ranije spomenuti primjer traženja nizova od “šest ili više ponavljanja istog ishoda” da bi se uočili krivotvoreni podaci u pokusu od 200 bacanja novčića upravo je takav test, a postoje i mnogi drugi testovi slični tomu. Jedan od novijih koji je u standardnoj upotrebi zasniva se na više od jednog stoljeća starom opažanju poznatom pod nazivom Benfordov zakon ili zakon o signifikantnim znamenkama.

Benfordov zakon

Zakon o signifikantnim znamenkama je empirijsko opažanje po kojem se u mnogim prirodno nastalim tabelama podataka vodeća signifikantna (ne-nul) znamenka ne pojavljuje jednoliko distribuirana među $\{1, 2, \dots, 9\}$ kao što bi se moglo očekivati, već se pokorava zakonitosti koja izražava vjerojatnost da se znamenka d pojavi kao prva:

$$P(\text{prva znamenka} = d) = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{d} \right), \quad d = 1, 2, \dots, 9.$$

Taj zakon (kojeg je izgleda prvi otkrio astronom i matematičar S. Newcomb 1881.) predviđa, dakle, da za nasumce odabrani broj vjerojatnost da je vodeća signifikantna znamenka 1 iznosi $\log_{10} 2 \approx 0.301$, vodeća signifikantna znamenka 2 pojaviti će se s vjerojatnošću $\log_{10} (3/2) \approx 0.176$ i tako dalje. Vjerojatnost za svaku sljedeću znamenku manja je od prethodne završavajući s vjerojatnošću 0.046 za vodeću znamenku 9. Odgovarajući je zakon za drugu kao i za sljedeće signifikantne znamenke, tj. njihova distribucija

$$P(D_1 = d_1, \dots, D_k = d_k) = \log_{10} \left| 1 + \left(\sum_{i=1}^k d_i \cdot 10^{k-i} \right)^{-1} \right|$$