O SUMIRANJU KVADRATNIH BROJEVA

ZVONIMIR ŠIKIĆ,
Zagreb

1. U jednom babilonskom tekstu (iz doba Seleukida) suma kvadrata predstavljena je u neuobičajenom obliku:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=1/3\,(1+2\,n)\,(1+2+\cdots+n). \tag{1}$$

U naše vrijeme ta se suma obično predstavlja u obliku:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=1/6\,(1+2\,n)\,(1+n)\,n. \tag{2}$$

Da su obje formule jednako valjane slijedi iz poznate jednakosti:

$$1+2+3+\cdots+n=1/2\,(1+n)\,n. \tag{3}$$

Kako to da se u babilonskom tekstu pojavljuje oblik (1)? Koje razmatranje dovodi baš do tog oblika? Zanimljivu rekonstrukciju, koja vodi na taj oblik, zahvaljujemo J. E. Hofmannu. Prije nego opišemo tu rekonstrukciju, navest ćemo dva razloga koji je čine zanimljivom.

a) Ta je rekonstrukcija izvedena u duhu pitagorejske aritmetike, za koju se smatra da je imala malo zajedničkog (?) sa babilonskom (numeričkom) aritmetikom.

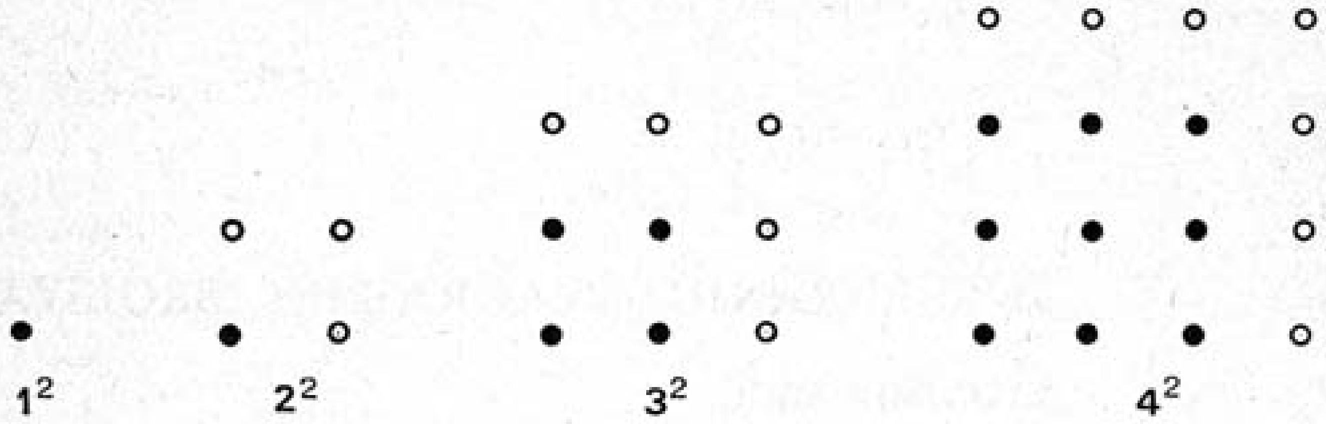
b) Formula (2) često se koristi u nastavi kao primjer na kojem se vježba metoda dokazivanja matematičkom indukcijom. Kako? **Dade** se ta formula, pa se potom traži da učenik (ili student) dokaže da je valjana. Onaj kome se formula **dade** često osjeća nedostatak metode kojom bi **došao** do te formule. Rekonstrukcija, koju ćemo opisati, pruža elementaran način da se **dođe** do te formule.

2. Svaki je broj mnoštvo sastavljeno od jedinica. Nih (jedinice) ćemo, na papiru, predstavljati malenim kružićima (pitagorejci su se služili kamenčićima — ψῆφοι). Poredamo li mnoštvo kružića, koje predstavlja jedan broj, u redove i stupce, koji tvore kvadrat, dobit ćemo „kvadrat kružića", koji predstavlja kvadratni broj (vidi sl. 1).

Svaki „kvadrat kružića" nastaje iz prethodnog dodavanjem jednog mnoštva kružića, koji su na slici nezatamnjeni, svijetli. Taj dodatak zove se gnomon[1]

[1] Gnomon je (izvorno) *kazaljka* sunčanog sata.

(γνῶμαι — prepoznati). Gnomoni koji se pojavljuju pri prelazu od prethodnog na slijedeći „kvadrat kružića“ (vidi sl. 1) predstavljaju neparne brojeve. Svaki



Slika 1

„kvadrat kružića“ dade se, dakle, razložiti na gnomone, koji predstavljaju neparne brojeve. Zapisano brojkama:

(4) $$1^2 = 1, \qquad 2^2 = 1 + 3, \qquad 3^2 = 1 + 3 + 5 \dots .$$

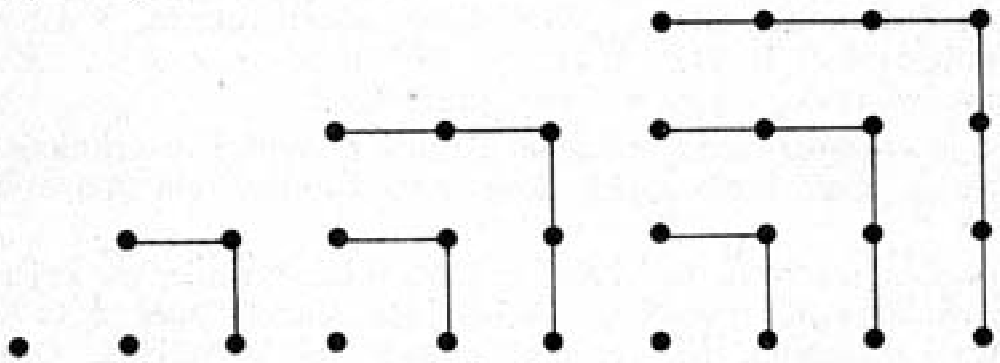
Općenito:

(5) $$n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1).$$

Čemu je jednaka suma prvih n kvadratnih brojeva?

(6) $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = ?$$

Do odgovora dolazimo tako da izbrojimo koliko kružića sadrži figura nastala nizanjem prvih n „kradrata kružića“. Ako se radi o prva 4 „kvadrata kružića“, figura izgleda ovako:

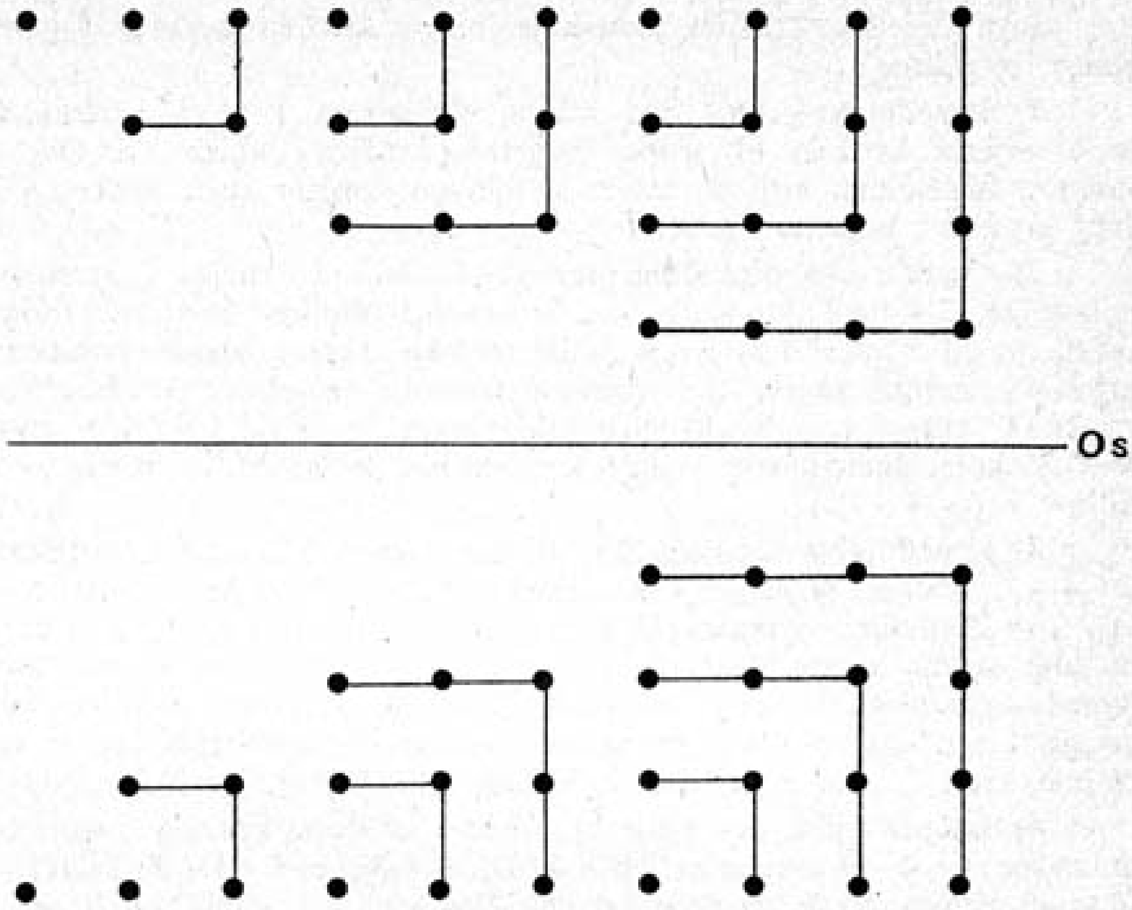


Slika 2

Treba naći uniformnu metodu izbrajanja kružića u figurama ovog tipa, nezavisnu od broja, u njoj nanizanih, „kvadrata kružića“. Ideja je da se početna figura nadopuni do pravokutnika, jer se broj kružića u „pravokutniku kružića“ lako nalazi. Prikazat ćemo kako se to radi na primjeru figure sa slike 2.

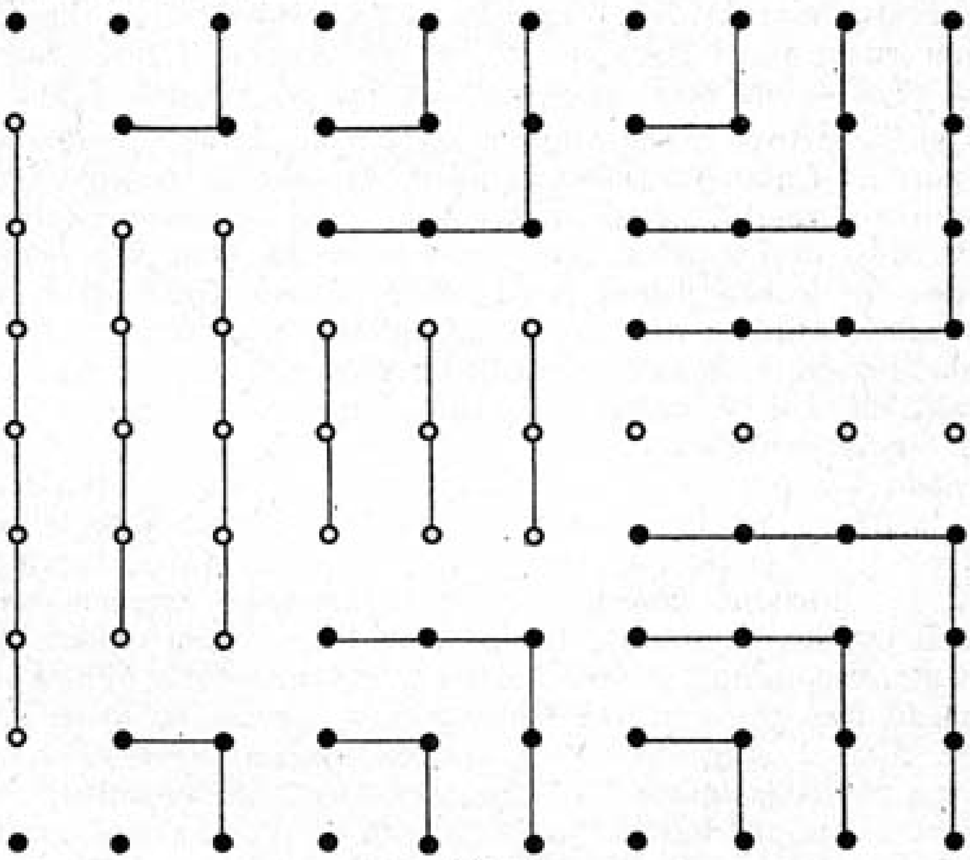
Zrcalimo figuru sa slike 2 na slijedeći način (vidi sl. 3).

Očito je da ova figura ima dvostruko više kružića od početne figure (slika 2). Svaki od „kvadrata kružića“, iz kojih su izgrađene ove figure, razložen je na svoje gnomone, što je na slikama naznačeno tako da su kružići pojedinog gnomona među sobom spojeni.



Slika 3

Ispunimo sada prazninu između početne figure i njene zrcalne slike svijetlim kružićima na slijedeći način:



Slika 4

Broj svijetlih kružića jednak je broju kružića početne figure (slika 2)! Kako to vidimo?

1) Između posljednja dva tamna „kvadrata kružića", stranice 4, nalaze se 4 svijetla kružića (4 stupca svijetlih kružića duljine 1). Oni odgovaraju tamnim kružićima, koji se nalaze u lijevom donjem kutu svakog od 4 „kvadrata kružića" početne figure.

2) Između dva prethodna tamna „kvadrata kružića", stranice $3=4-1$, nalaze se $3=4-1$ stupca svijetlih kružića duljine $3=1+2$ (duljina stupca prešla je od 1 na $1+2$, jer je sada na **obje** strane zrcala stranica „kvadrata kružića" manja za 1, tj. praznina između „kvadrata kružića" povećala se za 2). Ti stupci svijetlih kružića odgovaraju broju od $3=4-1$ gnomona veličine 3, koje nalazimo u svim „kvadratima kružića", osim u prvom (odatle njihov broj, $4-1$).

3) Između dva slijedeća (na lijevo) tamna „kvadrata kružića", stranice $2=4-2$, nalaze se $2=4-2$ stupca svijetlih kružića duljine $5=1+2\cdot 2=(1+2)+2$ (duljina stupca prešla je sada od $1+2$ na $(1+2)+2$, jer se opet na **obje** strane zrcala stranica „kvadrata kružića" smanjila za 1, tj. praznina između „kvadrata kružića" povećala se za 2). Ti stupci svijetlih kružića odgovaraju broju od $2=4-2$ gnomona veličine 5, koje nalazimo u svim „kvadratima kružića", osim u prva 2 (odatle njihov broj, $4-2$).

4) Između prva dva (slijeva) tamna „kvadrata kružića", stranice $1=4-3$, nalazi se $1=4-3$ stupac svijetlih kružića duljine $7=1+3\cdot 2=((1+2)+2)+2$ (duljina stupca prešla je sada od $(1+2)+2$ na $((1+2)+2)+2$, jer se opet na **obje** strane zrcala stranica „kvadrata kružića" smanjila za 1, tj. praznina između „kvadrata kružića" povećala se opet za 2). Taj stupac odgovara prvom gnomonu veličine 7, koji nalazimo samo u poslednjem „kvadratu kružića".

Svakom svijetlom kružiću odgovara točno jedan tamni kružić početne figure, a time su ujedno i iscrpljeni svi kružići početne figure. Slijedi, dakle, da figura sa slike 4 ima trostruko više kružića od početne figure (slika 2).

Jasno je da je ovo razmatranje nezavisno od broja „kvadrata kružića" koji grade početnu figuru (u našem primjeru 4). Ako je početna figura izgrađena od prvih n (tamnih) „kvadrata kružića", tada se nakon zrcaljenja figure, koje podvostručuje broj kružića, opet javlja praznina. Ona se popunjava svijetlim kružićima, čiji je broj jednak broju kružića početne figure. Kako to vidimo?

1) Između posljednja dva tamna „kvadrata kružića", stranice n, nalazi se n svijetlih kružića (n stupaca svijetlih kružića duljine 1). Oni odgovaraju tamnim kružićima, koji se nalaze u lijevom donjem kutu svakog od n „kvadrata kružića" početne figure.

2) Između dva prethodna tamna „kvadrata kružića", stranice $n-1$, nalazi se $n-1$ stupaca svijetlih kružića duljine $3=1+2$ (duljina stupaca prešla je od 1 na $1+2$, jer je sada na **obje** strane zrcala stranica „kvadrata kružića" manja za 1, tj. praznina između „kvadrata kružića" povećala se za 2). Ti stupci svijetlih kružića odgovaraju broju od $n-1$ gnomona veličine 3, koje nalazimo u svim „kvadratima kružića", osim u prvom (odatle njihov broj, $n-1$).

3) Između dva slijedeća (na lijevo) tamna „kvadrata kružića", stranice $n-2$, nalaze se $n-2$ stupca svijetlih kružića duljine $5=1+2\cdot 2=(1+2)+2$ (duljina stupca prešla je sada od $1+2$ na $(1+2)+2$, jer se opet na **obje** strane zrcala stranica „kvadrata kružića" smanjila za 1, tj. praznina između „kvadrata kružića" povećala za 2). Ti stupci svijetlih kružića odgovaraju broju od

$n-2$ gnomona veličine 5, koje nalazimo u svim „kvadratima kružića", osim u prva 2 (odatle njihov broj, $n-2$).

. . . .

. . . .

. . . .

n) Između prva dva (slijeva) tamna „kvadrata kružića", stranice $n-(n-1)=1$, nalazi se $n-(n-1)=1$ stupac svijetlih kružića duljine $2n-1=1+(n-1)\cdot 2$ (duljina stupca prešla je sada od $1+(n-2)\cdot 2$ na $1+(n-1)\cdot 2$, jer se opet na **obje** strane zrcala stranica „kvadrata kružića" smanjila za 1, tj. praznina između „kvadrata kružića" povećala se opet za 2). Taj stupac odgovara prvom gnomonu veličine $2n-1$, koji nalazimo samo u posljednjem (n-tom) „kvadratu kružića", tj. u svim „kvadratima kružića", osim u prvih $n-1$ (odatle njihov broj, $n-(n-1)$).

Ustanovili smo, dakle, da figura nastala nizanjem prvih n „kvadrata kružića" sadrži trostruko manje kružića od „pravokutnika kružića", koji nastaje zrcaljenjem početne figure i popunjavanjem nastale praznine svijetlim kružićima. Broj kružića u „pravokutniku kružića" lako se nalazi. On je jednak produktu broja kružića na bazi pravokutnika sa brojem kružića na njegovoj visini. Broj kružića na bazi pravokutnika jednak je sumi brojeva kružića na stranicama prvih n „kvadrata kružića", dakle:

$$1+2+3+\cdots+n.$$

Broj kružića na visini pravokutnika jednak je broju kružića na stranici n-tog „kvadrata kružića" i njenoj zrcalnoj slici, uz još 1 (svijetli) kružić, kojim je ispunjena praznina na zrcalnoj osi, dakle:

$$1+2n.$$

Broj kružića u „pravokutniku kružića" je, dakle:

$$(1+2n)(1+2+3+\cdots+n).$$

Oblik (1) je neposredna posljedica ovog zaključka.

Kučinić i dr.

IZ MATEMATIČKOG MOZAIKA

»Školska knjiga«, Zagreb, 1975, format 12×20, broširano, strana 240, cijena 100 dinara.

Sadržaj: 1. Ana Sliepčević: Fundamentalna grupa; 2. Stevan Šumić: Neki osnovni pojmovi iz teorije skupova i algebre; 3. Ksenija Horvatić: Primjena algebarske teorije polja na probleme konstruktivne geometrije; 4. Miroslav Filić: Što je linearno programiranje; 5. Miroslav Filić: Matematičko očekivanje i donošenje odluke; 6. Koraljka Terček: Slučajno pomicanje; 7. Miroslav Filić: Transportna metoda; 8. Koraljka Terček i Miroslav Filić: Degeneracija u transportnoj metodi; 9. Branko Kučinić: O modelima geometrija; 10. Zdravka Božikov i Vlasta Szirovicza: O geometrijskim konstrukcijama; 11. Boško Kojundžić i Radimir Viher: Numerička integracija; 12. Ivan Stanke: Rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi Gauss—Seidelovom metodom; 13. Kroacija Kučera: O pravčastim plohama; 14. Slavko Hozjan: Konstrukcija točaka prorodne krivulje dviju realnih ploha; 15. Milica Pansini i Josip Tadić: O Gaussovim eliminacijama i jednom načinu invertiranja matrice.
