

KRATKI PREGLED OSNOVNIH ZNANJA O REALNIM BROJEVIMA

Z. Šikic, Zagreb

Jedini primjereni način uvođenja realnih brojeva u srednjoškolskoj nastavi jest preko njihovih decimalnih zapisa. Do tih zapisa prirodno nas vodi postupak decimalnog mjerenja, koji je najjednostavnije objasniti na konkretnom primjeru mjerenja dužina.

U takvom pristupu, realni brojevi su naprosto **opci decimalni brojevi**, pod kojima mislimo na one s konačnim brojem decimala, ali i na one s beskonačnim brojem decimala. Primijetimo da matematičari samo one s konačnim brojem decimala zovu decimalnim brojevima, dok nematematičari najčešće i jedne i druge (dakle naše opće decimalne brojeve) zovu decimalnim brojevima.

Naravno, opći decimalni brojevi s konačno mnogo decimala ili pak s beskonačno mnogo decimala koje se periodički ponavljaju, racionalni su brojevi. S druge strane opći decimalni brojevi s beskonačno mnogo decimala koje se periodički ne ponavljaju, iracionalni su brojevi, pa je skup realnih brojeva zapravo unija racionalnih i iracionalnih.

U 1. i 2. odjeljku teksta koji slijedi, sistematski uvodimo sve ove pojmove na način koji držimo primjerenim srednjoškolskoj nastavi matematike. U 3. odjeljku uvodimo potpunost skupa realnih brojeva i iz nje izvodimo njegovu neprebrojivost, na način koji držimo primjerenim dodatnoj (naprednoj) nastavi.

1. SUMJERLJIVOST, RACIONALNI BROJEVI I DECIMALNO MJERENJE

Dužina a može se izmjeriti dužinom b , ako postoji dužina j koja cijeli broj puta ide u a i b . Tada je

$$a = nj \text{ i } b = mj \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

U tom slučaju kažemo da su dužine a i b *sumjerljive*, te da je dužina j njihova *zajednička mjera*.

Omjer dužina a i b tada je pozitivni *racionalni broj*

$$\frac{a}{b} = \frac{nj}{mj} = \frac{n}{m},$$

koji se zove mjernim brojem od a u odnosu na b . Taj broj izražava duljinu od a u odnosu na b kao jedinичnu dužinu. Naime $b/b = 1$. Često se piše i $a = n/m$, ako je iz konteksta jasno što je jedinичna dužina. Uočimo da se tada istom oznakom a koristimo i za dužinu i za njezin mjerni broj, tj. za njezinu duljinu.

Uobicajeni postupak mjerenja dužine a jedinичnom dužinom b (npr. metrom) jest *decimalno mjerenje*. Prvo se izmjeri koliko jedinичnih dužina b ide u dužinu a :

$$a = pb + r_1 \quad p \in N, \quad r_1 < b.$$

Zatim se ostatak r_1 mjeri 10 puta manjom dužinom $b/10$ (decimetrom):

$$r_1 = q_1 \frac{b}{10} + r_2 \quad q_1 \in D, \quad r_2 < r_1,$$

gdje D sadrži decimalne znamenke, tj. $D = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Zatim se r_2 mjeri 100 puta manjom dužinom $b/10^2$ (centimetrom):

$$r_2 = q_2 \frac{b}{10^2} + r_3 \quad q_2 \in D, \quad r_3 < r_2,$$

i tako dalje. Ako se takvo mjerenje završi u konacnom broju koraka k , rezultat je:

$$\begin{aligned} a &= pb + q_1 \frac{b}{10} + q_2 \frac{b}{10^2} + \dots + q_k \frac{b}{10^k} = \\ &= \left(p + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \dots + \frac{q_k}{10^k} \right) b. \end{aligned}$$

Drugim riječima, mjerni broj od a u odnosu na jedinичnu dužinu b je pozitivni *decimalni broj*

$$\frac{a}{b} = p + q_1 \frac{1}{10} + q_2 \frac{1}{10^2} + \dots + q_k \frac{1}{10^k}.$$

Decimalni zapis tog broja je

$$p_s p_{s-1} \dots p_1 p_0 \cdot q_1 q_2 \dots q_k,$$

gdje je $p_s p_{s-1} \dots p_1 p_0$ dekadski zapis prirodnoga broja p . Znamenke q_i iza decimalne točke zovu se decimale. Suprotan broj piše se sa znakom minus:

$$- p_s p_{s-1} \dots p_1 p_0 \cdot q_1 q_2 \dots q_k.$$

I on je decimalan broj. Ukratko, decimalni broj je onaj racionalni broj čiji decimalni zapis ima konačno mnogo decimala.

Primjer 1: Izmjerimo dužinu $a = 47j$ dužinom $b = 20j$, primijenjujući postupak decimalnog mjerenja. Omjer a/b zapišimo u decimalnom zapisu.

Rješenje:

$$47j = 2 \cdot 20j + 7j \quad (a = 2 \cdot b + r_1),$$

$$7j = 3 \cdot \frac{20j}{10} + 1j \quad (r_1 = 3 \cdot \frac{b}{10} + r_2),$$

$$1j = 5 \cdot \frac{20j}{10^2} \quad (r_2 = 5 \cdot \frac{b}{10^2}).$$

To možemo zapisati i ovako:

$$47j = 2 \cdot 20j + 7j$$

$$70j = 3 \cdot 20j + 10j,$$

$$100j = 5 \cdot 20j,$$

Ili još jednostavnije ovako:

$$\frac{47}{20} = 2 + \frac{7}{20},$$

$$\frac{70}{20} = 3 + \frac{10}{20},$$

$$\frac{100}{20} = 5.$$

Iz jednostavnijeg desnog zapisa odmah uočavamo da je riječ o standardnom pismenom dijeljenju:

$$47 : 20 = 2.35$$

$$70$$

$$100$$

Ukratko

$$\frac{a}{b} = \frac{47j}{20j} = 47 : 20 = 2.35.$$

Decimalni brojevi samo su dio racionalnih brojeva, jer primjenom decimalnog mjerenja mnoge dužine a nije moguće izmjeriti jedinicom dužinom b , čak ako su a i b sumjerljive dužine. Na primjer, $a = 7j$ i $b = 3j$ sumjerljive su dužine, ali postupak decimalnog mjerenja dužine a jedinicom dužinom b nikad se ne završava:

$$\frac{a}{b} = \frac{7j}{3j} = \frac{7}{3} = 2.333\dots = 2.\overline{3}$$

Slično je

$$5 : 6 = 0.833\dots = 0.8\overline{3}$$

ili

$$4 : 33 = 0.1212\dots = 0.1\overline{2}$$

Iz prethodnih razmatranja očito je da racionalni broj x koji nije decimalan ima decimalni zapis s beskonacno mnogo decimala koje se periodički ponavljaju:

$$x = p_s p_{s-1} \dots p_1 p_0 \cdot q_1 \dots q_{j-1} \overline{q_j \dots q_k} \cdot$$

Dakle, decimalni zapis racionalnog broja ima konačno mnogo decimala ili ima beskonacno mnogo decimala koje se periodički ponavljaju. U prvom slučaju riječ je o decimalnom broju, dok je u drugom slučaju riječ o *opcem decimalnom broju* s beskonacno mnogo decimala koje se periodički ponavljaju.

Decimalni zapis broja posebno je pogodan jer se u njemu brojevi lako uspoređuju, a lako se izvode i osnovne računске operacije.

2. NESUMJERLJIVOST, DECIMALNO MJERENJE I IRACIONALNI BROJEVI

Racionalni brojevi gusto su raspoređeni po brojevnom pravcu, ali ga ipak potpuno ne ispunjavaju. Mnogo je tocaka čija se udaljenost od ishodišta ne može izmjeriti jedinicom dužinom tako da rezultat mjerenja bude racionalan broj. Drugim riječima, mnoge dužine nisu sumjerljive s jedinicom dužinom. To možemo dokazati na sljedeći način.

Uocimo najprije jedno karakteristično svojstvo sumjerljivih dužina a i b . Neka je, na primjer, $a = 12j$ i $b = 5j$, što znači da je $a/b = 12/5$. Tada uzastopno oduzimanje dužina, koje počinje s a i b , završava u konačno mnogo koraka:

$$12j - 5j = 7j, \quad 7j - 5j = 2j, \quad 5j - 2j = 3j$$

$$3j - 2j = 1j, \quad 2j - 1j = 1j, \quad 1j - 1j = 0j.$$

Ocito je da to vrijedi za svaki par sumjerljivih dužina a i b . Dakle, ako takvo uzastopno oduzimanje, koje počinje s a i b , nikada ne završava, onda to znači da a i b nisu sumjerljive dužine. Pitagorovci su najvjerojatnije na taj način dokazali da stranica i dijagonala kvadrata nisu sumjerljive.

Naime, prvo oduzimanje stranice \overline{AB} od dijagonale \overline{AC} daje

$$\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{DC}.$$

Trokut CDE je jednakokracaan, pa je $\overline{DC} = \overline{DE}$. Trokuti AEB i AED su sukladni, pa je $\overline{DE} = \overline{BE}$. Dakle, $\overline{DC} = \overline{BE}$ pa drugo oduzimanje daje

$$\overline{AB} - \overline{DC} = \overline{BC} - \overline{BE} = \overline{EC}.$$

Slijedece oduzimanje opet je oduzimanje stranice kvadrata \overline{DC} od njegove dijagonale \overline{EC} . Ono se u smanjenom mjerilu ponavlja na isti nacin te vodi na sljedeci još manji kvadrat, u kojem se opet ponavlja isti postupak i tako dalje, bez kraja. Dakle, dijagonala kvadrata nije sumjerljiva s njegovom stranicom. To izricemo i tako da kažemo kako tocka brojevnoga pravca, oznacena s $\sqrt{2}$ nije racionalna.

Može se dokazati da ni tocke oznacene sa $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots$ takoder nisu racionalne.

Primjer 2. Dokažimo da je \sqrt{n} , $n \in \mathbb{N}$, racionalan broj samo ako je $n = m^2$, $m \in \mathbb{N}$. Dakle, racionalni su samo $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4, \dots$

Rješenje: Ako je $\sqrt{n} = p/q$, tj. $n = p^2/q^2$, onda je q^2 djelitelj od p^2 . To je moguće samo ako je q djelitelj od p . (Naime, ako q ima prosti faktor koji nije faktor od p onda taj faktor nije ni faktor od p^2 .) Budući da je q djelitelj od p slijedi da je $p/q = m \in \mathbb{N}$, što znači da je $n = p^2/q^2 = m^2$, $m \in \mathbb{N}$. Dakle, racionalni su samo $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4, \dots$

Zadatak 1. Dokažite da je $\sqrt[k]{n}$, $n \in \mathbb{N}$, racionalan broj samo ako je $n = m^k$, $m \in \mathbb{N}$. (Uputa: Dokaz je doslovno jednak onome u primjeru 2 ako se 2 korijen svugdje zamijeni sa k -tim korijenom, a 2 potencija s k -tom potencijom.)

Mnoge dužine ne mogu se izmjeriti jedinicom dužinom j tako da rezultat mjerenja bude racionalan broj. Međutim, svaku dužinu a možemo sve točnije mjeriti jedinicom dužinom j primijenjujući postupak decimalnog mjerenja. Prvo se izmjeri koliko jedinичnih dužina ide u a :

$$a = pj + r_1 \qquad p \in \mathbb{N}, \quad r_1 < j.$$

Zatim se ostatak r_1 mjeri 10 puta manjom dužinom $j/10$:

$$r_1 = q_1 \frac{j}{10} + r_2 \qquad q_1 \in D, \quad r_2 < r_1,$$

gdje je $D = \{0, 1, \dots, 9\}$. Potom se r_2 mjeri 100 puta manjom dužinom $j/10^2$:

$$r_2 = q_2 \frac{j}{10^2} + r_3 \qquad q_2 \in D, \quad r_3 < r_2,$$

i tako dalje. Ako je dužina a nesumjerljiva sa j postupak će se nastavljati bez kraja, pa slijedi da je

$$a = pj + q_1 \frac{j}{10} + q_2 \frac{j}{10^2} + q_3 \frac{j}{10^3} + \dots =$$

$$= (p + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \frac{q_3}{10^3} + \dots)j.$$

Drugim riječima, mjerni broj od a može se izraziti kao suma od beskonacno mnogo pribrojnika:

$$a = p + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \frac{q_3}{10^3} + \dots$$

Nju zovemo *opcim decimalnim brojem* (s beskonacno mnogo decimala) i krace je zapisujemo

$$p_s p_{s-1} \dots p_1 p_0 . q_1 q_2 q_3 \dots,$$

gdje je $p_s p_{s-1} \dots p_1 p_0$ dekadski zapis prirodnog broja p , a iza decimalne tocke nalazi se beskonacno mnogo decimala $q_1 q_2 q_3 \dots$. Tu sumu ne možemo izracunati do kraja, ali što je dalje racunamo to se više približavamo točnoj vrijednosti od a . Ako sa a_n oznacimo decimalni broj

$$a_n = p_s \dots p_0 . q_1 \dots q_n,$$

koji se dobiva nakon zadnjeg mjerenja s $1/10^n$, odmah uocavamo da je

$$0 < a - a_n < \frac{1}{10^n},$$

tj. decimalni broj a_n aproksimira opci decimalni broj a s točnošcu $1/10^n$ (kaže se još da je broj a aproksimiran s a_n na n decimala).

Upravo opisani opci decimalni brojevi, koji su mjere dužina nesumjerljivih s jedinicom dužinom, i njima suprotni brojevi (ispred kojih stoji minus) zovu se *iracionalni brojevi*. Skup iracionalnih brojeva I i skup racionalnih brojeva Q zajedno cine skup realnih brojeva R . Dakle, $R = Q \cup I$ i $Q \cap I = \emptyset$.

Ako je udaljenost tocke brojevnoga pravca od ishodišta sumjerljiva s jedinicom dužinom, onda je toj tocki pridružen broj iz Q , a ako ona nije sumjerljiva s jedinicom

dužinom, onda je toj točki pridružen broj iz I. Dakle, svakoj točki brojevnog pravca pridružen je jedan broj iz R. Pravac je potpuno popunjen realnim brojevima.

Iz prethodnih razmatranja zaključujemo da za svaki realni broj (tj. za svaki opći decimalni broj) vrijedi jedna od tri alternative:

- (1a) Broj je racionalan i ima decimalni zapis s konačno mnogo decimala.
- (1b) Broj je racionalan i ima decimalni zapis s beskonačno mnogo decimala, koje se periodički ponavljaju.
- (2) Broj je iracionalan i ima decimalni zapis s beskonačno mnogo decimala koje se periodički ne ponavljaju.

Na primjer,

$$\frac{3}{20} = 0.15, \quad \frac{9}{11} = 0.81818181 \dots = 0.\overline{81}$$

$$\sqrt{2} = 1.41421\dots \text{ (bez periodičkih ponavljanja).}$$

Primjer 3. Iracionalni broj $\sqrt{2}$ izračunajmo na pet decimala.

Rješenje:	$1^2 < 2 < 2^2$	$1.411^2 < 2$
	$1.1^2 < 2$	$1.412^2 < 2$
	$1.2^2 < 2$	$1.413^2 < 2$
	$1.3^2 < 2$	$1.414^2 < 2 < 1.415^2$
	$1.4^2 < 2 < 1.5^2$	$1.4141^2 < 2$
	$1.41^2 < 2 < 1.42^2$	$1.4142^2 < 2 < 1.4143^2$
		$1.41421^2 < 2 < 1.41422^2$

Dakle, $\sqrt{2} \approx 1.41421$.

Zadatak 2. Izračunajte $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ i $\sqrt[3]{4}$ na tri decimale.

3. POTPUNOST I NEPREBROJIVOST SKUPA REALNIH BROJEVA

Poput racionalnih brojeva i realni su brojevi (kao njihov nadskup) gusto raspoređeni po brojevnom pravcu. Međutim, oni su i potpuno raspoređeni po brojevnom pravcu, tj. sve točke brojevnog pravca pokrivene su realnim brojevima.

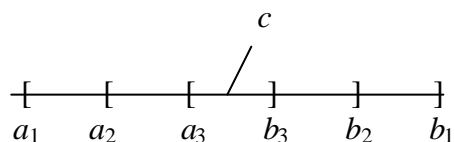
Potpunost skupa realnih brojeva može se iskazati i na sljedeći način:

POTPUNOST SKUPA REALNIH BROJEVA

Ako je

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \dots$$

beskonacni niz međusobno uklopljenih segmenata onda postoji broj c koji je sadržan u svim tim segmentima.



Da skup racionalnih brojeva nije potpun pokazuje nam primjer 3. Tamo smo konstruirali niz uklopljenih segmenata s racionalnim rubovima

$$[1, 2] \supseteq [1.4, 1.5] \supseteq [1.41, 1.42] \supseteq [1.414, 1.415] \supseteq \dots$$

za koji ne postoji racionalni broj c sadržan u svim tim segmentima. Naime, u svim tim segmentima sadržan je samo iracionalni broj $\sqrt{2}$.

Svojstvo potpunosti temeljno je svojstvo kojim se skup realnih brojeva bitno razlikuje od skupa racionalnih brojeva. Zbog tog svojstva realnih brojeva ima puno više nego racionalnih. Naime, oba su skupa beskonacni, ali \mathbb{Q} je prebrojiv dok \mathbb{R} nije prebrojiv. To znaci da se elementi od \mathbb{Q} mogu svrstati u niz, dok se elementi od \mathbb{R} ne mogu. Dakle, nijedan niz realnih brojeva ne može obuhvatiti sve realne brojeve. Tu važnu posljedicu potpunosti realnih brojeva sada ćemo i dokazati.

Za bilo koji niz realnih brojeva

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

dokazat ćemo da on ne obuhvaća sve realne brojeve. Odaberimo najprije segment I_1 koji ne sadrži a_1 . Zatim odaberimo njegov podsegment I_2 koji ne sadrži a_2 . Potom njegov podsegment I_3 koji ne sadrži a_3 i tako dalje.

Tako nastaje uklopljeni niz segmenata

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$$

Zbog potpunosti skupa realnih brojeva postoji realni broj a koji je sadržan u svim segmentima I_n . Budući da za svaki n vrijedi $a_n \notin I_n$, slijedi da je $a \neq a_n$ za svaki n . Dakle, niz a_1, a_2, \dots ne obuhvata sve realne brojeve što smo i htjeli dokazati.