111. U spremniku volumena 2 m^3 nalazi se, pod tlakom 5 bar i na temperaturi 260 °C, idealni plin molarnog toplinskog kapaciteta C_{mp} = 29,12 kJ/(kmol K).

a) Koliko bi se rada dobilo, kad bi se taj plin povratnim promjenama stanja doveo u toplinsku i mehaničku ravnotežu s okolišem stanja 1 bar i 7 °C?

b) Koliko se rada dobije, ako umjesto povratnog procesa, plin izentropski ekspandira do okolišnog tlaka, a potom se pri stalnom tlaku hladi do okolišne temperature, predajući toplinu okolišu?

Obadva procesa skicirati u zajedničkom p,V- i T,s-dijagramu!

*** Rješenje:

(Svrha zadatka: Pokazati osnovne odnose pri usporedbi povratnog i nepovratnog procesa. Objasniti osnove crtanja takvih procesa u dijagramu.)

Zadano:
$V = 2$ m^3;
$p_1 = 5$ bar;
$\vartheta_1 = 260$ °C;
$C_p = 29{,}12$ kJ/(kmol K);
$p_o = 1$ bar;
$\vartheta_{ok} = 7$ °C;

Zadani izolirani sustav (plin + okoliš) očito nije ni u toplinskoj, ni u mehaničkoj ravnoteži, pa se iz njega teoretski može dobiti rad. Da bi se dobilo **najviše** rada, proces bi morao teći povratno (jer je takav najbolji), a konačno bi stanje plina moralo biti i u toplinskoj i u mehaničkoj ravnoteži s okolišem, jer to znači da je sustav potpuno iscrpljen.

Rad se iz ovog sustava može dobiti i onda kad nisu ispunjena oba spomenuta uvjeta, ali, naravno, manje od maksimalnog iznosa.

Kao ravnotežne promjene stanja u obzir dolaze samo:

1) izentropa, koja je ravnotežna i kod koje nema nepovratnosti zbog izmjene topline (jer i nema izmjene topline) i
2) izoterma na temperaturi okoliša, koja je također ravnotežna, i pri kojoj je izmjena topline povratna zato što oba sudionika izmjene topline (plin i okoliš) imaju **istu temperaturu**.

Vrsta plina *nije poznata*, pa ćemo dalje računati s količinom plina, koja je određena početnim volumenom i iznosi:

$$N = \frac{p_1 V_1}{R_m T_1} = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 2}{8314 \cdot 533{,}15} = 0{,}2256 \text{ kmol},$$

a njegovi molarni toplinski kapaciteti:

C_{mp} = 29,12 kJ/(kmol K); C_{mv} = 20,806 kJ/(kmol K); κ = 1,3996 ≅ 1,40.

a) <u>Povratan proces do toplinske i mehaničke ravnoteže plina s okolišem:</u>

Rad koji se dobije u takvu povratnom procesu računat ćemo s pomoću formule:

$$W_{max} = N\left[U_{m,1} - U_{m,o} - T_{ok}\left(S_{m,1} - S_{m,o}\right) + p_{ok}\left(V_{m,1} - V_{m,o}\right)\right].$$

Pojedini članovi u njoj su:

$$U_{m,1} - U_{m,o} = C_{mv}\left(\vartheta_1 - \vartheta_o\right) = 20{,}806 \cdot (260 - 7) = 5264 \text{ kJ/kmol};$$

$$-T_{ok}\left(S_{m,1} - S_{m,o}\right) = -T_{ok}\left(C_{mp} \ln\frac{T_1}{T_o} - R_m \ln\frac{p_1}{p_o}\right) =$$

$$= -280{,}15 \cdot \left(29{,}12 \cdot \ln\frac{533{,}15}{280{,}15} - 8{,}314 \cdot \ln\frac{5}{1}\right) = -1501 \text{ kJ/kmol};$$

a s molnim volumenima početnog i konačnog stanja

$$V_{\mathrm{m},1} = \frac{R_\mathrm{m}\, T_1}{p_1} = \frac{8314 \cdot 533{,}15}{5 \cdot 10^5} = 8{,}865 \ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kmol}}$$

i $$V_{\mathrm{m,o}} = \frac{R_\mathrm{m}\, T_\mathrm{ok}}{p_\mathrm{ok}} = \frac{8314 \cdot 280{,}15}{1 \cdot 10^5} = 23{,}292 \ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kmol}}$$

može se izračunati i rad potiskivanja okoliša:

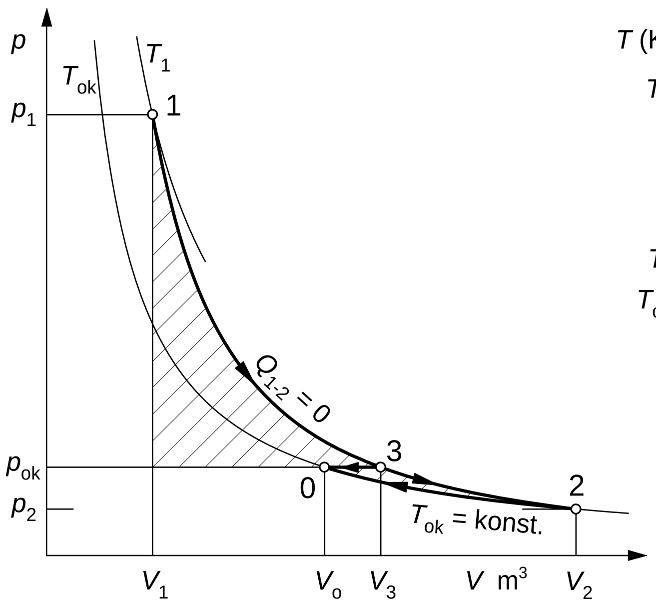
$$p_\mathrm{ok}\left(V_{\mathrm{m},1} - V_{\mathrm{m,o}}\right) = 1 \cdot 10^2 \cdot \left(8{,}865 - 23{,}292\right) = -1443 \ \mathrm{kJ/kmol}\,.$$

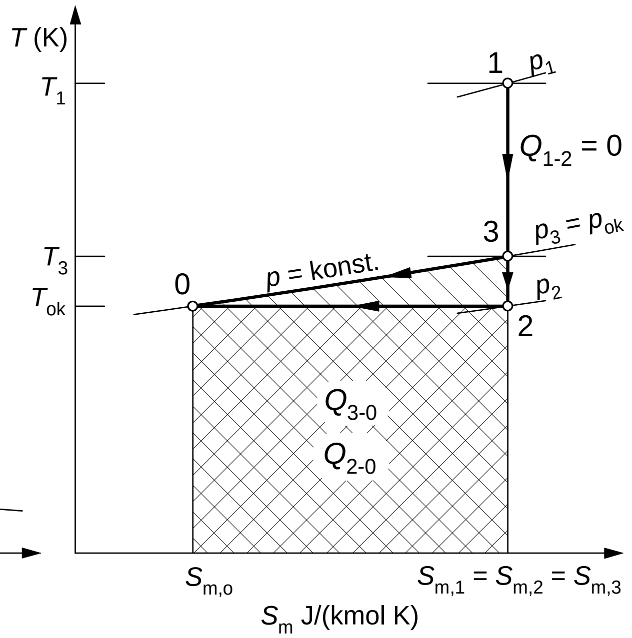
Maksimalni je rad onda:

$$W_\mathrm{max} = 0{,}2256 \cdot \left[5264 - 1501 - 1443\right] = 523{,}5 \ \mathrm{kJ}$$

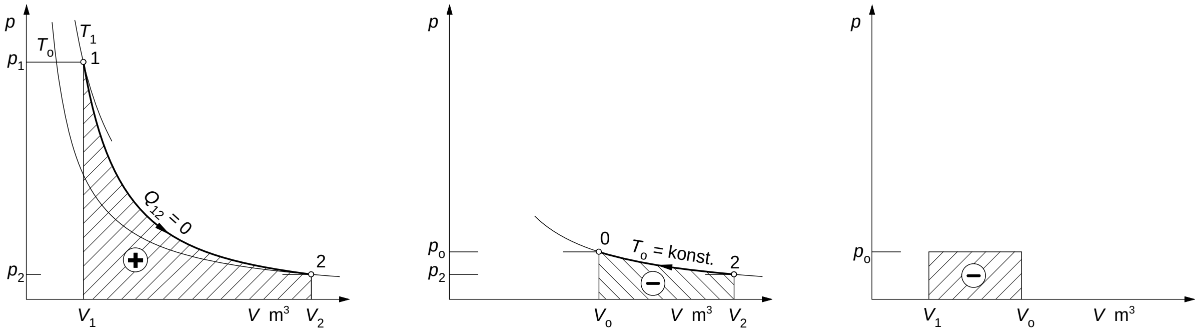
i to je najveći rad koji bi se teoretski mogao dobiti iz ovog sustava na račun njegove početne neravoteže.

Proces se može prikazati u p,V- i T,s-dijagramu, a sastoji se od izentropske ekspanzije **1 – 2** do okolišne temperature, i izotermne kompresije **2 – 0** do okolišnog tlaka:





Budući da plin ima temperaturu višu od okolišne, prvo mu treba izentropskom ekspanzijom smanjiti temperaturu do T_ok. Kako mu pritom tlak padne na prenisku vrijednost ($p_2 < p_\mathrm{ok}$), od točke 2 treba izotermnom kompresijom tlak povećati na vrijednost p_ok. Pri ekspanziji plin daje rad, a za kompresiju ga troši. No, kako je konačni volumen **veći od početnog**, za širenje plina (u cjelini) troši se rad potiskivanja okoliša. Kao ukupni rezultat dobije se površina šrafirana



gore u p,v-dijagramu, kao rezultat zbrajanja triju površina:

Iako je izvod za rad povratnog procesa potpuno općenit (temelji se samo na primjeni prvog i drugoga glavnog stavka i ne propisuje kakve moraju biti konkretne promjene stanja osim da moraju biti povratne), usporedba članova u jednadžbi s gornjim trima skicama daje zanimljiv zaključak: prvi član ($U_{m,1} - U_{m,2}$) može se protumačiti kao **rad izentrope** (jer znamo da se kod izentrope rad dobije iz unutarnje energije tvari), drugi član predstavlja **toplinu izmijenjenu pri stalnoj temperaturi** T_{ok}, a to je za idealni plin ujedno i **rad izotermne promjene stanja**, dok je treći član očito (tako je i definiran u izvodu) **rad potiskivanja okoliša**. Tako svaki član jednadžbe dobiva grafički prikaz, i vidi se da površine u tim dijagramima svojom veličinom i predznakom stvarno odgovaraju brojčanim vrijednostima dotičnih članova!

c) Izentropska ekspanzija do okolišnog tlaka i izobarno hlađenje plina do okolišne temperature

Pri izentropskoj ekspanziji do okolišnog tlaka, temperatura i volumen poprimaju vrijednost:

$$T_3 = T_1 \left(\frac{p_3}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = T_1 \left(\frac{p_{ok}}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 533{,}15 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1{,}3996-1}{1{,}3996}} = 336{,}73 \text{ K} \,(\,63{,}58 \text{ °C});$$

$$V_3 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_3}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = V_1 \left(\frac{p_1}{p_{ok}}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = 2 \cdot \left(\frac{5}{1}\right)^{\frac{1}{1{,}3996}} = 6{,}316 \text{ m}^3;$$

Pri izentropskoj ekspanziji do okolišnog tlaka plin izvrši rad:

$$W_{1-3} = N\,C_{mv}\,T_1 \left[1 - \left(\frac{p_{ok}}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right] = 0{,}2256 \cdot 20{,}806 \cdot 533{,}15 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1{,}3996-1}{1{,}3996}}\right] = 921{,}9 \text{ kJ},$$

ali se od toga za potiskivanje okoliša potroši:

$$W_{ok,1-3} = p_{ok}\left(V_1 - V_3\right) = 1 \cdot 10^2 \cdot \left(2 - 6{,}316\right) = -431{,}6 \text{ kJ},$$

tako da ostaje koristan rad:

$$W_{kor,1-3} = W_{1-3} + W_{ok,1-3} = 921{,}9 - 431{,}6 = 490{,}3 \text{ kJ},$$

Taj je rad manji od W_{max} = 523,5 kJ, iako je izentropska ekspanzija **povratna**, zato što stanje **“3” nije u ravnoteži s okolišem!**

Nastavimo li proces izobarnim hlađenjem do okolišne temperature, plin će doći u ravnotežu s okolišem. No, pri tom hlađenju **ne dobije se nikakav koristan rad**, jer je $p = p_{ok}$! Naime,

$$W_{kor,3-0} = W_{3-0} + W_{ok,3-0} = p\left(V_3 - V_0\right) + p_{ok}\left(V_0 - V_3\right) = 0,$$

tako da se u **cijelom** procesu **1 - 3 - 0** dobije **koristan rad**:

$$W_{kor,1-3-0} = W_{kor,1-3} + W_{kor,3-0} = 490{,}3 + 0 = 490{,}3 \text{ kJ},$$

što je za 523,5 - 490,3 = 33,2 kJ **manje**! Tu razliku možemo pripisati (lošem) načinu vođenja procesa **1 - 3 - 0** i nazivamo je “**gubitak rada**” zbog **nepovratnosti** procesa **1 - 3 - 0** (ustvari, nepovratan je **samo dio procesa 3 - 0** (izobarno hlađenje plina), kad se toplina izmjenjuje između **toplijeg plina** i **hladnijeg okoliša**!).

Gubitak rada zbog nepovratnosti procesa 1 - 3 - 0:

Taj gubitak rada već je gore deklariran i izračunat:

$$\Delta W = W_{pov} - W_{nep} = W_{max} - W_{kor,1-3-0} = 523{,}5 - 490{,}3 = 33{,}2 \text{ kJ},$$

ali se može izračunati na još dva načina, ali za to moramo izračunati još neke veličine.
Pri izobarnom hlađenju od T_3 do T_{ok} plin predaje (okolišu) toplinu:

$$Q_{3-0} = N\,C_{\mathrm{m}p}\left(T_{\mathrm{ok}} - T_3\right) = 0{,}2256 \cdot 29{,}12 \cdot \left(280{,}15 - 336{,}73\right) = -371{,}7 \ \mathrm{kJ}\,,$$

dok je u povratnom procesu plin predao (okolišu) samo:

$$Q_{2\text{-}0} = -N\,T_{\mathrm{ok}}\left(S_{\mathrm{m,1}} - S_{\mathrm{m,o}}\right) = -0{,}2256 \cdot 1501 = -338{,}6 \ \mathrm{kJ/kmol} \quad \text{topline.}$$

Tako je u **nepovratnom** procesu okoliš **primio** 371,7 kJ topline, a to je opet za ΔW **više** nego u povratnom procesu (338,6 kJ) – mala greška je nastala zbog zaokruživanja!):

$$\Delta W = \left(Q_{\mathrm{ok}}\right)_{\mathrm{nep}} - \left(Q_{\mathrm{ok}}\right)_{\mathrm{pov}} = -Q_{3-0} - \left(-Q_{2-0}\right) = 371{,}7 - 338{,}6 = 33{,}1 \ \mathrm{kJ}\,!$$

Treći način računanja gubitka rada zbog nepovratnosti uobičajeni je postupak računanja prirasta entropije izoliranog sustava u **nepovratnom** procesu. Budući da je izentropska ekspanzija plina **povratan** proces, nju ćemo preskočiti (ionako bi dala rezultat "**0**"!) i računat ćemo samo prirast entropije izoliranog sustava pri izobarnom hlađenju.

Izolirani se sustav sastoji od **dva sudionika: plina i okoliša** (to znamo već od samog početka zadatka!).

Promjena (smanjenje) entropije plina od stanja "**3**" ($p_3 = p_{\mathrm{ok}}$, T_3) do stanja "**0**" (p_{ok}, T_{ok}) iznosi:

$$S_{\mathrm{o}} - S_3 = N\left(C_{\mathrm{m}p}\ln\frac{T_{\mathrm{ok}}}{T_3} - R_{\mathrm{m}}\ln\frac{p_{\mathrm{ok}}}{p_3}\right) = 0{,}2256 \cdot \left(29{,}12 \cdot \ln\frac{280{,}15}{336{,}73}\right) = -1{,}2086 \ \mathrm{kJ/K}\,,$$

a zbog primljene topline okolišu se entropija poveća za

$$\Delta S_{\mathrm{ok,nep}} = \frac{\left(Q_{\mathrm{ok}}\right)_{\mathrm{nep}}}{T_{\mathrm{ok}}} = \frac{-Q_{3-0}}{T_{\mathrm{ok}}} = \frac{+371{,}7}{280{,}15} = +1{,}3269 \ \mathrm{kJ/K}\,,$$

tako da je prirast entropije izoliranog sustava:

$$\left(\Delta S_{\mathrm{i.s.}}\right)_{\mathrm{nep}} = \left(S_{\mathrm{o}} - S_3\right) + \Delta S_{\mathrm{ok,nep}} = -1{,}2086 + 1{,}3269 = +0{,}1183 \ \mathrm{kJ/K}$$

i gubitak rada:

$$\Delta W = T_{\mathrm{ok}}\left(\Delta S_{\mathrm{i.s.}}\right)_{\mathrm{nep}} = 280{,}15 \cdot 0{,}1183 = 33{,}15 \ \mathrm{kJ}\,,$$

dakle, isto kao gore! (Pa drugo nije bilo ni za očekivati, zar ne?)

U ovom je zadatku bilo jednostavno izračunati gubitak rada na sva tri načina, jer smo veličine koje su se odnosile na povratni proces, a i one za nepovratni već ranije izračunali, pa su se jednostavno mogle izračunati razlike radova ili razlike toplina. Inače obično imamo podatke samo za nepovratne procese, a onda je lakše izračunati prirast entropije izoliranog sustava i gubitak rada preko njega, nego dodatno računati rad ili toplinu u povratnom procesu (katkada je to vrlo teško ili čak nemoguće za neki nepovratan proces naći **povratnu inačicu**!). ☺

113. Kompresor tlači 300 kg/h dušika okolišnog stanja 1 bar i 15 °C politropski na 6 bar i 160 °C, pri čemu se toplinski tok predaje okolišu.

a) Koliko snage treba dovoditi za pogon kompresora?

b) Kolika bi bila najmanja snaga potrebna da se struja dušika istog početnog stanja dovede u isto konačno stanje?

Obadva procesa skicirati u istom p,v- i T,s-dijagramu!

*** Rješenje:

(Svrha zadatka: Pokazati da stvarni procesi koji troše snagu za svoje odvijanje, troše više snage no što je teoretski nužno. Kod otvorenih sustava ta razlika snage nije velika, jer kod njih je značajan dio snage rezultat radova utiskivanja i istiskivanja, a ne samo vrste promjene stanja između usisa i ispuha.)

Zadano:
$q_m = 300$ kg/h;
$p_{ok} = 1$ bar;
$\vartheta_{ok} = 15$ °C;
$p_1 = 6$ bar;
$\vartheta_1 = 160$ °C;

Svojstva dušika:(iz Topl. tablica, str. 1 : $c_p = 1{,}043$ kJ/(kg K)):

$c_v = 0{,}7462$ kJ/(kg K); $R = 0{,}2968$ kJ/(kg K); $\kappa = 1{,}3977$.

a) Politropska kompresija u kompresoru (nepovratan proces)

Eksponent politrope određen je početnim i konačnim stanjem:

$$n = \frac{\ln \frac{p_1}{p_{ok}}}{\ln \frac{p_1}{p_{ok}} - \ln \frac{T_1}{T_{ok}}} = \frac{\ln \frac{6}{1}}{\ln \frac{6}{1} - \ln \frac{433{,}15}{288{,}15}} = 1{,}2945$$

i po iznosu se nalazi u rasponu uobičajenih vrijednosti $1 < n < \kappa$.

Za politropsku kompresiju troši se snaga:

$$P_a = \frac{n}{n-1} q_m R \left(T_{ok} - T_1\right) = \frac{1{,}2945}{1{,}2945-1} \cdot 300 \cdot 0{,}2968 \cdot \left(15-160\right) = -56\,754 \text{ kJ/h} = -15{,}765 \text{ kW},$$

pri čemu se u okoliš odvodi toplinski tok:

$$\Phi_a = q_m c_v \frac{n-\kappa}{n-1}\left(T_1 - T_{ok}\right) = 300 \cdot 0{,}7462 \cdot \frac{1{,}2945 - 1{,}3977}{1{,}2945-1} \cdot \left(160-15\right) = -11\,383 \text{ kJ/h} =$$
$$= -3{,}162 \text{ kW};$$

Treba uočiti da smo ovdje toplinski tok **iznimno** računali s nezaokruženim brojem $\kappa = 1{,}3977$, umjesto uobičajeno korištene zaokružene vrijednosti $\kappa = 1{,}4$, a razlog je taj, što je vrijednost $n = 1{,}2945$ razmjerno blizu vrijednosti κ u izrazu za izmjenjivani toplinski tok (razlika u brojniku), što bi izazvalo nepotrebnu, a uočljivu pogrešku zbog zaokruživanja. Doista, da smo računali sa ($\kappa = 1{,}4$) u gornjem izrazu, dobili bismo toplinski tok: −11 631 kJ/h = −3,231 kW! Sama ta pogreška i ne bi bila fatalna, ali bi u nastavku kod računanja gubitka snage preko viška toplinskog toka u okolišu dovela do uočljivo drukčijeg rezultata nego kad gubitak snage računamo kao razliku utrošene snage!

b) Povratan proces od stanja “**0**” do stanja “**1**”:

Najmanja snaga potrebna da se zadana struja dušika stanja “**0**” dovede u stanje “**1**” računa se prema formuli:

$$P_b = P_{pov} = \dot{H}_o - \dot{H}_1 - T_{ok}\left(\dot{S}_o - \dot{S}_1\right) = -12{,}603 - 2{,}561 = -15{,}164 \text{ kW} = -54\,590 \text{ kJ/h},$$

u kojoj su pojedini članovi:

$$\dot{H}_o - \dot{H}_1 = q_m c_p \left(\vartheta_{ok} - \vartheta_1\right) = 300 \cdot 1{,}043 \cdot \left(15-160\right) = -45\,370 \text{ kJ/h} = -12{,}603 \text{ kW}$$

$$-T_{\text{ok}}\left(\dot{S}_{\text{o}}-\dot{S}_1\right)=-T_{\text{ok}}\,q_m\left(c_p\ln\frac{T_{\text{ok}}}{\text{T}_1}-R\ln\frac{p_{\text{ok}}}{p_1}\right)=$$

$$=-288{,}15\cdot 300\cdot\left(1{,}043\cdot\ln\frac{288{,}15}{433{,}15}-0{,}2968\cdot\ln\frac{1}{6}\right)=-9220\ \text{kJ/h}=-2{,}561\ \text{kW}\,.$$

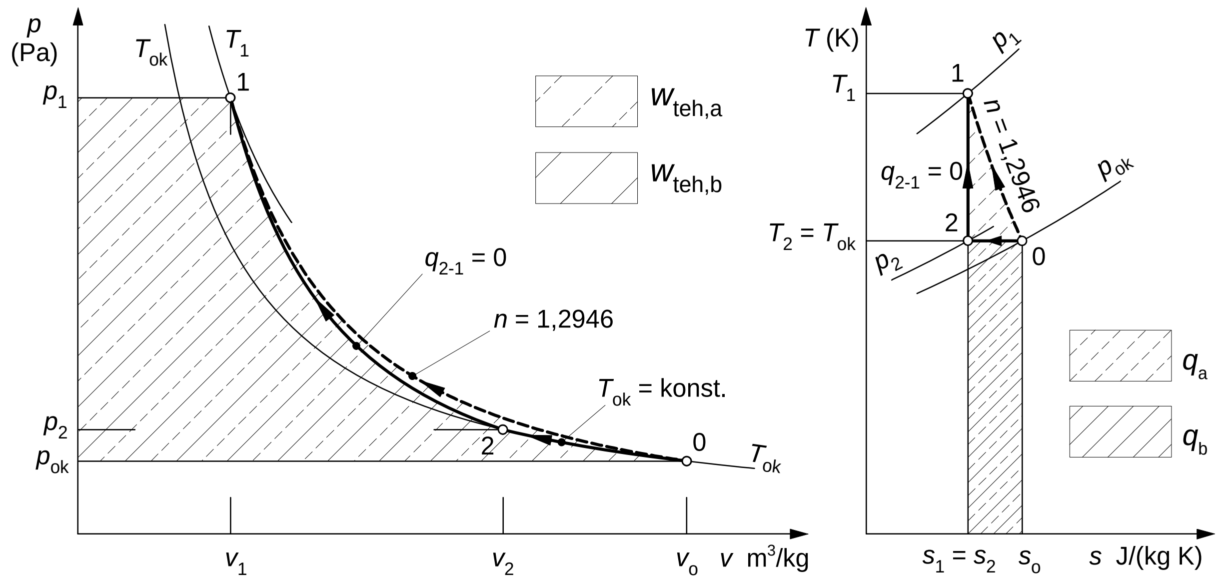
Ovaj drugi član, $-T_{\text{ok}}\left(\dot{S}_{\text{o}}-\dot{S}_1\right)$, zapravo je **toplinski tok** koji se izmjenjuje s okolišem u tijeku izotermne promjene stanja! Ovako kako je napisan, $-T_{\text{ok}}\left(\dot{S}_{\text{o}}-\dot{S}_1\right)\equiv T_{\text{ok}}\left(\dot{S}_1-\dot{S}_{\text{o}}\right)$, **odnosi se na radnu tvar** (dušik), pa je od nje (zbog negativnog predznaka) **odveden**, ali je za okoliš taj isti toplinski tok **doveden**! Dakle, u (povratnom) procesu "b" okoliš prima **manje** toplinskog toka (2,561 kW), nego što je primio u (nepovratnom) procesu "a" (3,162 kW)!

Kao što je poznato, gubitak snage jednak je višku okolišu predanog toplinskog toka:

$$\Delta P=\left(\Phi_{\text{ok}}\right)_{\text{nep}}-\left(\Phi_{\text{ok}}\right)_{\text{pov}}=\left(\Phi_{\text{ok}}\right)_{\text{a}}-\left(\Phi_{\text{ok}}\right)_{\text{b}}=-\Phi_{\text{a}}-\left(-\Phi_{\text{b}}\right)=3{,}162-2{,}561=+0{,}601\ \text{kW}\,!$$

Usporedba utrošenih snaga pokazuje da je teoretski za zadani proces potrebno utrošiti **manje snage** nego što se troši za politropsku kompresiju! No, matematički gledano, broj $P_{\text{b}}=-15{,}164$ kW **veći** je od broja izračunatog pod "a": $P_{\text{a}}=-15{,}76$ kW, jer se na brojevnom pravcu nalazi **više desno**! Razlika tih dvaju brojeva zapravo je **gubitak snage** u procesu "a":

$$\Delta P=P_{\text{pov}}-P_{\text{nep}}=P_{\text{b}}-P_{\text{a}}=-15{,}164-\left(-15{,}765\right)=+0{,}601\,\text{kW}\,.$$



Dvije "trokutaste" površine **0 - 1 - 2 - 0** u p,v- i T,s-dijagramu **jednake** su, jer predstavljaju **istu veličinu - gubitak snage** – ona u p,v-dijagramu ga prikazuje kao **višak utrošene snage** u procesu "a" u odnosu na proces "b", a površina u T,s-dijagramu prikazuje gubitak snage kao **višak topline predane okolišu** u procesu "a" u odnosu na proces "b"!

No, treba imati na umu da se gore rečena jednakost površine odnosi na **fizikalno značenje površine** (koja se mjeri u J/kg)! Da bi te površine ispale i vizualno iste (tj. isti broj cm² **površine na slici**), **mi** se moramo pobrinuti **izborom mjerila apscise i ordinate**!

Označimo li mjerilo apscise i ordinate u p,v-dijagramu s M_v i M_p:

1 cm $\hat{=} M_v$ m³/kg i 1 cm $\hat{=} M_p$ N/m² slijedi: 1 cm² $\hat{=} M_v\cdot M_p$ J/kg,

a označimo li mjerilo apscise i ordinate u T,s-dijagramu s M_s i M_T:

1 cm $\hat{=} M_s$ J/(kg K) i 1 cm $\hat{=} M_T$ K slijedi: 1 cm² $\hat{=} M_s\cdot M_T$ J/kg,

mjerila moramo tako odabrati (ima bezbroj kombinacija), da vrijedi: $M_v\cdot M_p=M_s\cdot M_T$! ☺