MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGRABIENSIS

UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Zdravko Virag, Mario Šavar, Ivo Džijan

MEHANIKA FLUIDA I

VJEŽBE

Zagreb, 2017.

SADRŽAJ

POPIS NAJVAŽNIJIH OZNAKA

Fizikalna veličina	Oznaka	Dimenzija	Jedinica u SI sustavu
površina	A, S	L^2	m^2
brzina zvuka	c	LT^{-1}	m/s
promjer	D, d	L	m
sila	F	MLT^{-2}	N
ubrzanje Zemljine sile teže	g	LT^{-2}	m/s^2
volumenski modul elastičnosti	K	$ML^{-1}T^{-2}$	Pa
maseni protok	$\dot{m}$	MT^{-1}	kg/s
moment sile	M	ML^2T^{-2}	Nm
snaga	P	ML^2T^{-3}	W
tlak	p	$ML^{-1}T^{-2}$	Pa
volumenski protok	Q	L^3T^{-1}	m^3/s
potencijal masene sile	U	L^2T^{-2}	m^2/s^2
specifična unutrašnja energija	u	L^2T^{-2}	J/kg
volumen fluida	V	L^3	m^3
brzina strujanja fluida	v	LT^{-1}	m/s
rad sile, energija	W, E	ML^2T^{-2}	J
geodetska visina	z	L	m
gustoća fluida	ρ	ML^{-3}	kg/m^3
kinematička viskoznost	ν	L^2T^{-1}	m^2/s
dinamička viskoznost	μ	$ML^{-1}T^{-1}$	Pa·s
kutna brzina	ω	T^{-1}	rad/s
koeficijent otpora trenja	λ	-	-
naprezanje	τ, σ	$ML^{-1}T^{-2}$	N/m^2
kut	α	-	rad

PREPORUČENA LITERATURA

Cengel, Y. A., Cimbala, J. M.: Fluid Mechanics – Fundamentals and Applications, McGraw-Hill, 2006.

Fancev, M.: Mehanika fluida, Tehnička enciklopedija, 8, Hrvatski leksikografski zavod, Zagreb, 1982.

Munson, B. R., Young, D. F., Okiishi, T. H.: Fundamentals of Fluid Mechanics, John Wiley&Sons, Toronto, 1990.

Virag, Z.: Mehanika fluida – odabrana poglavlja, primjeri i zadaci, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2002.

White, F. M.: Fluid Mechanics, McGraw-Hill, 2003.

Zbirke zadataka

Bukurov, M., Todorović, B., Bikić, S.: Zbirka zadataka iz mehanike fluida 1, Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu, FTN - Grafički centar GRID, Novi Sad, Srbija, 2013.

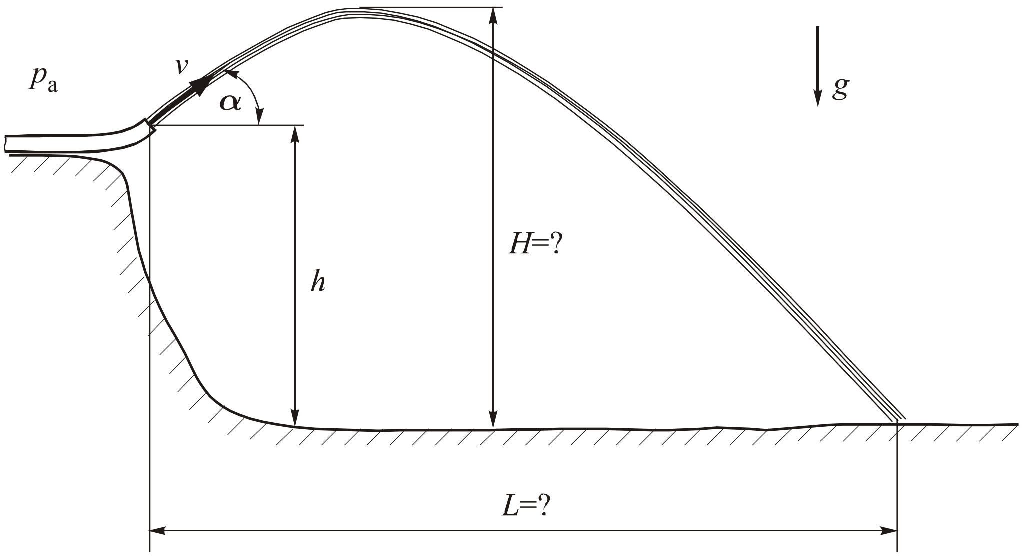
Maksimović, Č. i dr.: Zbirka zadataka iz Mehanike fluida s rešenim ispitnim rokovima, Građeviniski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2002, http://www.ptf.unze.ba/nastava/OHH/L5%20Zbirka%20zadataka%20iz%20Mehanike%20fluida.pdf, 09.12.2015.

Obrović B., Savić S.: Zbirka rešenih zadataka iz mehanike fluida - Osnovni kurs, Mašinski fakultet u Kragujevcu, Kragujevac, 2011.

Šavar, M.: Zbirka ispitnih zadataka iz Mehanike fluida I, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2002. https://www.fsb.unizg.hr/hydro/pdf/Nastavni_materijali/Zbirka_zadataka_iz_MF_%28Savar%29.pdf, 09.12.2015.

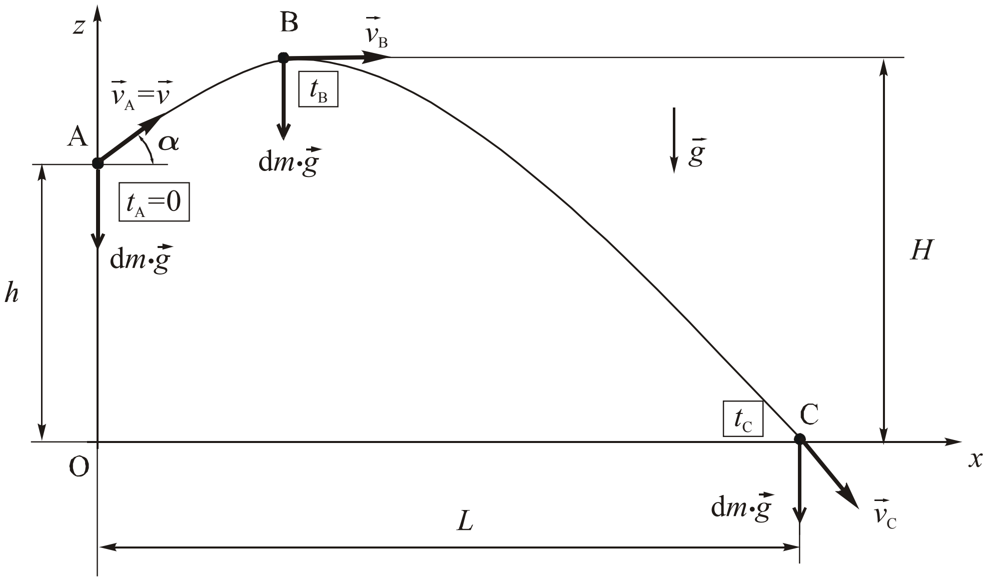
0.VJEŽBE – PONAVLJANJE

0.1 Na visini h = 1 m, prema slici, nalazi se otvor cijevi iz koje izlazi mlaz fluida stalnom brzinom v = 8 m/s, pod kutom α = 49°. Uz pretpostavku idealnog fluida i uz zanemarenje trenja između zraka i fluida odredite maksimalnu visinu H i duljinu L koju će mlaz dosegnuti.



Rješenje:

Mlaz fluida je sa svih strana okružen zrakom pod konstantnim atmosferskim tlakom, tako da je rezultirajuća sila tlaka na svaku česticu fluida u mlazu jednaka nuli, te od vanjskih sila ostaje samo sila težine. Prema tome, svaka čestica fluida u mlazu gibat će se poput materijalne točke u polju gravitacije (kosi hitac). Budući da svaka čestica u izlaznom mlazu ima brzinu v, dovoljno je promatrati gibanje jedne čestice fluida, a gibanje svih ostalih čestica će biti potpuno identično. Stoga će oblik mlaza biti jednak obliku putanje što bi ga opisala jedna materijalna točka izbačena brzinom v pod kutom α s visine h u odnosu na koordinatni sustav prikazan na slici.



Gibanje se rastavlja u smjeru osi x i osi z. U svakom trenutku na česticu djeluje samo sila težine $\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}m \cdot \vec{g}$, te prema drugom Newtonovom zakonu $\mathrm{d}m \cdot \vec{a} = \mathrm{d}\vec{F}$, vrijedi $\vec{a} = \vec{g}$, ili

$$a_x = \ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{a}$$

$$a_z = \ddot{z} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -g \tag{b}$$

Jednadžbe (a) i (b) se integriraju u vremenu nakon čega slijedi:

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x = C_1 \tag{c}$$

$$\dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_z = -g\,t + C_2 \tag{d}$$

Konstante C_1 i C_2 se određuju iz početnih uvjeta. Vremenski trenutak t = 0 odgovara trenutku nailaska čestice fluida u točku A u kojoj su komponente brzine

$$v_x = v \cdot \cos\alpha \tag{e}$$

$$v_z = v \cdot \sin\alpha\,;\ \text{ za }\ t=0 \tag{f}$$

Uvrštavanjem jednadžbi (e) i (f) u jednadžbe (c) i (d) slijedi da je

$$C_1 = v \cdot \cos\alpha \quad \text{i} \tag{g}$$

$$C_2 = v \cdot \sin\alpha \tag{h}$$

odnosno vrijedi

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_{\mathrm{x}} = v \cdot \cos\alpha \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_{\mathrm{z}} = v \cdot \sin\alpha - gt \qquad \text{(j)}$$

Integriranjem jednadžbi (i) i (j) dobije se promjena puta čestice fluida u vremenu:

$$x = v \cdot \cos\alpha \cdot t + C_3 \qquad \text{(k)}$$

$$z = v \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 + C_4 \qquad \text{(l)}$$

Konstante integracije C_3 i C_4 se ponovo dobiju iz početnih uvjeta, tj. U trenutku $t = 0$ čestica fluida se nalazi u točki A s koordinatama $x = x_{\mathrm{A}} = 0$ i $z = z_{\mathrm{A}} = h$, što uvršteno u (k) i (l) daje: $C_3 = 0$ i $C_4 = h$, odnosno:

$$x = v \cdot \cos\alpha \cdot t \qquad \text{(m)}$$

$$z = h + v \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad \text{(n)}$$

Položaje točaka B i C moguće je odrediti iz jednadžbi (j), (m) i (n).

Do točke B mlaz fluida ide prema gore, odnosno brzina v_{z} je pozitivna, a nakon točke B brzina v_{z} je negativna, što znači da je u točki B brzina v_{z} jednaka nuli, te se iz jednadžbe (j) može izračunati vrijeme t_{B} potrebno da čestica fluida dođe od točke A do točke B.

$$v_{\mathrm{zB}} = 0 = v \cdot \sin\alpha - g\, t_{\mathrm{B}} \quad \Rightarrow \quad t_{\mathrm{B}} = \frac{v \cdot \sin\alpha}{g} \qquad \text{(o)}$$

Iz jednadžbi (m) i (n) za $t = t_{\mathrm{B}}$ slijede koordinate točke B

$$x_{\mathrm{B}} = v \cdot \cos\alpha \cdot \frac{v \cdot \sin\alpha}{g} = \frac{v^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g} = 3{,}23 \text{ m} \qquad \text{(p)}$$

$$\underline{z_{\mathrm{B}} = H = h + \frac{(v \cdot \sin\alpha)^2}{2g} = 2{,}86 \text{ m}} \qquad \text{(q)}$$

U točki C je $t = t_{\mathrm{C}}$ i $z_{\mathrm{C}} = 0$ te iz jednadžbe (n) slijedi

$$0 = h + v\sin \cdot \alpha \cdot t_{\mathrm{C}} - \frac{1}{2} g \cdot t_{\mathrm{C}}^2 \qquad \text{(r)}$$

Rješenje kvadratne jednadžbe (r) je:

$$t_C = \frac{v\sin\alpha \pm \sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2gh}}{g} \tag{s}$$

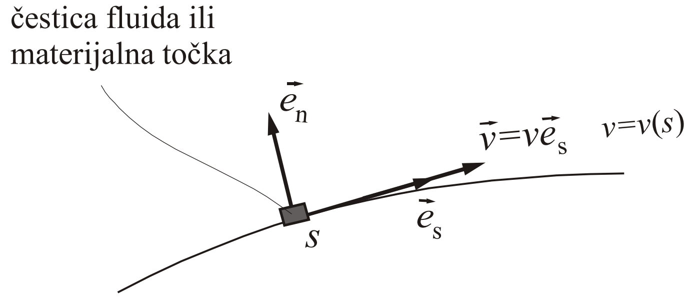
gdje je očito samo jedno rješenje fizikalno (t_C mora biti pozitivno)

$$t_C = \frac{v\sin\alpha + \sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2gh}}{g} = 1,379\ \mathrm{s} \tag{t}$$

Uvrštenjem t_C u jednadžbu (m) za x-koordinatu točke C slijedi:

$$x_C = L = v \cdot \cos\alpha \cdot t_C = 7,24\ \mathrm{m} \tag{u}$$

0.2 Čestica fluida giba se po zakrivljenoj putanji, prema slici. Odredite ubrzanje čestice fluida za slučaj da je brzina zadana u funkciji puta s, koji se mjeri duž putanje.



Rješenje:

Definirat ćemo lokalne jedinične vektore $\vec{e}_s$ u smjeru putanje i $\vec{e}_n$ u smjeru normale na putanju. Vektor brzine je tada

$$\vec{v} = v(s) \cdot \vec{e}_s(s) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_s \tag{a}$$

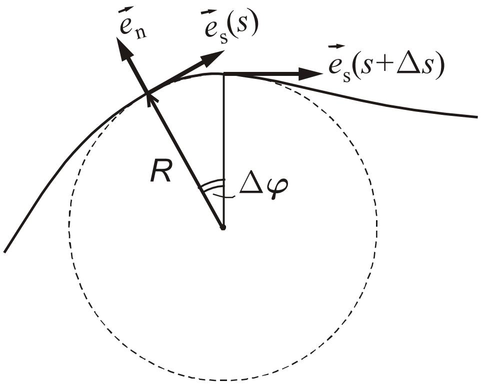
Ako je putanja zakrivljena, tada je vektor $\vec{e}_s$ promjenljiv.

Ubrzanje čestice fluida je po definiciji

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \tag{b}$$

Budući da je $\vec{v} = \vec{v}(s)$, po pravilima složenog deriviranja vrijedi:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}s} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}_{v} = v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[v\vec{e}_s\right] = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\vec{e}_s + v^2\frac{\mathrm{d}\vec{e}_s}{\mathrm{d}s} \tag{c}$$

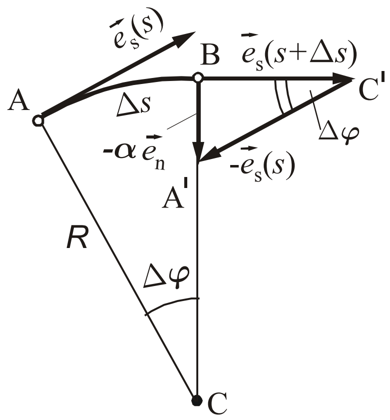


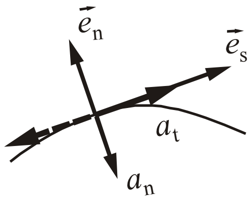
U svrhu određivanja derivacije $\dfrac{d\vec{e}_s}{ds}$ putanja se lokalno zamijeni kružnicom polumjera R.

Tada se može pisati

$$ds = R d\varphi \tag{d}$$

$$\frac{d\vec{e}_s}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{e}_s(s+\Delta s) - \vec{e}_s(s)}{\Delta s} \tag{e}$$





Iz slike je:

$$\vec{e}_s(s+\Delta s) - \vec{e}_s(s) = -\alpha \vec{e}_n \tag{f}$$

iz sličnosti trokuta ABC i A′BC′ slijedi:

$$\frac{\Delta s}{R} = \frac{\alpha}{1} \tag{g}$$

pa vrijedi:

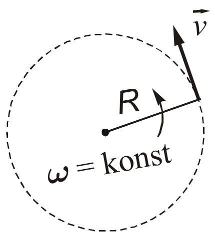
$$\frac{d\vec{e}_s}{ds} = \frac{-\alpha \vec{e}_n}{R\alpha} = \frac{-\vec{e}_n}{R} \tag{h}$$

što uvršteno u izraz za ubrzanje daje:

$$\vec{a} = \underbrace{v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}}_{\substack{\text{tangencijalna}\\ \text{komponenta}\\ \text{ubrzanja}}}\vec{e}_\mathrm{s} \underbrace{-\frac{v^2}{R}}_{\substack{\text{normalna}\\ \text{komponenta}\\ \text{ubrzanja}}}\vec{e}_\mathrm{n} = a_\mathrm{t}\vec{e}_\mathrm{s} + a_\mathrm{n}\vec{e}_\mathrm{n} \qquad \text{(i)}$$

Zaključak: Tangencijalna komponenta ubrzanja može gledati u smjeru $\vec{e}_\mathrm{s}$ ili obrnuto, a normalna komponenta ubrzanja uvijek gleda prema središtu zakrivljenosti putanje.

Specijalni slučaj: Gibanje čestice fluida po kružnoj putanji polumjera R, uz konstantnu kutnu brzinu $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \text{konst.}$



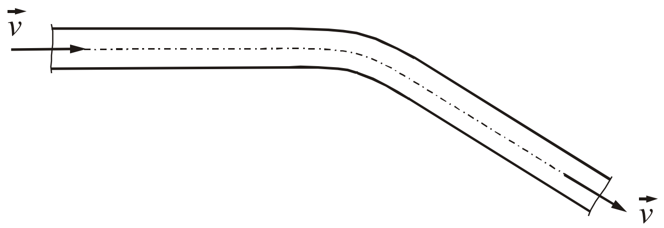
$v = \omega R = \text{konst.}$

$a_\mathrm{t} = 0$

$a_\mathrm{n} = -\dfrac{v^2}{R} = -\omega^2 R$

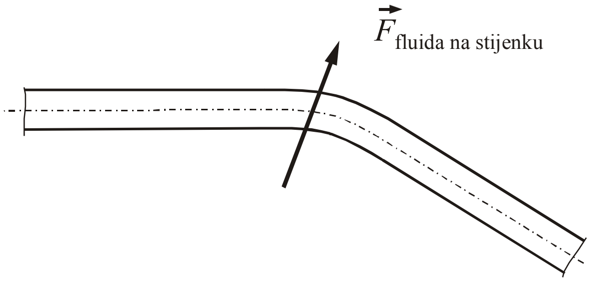
0.3 Fluid konstantne gustoće ρ struji stalnom brzinom $\vec{v}$ kroz svinutu cijev konstantnog poprečnog presjeka koja se nalazi u horizontalnoj ravnini. Primjenom zakona količine gibanja odredite smjer sile fluida na stijenku cijevi.

$z = \text{konst.}$



Rješenje:

Količina gibanja $m\vec{v}$ jediničnog volumena fluida $\dfrac{m\vec{v}}{V} = \rho\vec{v}$, je konstantna po veličini, a promjenjiva po smjeru. Za promjenu smjera količine gibanja od ulaza do izlaza iz cijevi je prema zakonu količine gibanja potrebna sila. Da bi fluid promijenio smjer strujanja potrebna je sila koja gleda prema središtu zakrivljenosti putanje čestice fluida. Sila kojom fluid djeluje na stijenku cijevi je suprotnog predznaka tj. djeluje kao na slici



Ako bi cijev bila fleksibilna imala bi tendenciju izravnavanja.

Primjer: Što se događa sa fleksibilnim crijevom namotanim u kolut?

1.VJEŽBE – MATEMATIČKE OSNOVE

1.1 Izračunati sljedeće izraze primjenom pravila za množenje Kroneckerovim delta simbolom:

a) δ_{ii}, b) $\delta_{ij}\delta_{ij}$, c) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}$, d) $\delta_{ij}\delta_{jk}$, e) $\delta_{ij}A_{ik}$

Rješenje:

a) $$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3 \tag{a}$$

b) $$\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii} = \delta_{jj} = 3 \tag{b}$$

c) $$\underbrace{\delta_{ij}\delta_{ik}}_{\delta_{kj}}\delta_{jk} = \delta_{kj}\delta_{jk} = \delta_{kk} = 3 \tag{c}$$

d) $$\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik} \tag{d}$$

e) $$\delta_{ij}A_{ik} = A_{jk} \tag{e}$$

1.2 Zapišite u indeksnoj notaciji komponente vektora $\vec{f} = -2\vec{j}$.

Rješenje:

$$f_i = -2\delta_{i2} \tag{a}$$

1.3 Direktnim razvojem pokazati da za permutacijski simbol ε_{ijk} vrijedi:

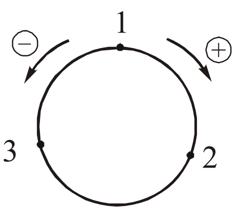
a) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = 6$

b) $\varepsilon_{ijk}a_j a_k = 0$

Rješenje:

a)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} &= \underbrace{\varepsilon_{ij1}\varepsilon_{1ij}}_{2,3 \quad 3,2} + \underbrace{\varepsilon_{ij2}\varepsilon_{2ij}}_{1,3 \quad 3,1} + \underbrace{\varepsilon_{ij3}\varepsilon_{3ij}}_{1,2 \quad 2,1} \\ &= \underbrace{\varepsilon_{231}}_{+1}\underbrace{\varepsilon_{123}}_{+1} + \underbrace{\varepsilon_{321}}_{-1}\underbrace{\varepsilon_{132}}_{-1} + \underbrace{\varepsilon_{132}}_{-1}\underbrace{\varepsilon_{213}}_{-1} + \underbrace{\varepsilon_{312}}_{+1}\underbrace{\varepsilon_{231}}_{+1} + \underbrace{\varepsilon_{123}}_{+1}\underbrace{\varepsilon_{312}}_{+1} + \underbrace{\varepsilon_{213}}_{-1}\underbrace{\varepsilon_{321}}_{-1} = 6\end{aligned} \tag{a}$$



b) $\vec{a}\times\vec{a}=0$

$$i=1 \qquad \varepsilon_{1jk}a_ja_k=\underbrace{\varepsilon_{123}}_{+1}a_2a_3+\underbrace{\varepsilon_{132}}_{-1}a_3a_2=a_2a_3-a_3a_2=0 \tag{b}$$

$$i=2 \qquad \varepsilon_{2jk}a_ja_k=\underbrace{\varepsilon_{231}}_{+1}a_3a_1+\underbrace{\varepsilon_{213}}_{-1}a_1a_3=a_3a_1-a_1a_3=0 \tag{c}$$

$$i=3 \qquad \varepsilon_{3jk}a_ja_k=\underbrace{\varepsilon_{312}}_{+1}a_1a_2+\underbrace{\varepsilon_{321}}_{-1}a_2a_1=a_1a_2-a_2a_1=0 \tag{d}$$

1.4 Odredite f_2 komponentu vektorskog izraza: $f_i=\dfrac{\partial c_i}{\partial x_j}b_j-\dfrac{\partial c_j}{\partial x_i}b_j$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} f_2&=\frac{\partial c_2}{\partial x_j}b_j-\frac{\partial c_j}{\partial x_2}b_j=\frac{\partial c_2}{\partial x_1}b_1+\cancel{\frac{\partial c_2}{\partial x_2}b_2}+\frac{\partial c_2}{\partial x_3}b_3-\frac{\partial c_1}{\partial x_2}b_1-\cancel{\frac{\partial c_2}{\partial x_2}b_2}-\frac{\partial c_3}{\partial x_2}b_3\\ &=b_1\left(\frac{\partial c_2}{\partial x_1}-\frac{\partial c_1}{\partial x_2}\right)+b_3\left(\frac{\partial c_2}{\partial x_3}-\frac{\partial c_3}{\partial x_2}\right)\end{aligned} \tag{a}$$

1.5 Koristeći indeksnu notaciju dokazati vektorske identitete:

a) $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$

b) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=0$

Rješenje:

a)

$$\underbrace{\underset{j}{\vec{a}}\times\left(\underbrace{\underset{k}{\vec{b}}\times\underset{l}{\vec{c}}}_{m}\right)}_{i}=\left(\underset{j}{\vec{a}}\cdot\underset{j}{\vec{c}}\right)\underset{i}{\vec{b}}-\left(\underset{j}{\vec{a}}\cdot\underset{j}{\vec{b}}\right)\underset{i}{\vec{c}} \tag{a}$$

Prikaz u indeksnoj notaciji:

$$\varepsilon_{ijm} a_j \, \varepsilon_{mkl} b_k c_l = a_j c_j b_i - a_j b_j c_i \tag{b}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijm} \varepsilon_{mkl} a_j b_k c_l &= \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk} \right) a_j b_k c_l \\ &= a_j c_j b_i - a_j b_j c_i \end{aligned} \tag{c}$$

b)

$$\left(\underbrace{\underbrace{\vec{a}}_{j} \times \underbrace{\vec{b}}_{k}}_{i} \right) \cdot \underbrace{\vec{a}}_{i} = 0 \tag{d}$$

Prikaz u indeksnoj notaciji:

$$\varepsilon_{ijk} a_j \, b_k a_i = 0 \tag{e}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} & a_i a_j = a_j \, a_i \rightarrow \text{simetrično po } ij \\ & \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} \rightarrow \text{antisimetrično po } ij \end{aligned} \tag{f}$$

Produkt simetričnog i antisimetričnog tenzora je jednak nuli.

1.6 Prikazati u indeksnoj notaciji sljedeće vektorske identitete:

a) $\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \times \left(\vec{c} \times \vec{d} \right) = \vec{c} \left[\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{d} \right) \right] - \vec{d} \left[\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) \right]$

b) $\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d} \right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c} \right) \left(\vec{b} \cdot \vec{d} \right) - \left(\vec{b} \cdot \vec{c} \right) \left(\vec{a} \cdot \vec{d} \right)$

Rješenje:

a)

$$\underbrace{\left(\underbrace{\underbrace{\vec{a}}_{l} \times \underbrace{\vec{b}}_{m}}_{i} \right) \times \left(\underbrace{\underbrace{\vec{c}}_{n} \times \underbrace{\vec{d}}_{p}}_{j} \right)}_{k} = \underbrace{\vec{c}}_{k} \left[\underbrace{\vec{a}}_{i} \cdot \left(\underbrace{\underbrace{\vec{b}}_{m} \times \underbrace{\vec{d}}_{n}}_{i} \right) \right] - \underbrace{\vec{d}}_{k} \left[\underbrace{\vec{a}}_{i} \cdot \underbrace{\left(\underbrace{\vec{b}}_{m} \times \underbrace{\vec{c}}_{n} \right)}_{i} \right] \tag{a}$$

$$\varepsilon_{kij} \, \varepsilon_{ilm} a_l b_m \varepsilon_{jnp} c_n d_p = c_k \, a_i \varepsilon_{imn} b_m d_n - d_k \, a_i \varepsilon_{imn} b_m c_n \tag{b}$$

b)

$$\underbrace{\left(\underset{j}{\vec{a}}\times\underset{k}{\vec{b}}\right)}_{i}\cdot\underbrace{\left(\underset{l}{\vec{c}}\times\underset{m}{\vec{d}}\right)}_{i}=\left(\underset{i}{\vec{a}}\cdot\underset{i}{\vec{c}}\right)\left(\underset{j}{\vec{b}}\cdot\underset{j}{\vec{d}}\right)-\left(\underset{i}{\vec{b}}\cdot\underset{i}{\vec{c}}\right)\left(\underset{j}{\vec{a}}\cdot\underset{j}{\vec{d}}\right) \tag{c}$$

$$\varepsilon_{ijk}\,a_j b_k \varepsilon_{ilm}\,c_l d_m = a_i c_i b_j d_j - b_i c_i a_j d_j \tag{d}$$

1.7 Razviti u indeksnu notaciju i prikazati simbolički sljedeće izraze:

a) $\nabla(uv)$

b) $\nabla\cdot(u\vec{a})$

c) $\nabla\times(u\vec{a})$

d) $\nabla\cdot(\nabla u)$

Rješenje:

a)

$$\nabla(uv) \tag{a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(uv)=u\frac{\partial v}{\partial x_j}+v\frac{\partial u}{\partial x_j} \tag{b}$$

$$\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u \tag{c}$$

b)

$$\underset{i}{\nabla}\cdot\left(u\underset{i}{\vec{a}}\right) \tag{d}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(ua_i)=u\frac{\partial a_i}{\partial x_i}+a_i\frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{e}$$

$$\nabla\cdot(u\vec{a})=u\nabla\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\nabla u \tag{f}$$

c)

$$\underbrace{\underset{j}{\nabla}\times\left(u\underset{k}{\vec{a}}\right)}_{\mathrm{i}} \tag{g}$$

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\partial\left(ua_k\right)}{\partial x_j}=\varepsilon_{ijk}u\frac{\partial a_k}{\partial x_j}+\varepsilon_{ijk}a_k\frac{\partial u}{\partial x_j} \tag{h}$$

$$\nabla\times\left(u\vec{a}\right)=u\,\nabla\times\vec{a}+\nabla u\times\vec{a} \tag{i}$$

d)

$$\underbrace{\nabla}_{i}\cdot\left(\underbrace{\nabla}_{i}u\right) \tag{j}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_i}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\qquad \nabla\cdot\left(\nabla u\right)=\Delta u \tag{k}$$

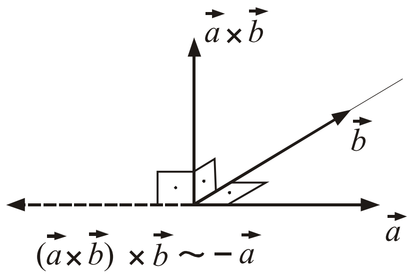
1.8 Primjenom indeksne notacije izračunajte izraz $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{b}$, uz pretpostavku da je $\vec{a}$ okomito na $\vec{b}$.

Rješenje:

Uvjet okomitosti:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad \text{odnosno} \quad a_j b_j=0 \tag{a}$$

$$\underbrace{\left(\underbrace{\left(\underbrace{\vec{a}}_{l}\times\underbrace{\vec{b}}_{m}\right)}_{i}\times\left(\underbrace{\vec{b}}_{j}\right)\right)}_{k}\Rightarrow\underbrace{\varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{ilm}}_{\underbrace{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}}_{\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl}}}\;a_l b_m b_j=\cancel{a_j b_k b_j}-a_k b_j b_j=-a_k b_j b_j\;\Rightarrow\;-\left|\vec{b}\right|^2\vec{a} \tag{b}$$



1.9 Zapišite u indeksnoj notaciji izraze za:

a) moment sile $\vec{F}$ u odnosu na ishodište

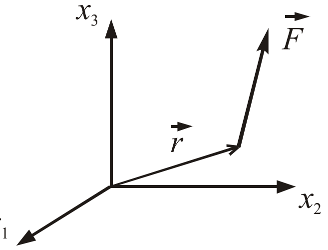
b) rad sile $\vec{F}$ na putu $\mathrm{d}\vec{r}$.

Rješenje:

a)

$$\underbrace{\vec{M}}_{i} = \underbrace{\underbrace{\vec{r}}_{j} \times \underbrace{\vec{F}}_{k}}_{i} \tag{a}$$

$$M_i = \varepsilon_{ijk}\, x_j F_k \tag{b}$$



b)

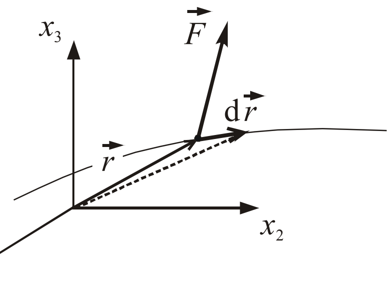
$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{c}$$

$$\mathrm{d}W = F_{\mathrm{i}}\ \mathrm{d}x_{\mathrm{i}} \tag{d}$$

Napomena: Snaga je

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \tag{e}$$

$$P = \frac{d\,W}{d\,t} = F_i \frac{d\,x_i}{d\,t} = F_i\, v_i \tag{f}$$



1.10 Izračunajte sferni, simetrični i antisimetrični dio tenzora

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ -4 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Rješenje:

Sferni dio tenzora

$$\frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4\delta_{ij} \tag{a}$$

Simetrični dio tenzora

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left[T_{ij} + T_{ji}\right] = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ -4 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -4 & 8 \\ 6 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 6 \end{bmatrix} \tag{b}$$

Antisimetrični dio tenzora

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left[T_{ij} - T_{ji}\right] = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ -4 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -4 & 8 \\ 6 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{c}$$

Napomena:

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} \tag{d}$$

2.VJEŽBE – MATEMATIČKE OSNOVE

2.1 Odredite fluks vektora $Q = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S$ po površini S kocke brida $a = 2$ s centrom u ishodištu. Površina S je orijentirana vektorom vanjske normale $\vec{n}$, a vektor $\vec{v}$ je $\vec{v} = 3x_1x_2\vec{e}_1 + 6x_2x_3\vec{e}_2 - \left(3x_2x_3 + x_3\right)\vec{e}_3$.

Rješenje:

Formula Gauss-Ostrogradsky

$$Q = \int_S v_i \cdot n_i d\,S = \int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \cdot d\,V \tag{a}$$

$$v_i = (\underbrace{3x_1x_2}_{v_1}; \underbrace{6x_2x_3}_{v_2}; \underbrace{-3x_2x_3 - x_3}_{v_3}) \tag{b}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial x_1}}_{\cancel{3x_2}} + \underbrace{\frac{\partial v_2}{\partial x_2}}_{6x_3} + \underbrace{\frac{\partial v_3}{\partial x_3}}_{\cancel{-3x_2}-1} \tag{c}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 6x_3 - 1 \tag{d}$$

$$Q = \int_V \left(6x_3 - 1\right) \cdot d\,V = \left|6x_3 - 1\right|_{\substack{x_1=0\\x_2=0\\x_3=0}} \cdot V = -V = -8 \tag{e}$$

Napomena: Podintegralna funkcija je linearna pa je integral jednak vrijednosti podintegralne funkcije u težištu volumena pomnoženom s veličinom volumena.

2.2 Izračunajte vrijednost integrala $\vec{F} = \int_S p\vec{n}\,\mathrm{d}S$, gdje je S površina kugle polumjera R = 3, sa središtem u točki C(2,1,3) a $\vec{n}$ je vanjska normala na površinu, ako je $p = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Kolika bi bila vrijednost $\vec{F}$ za slučaj p = konst?

Rješenje:

$$F_i = \int_S p n_i \, dS = \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV \tag{a}$$

$$p = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \qquad \frac{\partial p}{\partial x_1} = 2x_1 \qquad \frac{\partial p}{\partial x_2} = 2x_2 \qquad \frac{\partial p}{\partial x_3} = 2x_3 \tag{b}$$

$$F_1 = \int_V 2x_1 \, dV = 2x_{\mathrm{C},1} V = 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} 3^3 \pi = 144\pi \tag{c}$$

$$F_2 = \int_V 2x_2 \, dV = 2x_{\mathrm{C},2} V = 2 \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} 3^3 \pi = 72\pi \tag{d}$$

$$F_3 = \int_V 2x_3 \, dV = 2x_{\mathrm{C},3} V = 2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} 3^3 \pi = 216\pi \tag{e}$$

$$F_i = \left(144\pi,\ 72\pi,\ 216\pi\right) \tag{f}$$

Ili

$$p = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_j x_j \qquad \frac{\partial p}{\partial x_i} = 2x_j \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_i}}_{\delta_{ij}} = 2x_i \tag{g}$$

$$F_i = \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = 2 \underbrace{\int_V x_i \, dV}_{x_i^{težišta} \cdot V} = 2x_{\mathrm{C},i} V \tag{h}$$

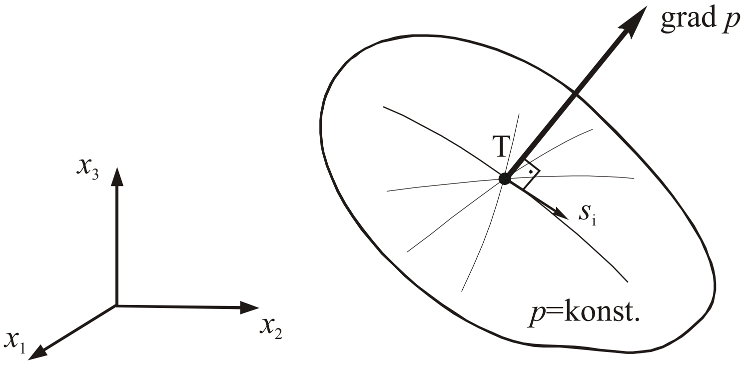
U gornjem izrazu je definirano težište volumena!

Za slučaj p = konst. $\Rightarrow \dfrac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow F_i = 0$

2.3 Odredite jedan jedinični vektor s_i u čijem smjeru nema promjene polja $p = 6x_1^2 + x_2 x_3$ u točki T (1,2,3).

Rješenje:

Općenito:



s_i može biti bilo koji vektor u ravnini koja je tangencijalna na p = konst. u točki T

U točki T

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 12x_1 \qquad \frac{\partial p}{\partial x_2} = x_3 \qquad \frac{\partial p}{\partial x_3} = x_2 \qquad \left.\frac{\partial p}{\partial x_i}\right|_T = \left(12,\ 3,\ 2\right) \tag{a}$$

Uvjet okomitosti grad p i s_i

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} s_i = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial x_1} s_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} s_2 + \frac{\partial p}{\partial x_3} s_3 = 0 \tag{b}$$

$$12s_1 + 3s_2 + 2s_3 = 0 \tag{c}$$

Proizvoljno odabiremo $s_1 = s_2 = 1$ pa je

$$s_3 = \frac{1}{2}\left(-12s_1 - 3s_2\right) = -\frac{15}{2} = -7,5 \rightarrow \ s_i s_i = 1^2 + 1^2 + \left(-7,5\right)^2 = 58,25 \tag{d}$$

$$s_i = \left(\frac{1}{\sqrt{58,25}},\ \frac{1}{\sqrt{58,25}},\ \frac{-7,5}{\sqrt{58,25}} \right) = \left(0,131,\ 0,131,\ -0,983\right) \tag{e}$$

2.4 U točki T fluida tenzor naprezanja ima sljedeće komponente u odnosu na koordinatni sustav $\mathbf{O}x_1x_2x_3$

$$\left[\sigma_{ij}\right]=\begin{bmatrix}-7 & 0 & 2\\ 0 & -5 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

Odredite :

a) Vektor naprezanja na ravninu orijentiranu normalom $n_\mathrm{i}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, te apsolutnu vrijednost toga vektora.

b) Normalnu komponentu naprezanja u toj ravnini i apsolutnu vrijednost tangencijalnog naprezanja.

c) Kut φ između vektora normale i vektora naprezanja.

Rješenje:

a)

$$\left[\sigma_{ij}\right]=\begin{bmatrix}-7 & 0 & 2\\ 0 & -5 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{bmatrix} \qquad n_i=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) \tag{a}$$

$$\sigma_i\left(n_j\right)=n_j\,\sigma_{ji} \tag{b}$$

$$\sigma_1\left(n_j\right)=n_1\,\sigma_{11}+n_2\,\sigma_{21}+n_3\,\sigma_{31}=\frac{2}{3}(-7)+\frac{1}{3}(2)=-4 \tag{c}$$

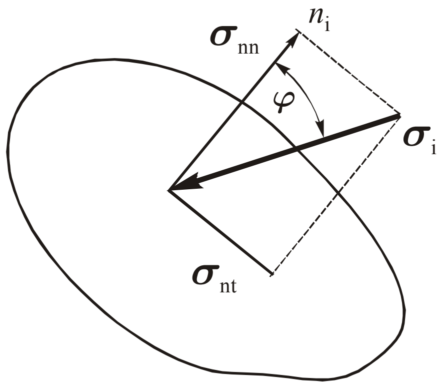
$$\sigma_2\left(n_j\right)=n_1\,\sigma_{12}+n_2\,\sigma_{22}+n_3\,\sigma_{32}=-\frac{2}{3}(-5)=\frac{10}{3} \tag{d}$$

$$\sigma_3\left(n_j\right)=n_1\,\sigma_{13}+n_2\,\sigma_{23}+n_3\,\sigma_{33}=\frac{2}{3}(2)+\frac{1}{3}(-4)=0 \tag{e}$$

$$\sigma_i=\left(-4,\frac{10}{3},0\right) \tag{f}$$

$$\left|\sigma_i\left(n_j\right)\right|=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2}=\sqrt{4^2+\left(\frac{10}{3}\right)^2}=5,21 \tag{g}$$

b)



$$\sigma_{nn} = \sigma_i n_i = \sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3 = -4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{10}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) = -\frac{44}{9} \tag{h}$$

$$\sigma_{nt} = \sqrt{(\sigma_i)^2 - \sigma_{nn}^2} = \sqrt{5,21^2 - \left(\frac{44}{9} \right)^2} = 1,79 \tag{i}$$

c) Treba uočiti da je na slici kotiran kut između normale i negativnog vektora naprezanja za koji vrijedi

$$\cos\varphi = \frac{|\sigma_i n_i|}{|\sigma_i|} = \frac{|\sigma_{nn}|}{|\sigma_i|} = \frac{\left| -\frac{44}{9} \right|}{5,21} = 0,938 \qquad \varphi = \arccos(0,938) = 20,2^\circ \tag{j}$$

2.5 Zadano je stanje tlačnih naprezanja u fluidu tenzorom $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$

Pokažite da je vektor naprezanja uvijek paralelan vektoru vanjske normale, te da je komponenta normalnog naprezanja jednaka *–p* nezavisna od orijentacije površine.

Rješenje:

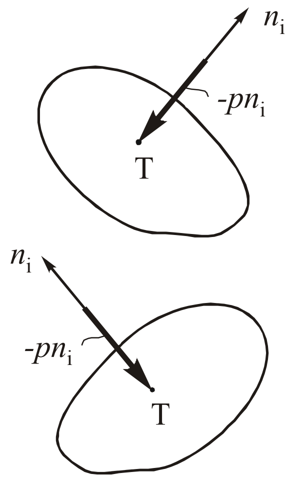
$$\sigma_i\left(n_j\right) = n_j\,\sigma_{ji} = -n_j\,p\delta_{ji} = -pn_i \qquad \text{(a)}$$

$$\sigma_{nn} = \sigma_i n_i = -p\,\underbrace{n_i n_i}_{1} = -p \qquad \text{(b)}$$

Sferni tenzor

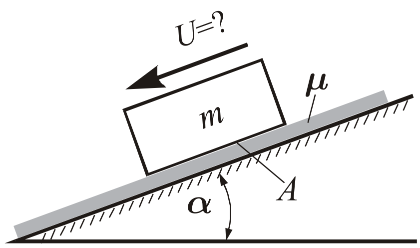
$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix} \qquad \text{(c)}$$

Zaključak: Sila tlaka je uvijek okomita na površinu.

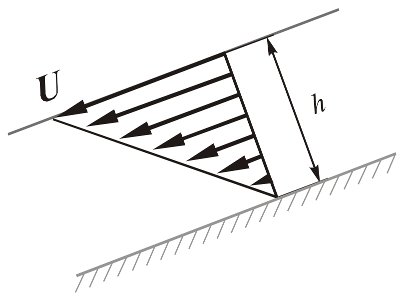


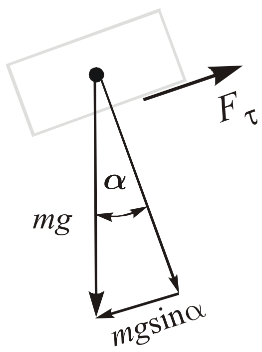
3.VJEŽBE – FIZIKALNE OSNOVE I STATIKA FLUIDA: HIDROSTATSKI MANOMETAR

3.1 Blok mase m = 10 kg kliže po glatkoj površini kosine nagnute pod kutom α = 20°. Odredite brzinu U bloka koja će se ustaliti, ako se između bloka i kosine nalazi uljni film debljine h = 0,1 mm. Dinamička viskoznost ulja je μ = 0,38 Pa·s, a površina bloka u dodiru s uljem A = 0,15 m^2. Pretpostavite linearni profil brzine u uljnom filmu.



Rješenje:





Newtonov zakon viskoznosti za linearni profil brzine daje

$$\tau = \mu \frac{U}{h} \tag{a}$$

Smično naprezanje je konstantno, pa je ukupna smična sila na donjoj površini bloka

$$F_\tau = \tau \cdot A \tag{b}$$

Blok kliže konstantnom brzinom, pa ravnoteža sila u pravcu kosine daje

$$F_\tau = mg \sin\alpha \tag{c}$$

Zamjenom se dobije

$$\mu \frac{U}{h} \cdot A = mg \sin\alpha \tag{d}$$

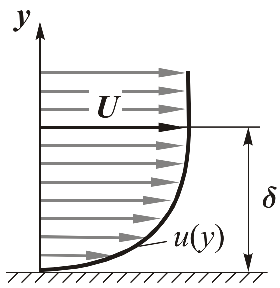
$$U = \frac{mg\sin\alpha \cdot h}{\mu \cdot A} \tag{e}$$

$$U = \frac{10\cdot 9{,}80665\cdot \sin 20^\circ \cdot 0{,}1\cdot 10^{-3}}{0{,}38\cdot 0{,}15}\cdot\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{f}$$

$$U = 0{,}0588\ \text{m/s} \tag{g}$$

Napomena: Za ubrzanje Zemljine sile teže g se koristi vrijednost $g = 9{,}80665\ \text{m/s}^2$.

3.2 Newtonska kapljevina gustoće ρ = 920 kg/m^3, kinematičke viskoznosti ν = 5·10^{-4} m^2/s struji uz nepomičnu stijenku. Profil brzine uz stijenku dan je izrazom $\dfrac{u}{U} = \dfrac{3}{2}\dfrac{y}{\delta} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{\delta}\right)^3$



gdje je y udaljenost od stijenke, a δ udaljenost na kojoj je brzina $u = U$. Odredite veličinu i smjer tangencijalnog naprezanja na površini stijenke, u zavisnosti od U i δ.

Rješenje:

Smično naprezanje na površini stijenke je

$$\tau = \mu \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0} = \rho\nu \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0} \tag{a}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = U\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\delta} - \frac{3}{2}\cdot\frac{y^2}{\delta^3}\right) \quad\Rightarrow\quad \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0} = \frac{3}{2}\frac{U}{\delta} \tag{b}$$

$$\tau = \rho\nu\frac{3}{2}\frac{U}{\delta} \tag{c}$$

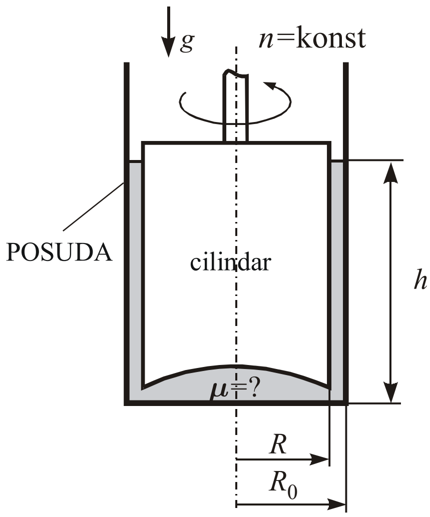
Ako se želi zavisnost samo od U i δ, onda se uvrste vrijednosti za ρ i ν, pri čemu se mora naglasiti u kojim jedinicama se uvrštavaju preostale fizikalne veličine

$$\{\tau\}_{\mathrm{N/m^2}} = 920 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\{U\}_{\mathrm{m/s}}}{\{\delta\}_{\mathrm{m}}} \tag{d}$$

$$\{\tau\}_{\mathrm{N/m^2}} = 0,69 \cdot \frac{\{U\}_{\mathrm{m/s}}}{\{\delta\}_{\mathrm{m}}} \tag{e}$$

Napomena: Tangencijalno naprezanje fluida na stijenku djeluje u smjeru relativne brzine fluida u odnosu na stijenku.

3.3 U cilindričnoj posudi polumjera R_0 = 220 mm, nalazi se cilindar polumjera R = 216 mm koji rotira stalnom brzinom vrtnje n = 200 o/min za što se troši snaga P = 46 W. Odredite dinamičku viskoznost μ kapljevine koja ispunjava prostor između cilindra i posude u kojem pretpostavite linearni profil brzine, a utjecaj dna zanemarite. Zadano je: h = 20 cm.



Rješenje:

Kutna brzina vrtnje se računa prema

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} \tag{a}$$

a obodna brzina prema

$$u = \omega \cdot R \tag{b}$$

Smično naprezanje je prema Newtonov zakonu viskoznosti za linearni profil brzine

$$\tau = \mu \frac{u}{R_0 - R} \tag{c}$$

Smično naprezanje je konstantno, pa je ukupna smična sila na plašt cilindra

$$F = \tau \cdot 2R\pi h \tag{d}$$

Moment smične sile je

$$M = F \cdot R \tag{e}$$

a snaga koja se troši na vrtnju cilindra

$$P = M \cdot \omega \tag{f}$$

Zamjena prethodnih izraza daje

$$P = F \cdot R \cdot \omega = \tau \cdot 2R^2\pi \cdot h \cdot \omega = 2\mu \frac{u}{R_0 - R} R^2\pi \cdot h \cdot \omega \tag{g}$$

$$P = 2\mu \frac{\omega^2 R^3}{R_0 - R} \pi \cdot h = 2\mu \frac{\pi^3 n^2 R^3}{900\left(R_0 - R\right)} \cdot h \tag{h}$$

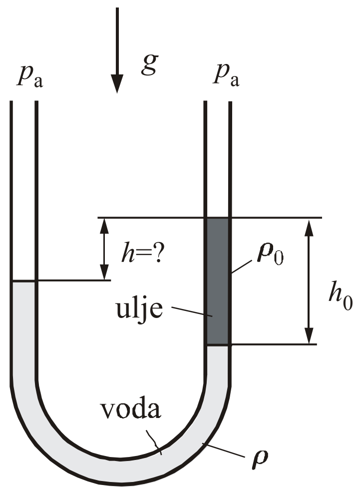
Iz gornjeg izraza se može izračunati tražena dinamička viskoznost

$$\mu = \frac{450P\left(R_0 - R\right)}{\pi^3 n^2 R^3 h} \tag{i}$$

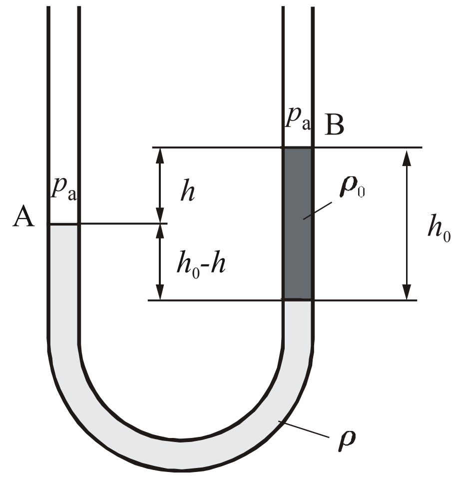
$$\mu = \frac{450 \cdot 46 \cdot \left(0,220 - 0,216\right)}{\pi^3 \cdot 200^2 \cdot 0,216^3 \cdot 0,20} \text{ Pa} \cdot \text{s} \tag{j}$$

$$\mu = 0,0331 \text{ Pa} \cdot \text{s} \tag{k}$$

3.4 U jedan krak U-cijevi u kojoj se nalazi voda gustoće ρ = 999,1 kg/m^3 nadoliveno je ulje gustoće ρ_0 = 820 kg/m^3, prema slici. Ako je visina stupca ulja h_0 = 150 mm, odredite razliku visina h razina ulja i vode.



Rješenje:



Jednadžba manometra od A do B:

$$p_a + \rho g\left(h_0 - h\right) - \rho_0 g h_0 = p_a \tag{a}$$

daje

$$\rho h_0 - \rho h - \rho_0 h_0 = 0 \tag{b}$$

Razlika visina *h* razina ulja i vode je

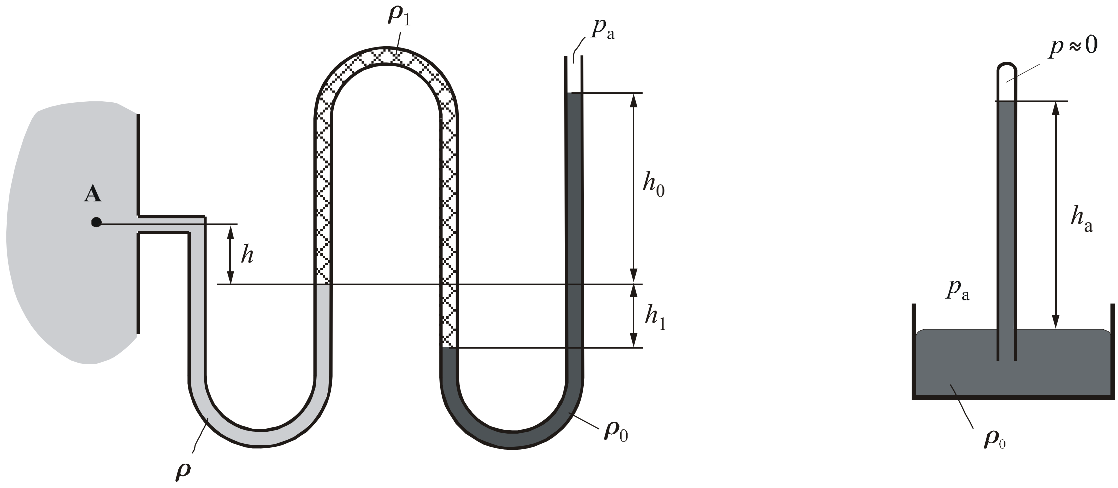
$$h = h_0\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) \tag{c}$$

$$h = 0{,}15\left(1 - \frac{820}{999{,}1}\right)\ \mathrm{m} \tag{d}$$

$$h = 0{,}0269\ \mathrm{m} = 26{,}9\ \mathrm{mm} \tag{e}$$

3.5 Odredite apsolutni i manometarski tlak u točki A spremnika, za otklone manometra i barometra prema slici. Zadano je: ρ = 999 kg/m^3, ρ_1 = 771 kg/m^3, ρ_0 = 13560 kg/m^3,

h = 5 cm, h_0 = 17,5 cm, h_1 = 12,5 cm, h_a = 752 mm.



Rješenje:

Jednadžba barometra: $p_a = \rho_0 g h_a = 99\,999,6\ \text{Pa} = 1000\ \text{mbar} = 1000\ \text{hPa}$ (a)

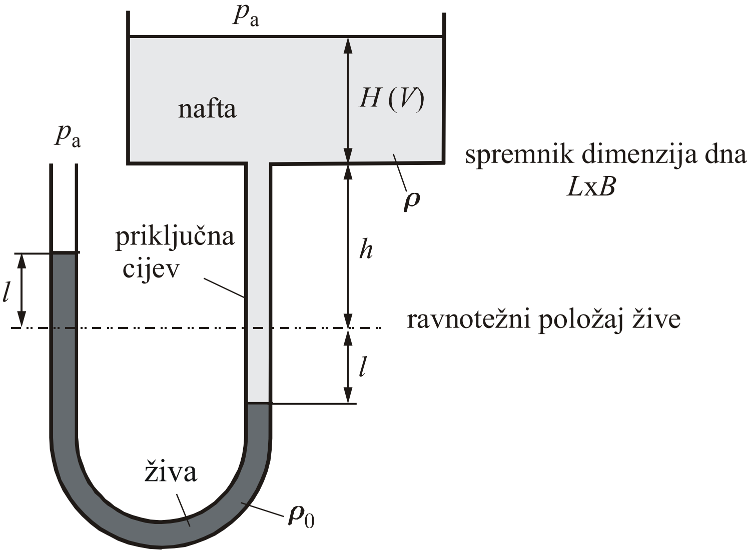
Napomena: $0{,}001\ \text{bar} = 1\ \text{mbar} = 1\ \text{hPa}$ (b)

Jednadžba manometra: $p_\text{A} = p_a + \rho_0 g\left(h_0 + h_1\right) - \rho_1 g h_1 - \rho g h$ (c)

Apsolutni tlak u točki A: $p_\text{A} = 138\,458\ \text{Pa} = 1385\ \text{mbar}$ (d)

Manometarski tlak u točki A: $p_\text{MA} = p_\text{A} - p_a = 38\,458\ \text{Pa} = 385\ \text{mbar}$ (e)

3.6 Hidrostatski manometar može se iskoristiti za mjerenje količine fluida u spremniku oblika paralelopipeda. Odredite zavisnost visine l žive gustoće ρ_0 u lijevom kraku manometra o volumenu V nafte gustoće ρ u spremniku dimenzija dna LxB. Visina h se mjeri od ravnotežnog položaja žive prije punjenja spremnika i priključne cijevi naftom.



Rješenje:

Volumen nafte u spremniku

$$V = L \cdot B \cdot H \quad \Rightarrow \quad H = \frac{V}{L \cdot B} \tag{a}$$

Jednadžba manometra od slobodne površine nafte u spremniku do slobodne površine žive u manometru

$$\cancel{p}_a + \rho g\left(H + h + l\right) - 2\rho_0 g l = \cancel{p}_a \tag{b}$$

Zamjenom prve u drugu jednadžbu se dobije tražena visina

$$\rho\left(\frac{V}{L \cdot B} + h\right) = l\left(2\rho_0 - \rho\right) \tag{c}$$

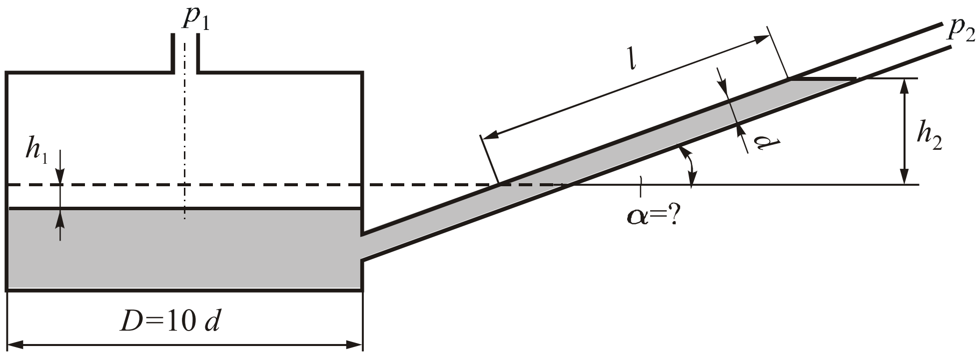
$$l = \frac{\rho}{2\rho_0 - \rho}\left(\frac{V}{L \cdot B} + h\right) \tag{d}$$

U slučaju praznog spremnika $V = 0$ i pune priključne cijevi je $l = l_0$

$$l_0 = \frac{\rho \cdot h}{2\rho_0 - \rho} \tag{e}$$

4. VJEŽBE – STATIKA FLUIDA: MANOMETAR I SILA TLAKA NA RAVNU POVRŠINU

4.1 Osjetljivost hidrostatskog manometra (definirana odnosom otklon manometra / mjerena razlika tlakova) povećava se naginjanjem kraka manometra. Za mikromanometar na slici, duljina l u nagnutom kraku mjeri se od položaja meniskusa kod jednakih tlakova p_1 i p_2. Odredite kut nagiba kraka da bi osjetljivost manometra bila 1mm/Pa. Zadano je: ρ= 800 kg/m^3.



Rješenje:

Iz geometrije na slici je

$$h_2 = l \cdot \sin\alpha \tag{a}$$

Jednadžba manometra od jedne do druge slobodne površine je

$$p_2 + \rho g \left(h_1 + h_2\right) = p_1 \tag{b}$$

Volumen za koji se smanji kapljevina u spremniku jednak je dodatnom volumenu u nagnutom kraku, pa se može pisati

$$\frac{D^2\pi}{4} h_1 = \frac{d^2\pi}{4} l \tag{c}$$

a odavde se može izraziti visina h_1

$$h_1 = l\left(\frac{d}{D}\right)^2 \tag{d}$$

Uvrštavanjem izraza (a) i (d) u (b) dobije se

$$\rho \cdot g \cdot l\left[\left(\frac{d}{D}\right)^2 + \sin\alpha\right] = p_1 - p_2 \tag{e}$$

U zadatku je osjetljivost hidrostatskog manometra definirana odnosom otklon manometra i mjerene razlike tlakova, odnosno

$$\text{osjetljivost} = \frac{l}{p_1 - p_2} = \frac{1}{\rho g \left[\left(\dfrac{d}{D} \right)^2 + \sin\alpha \right]} = 10^{-3}\ \text{m/Pa} \tag{f}$$

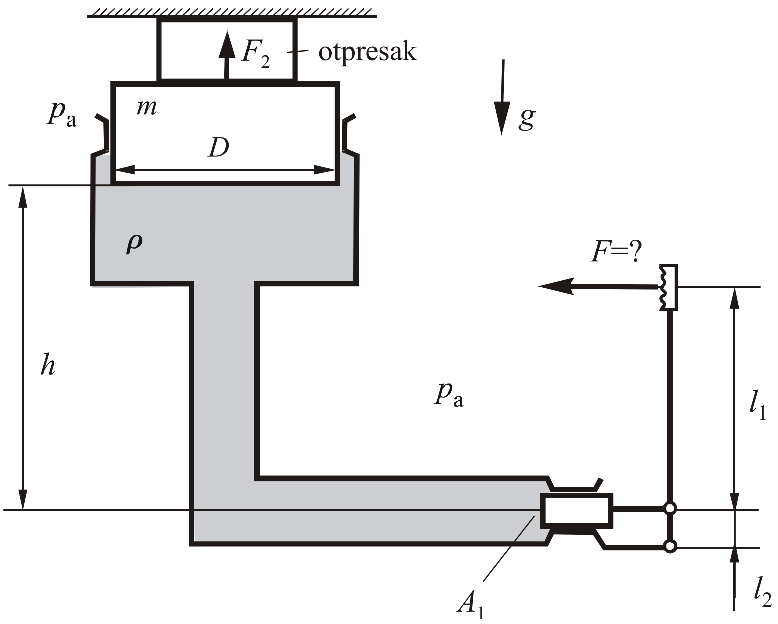
što daje

$$10^{-3} \rho g \left[\left(\frac{d}{D} \right)^2 + \sin\alpha \right] = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{10^3}{\rho g} - \left(\frac{d}{D} \right)^2 = 0{,}117 \tag{g}$$

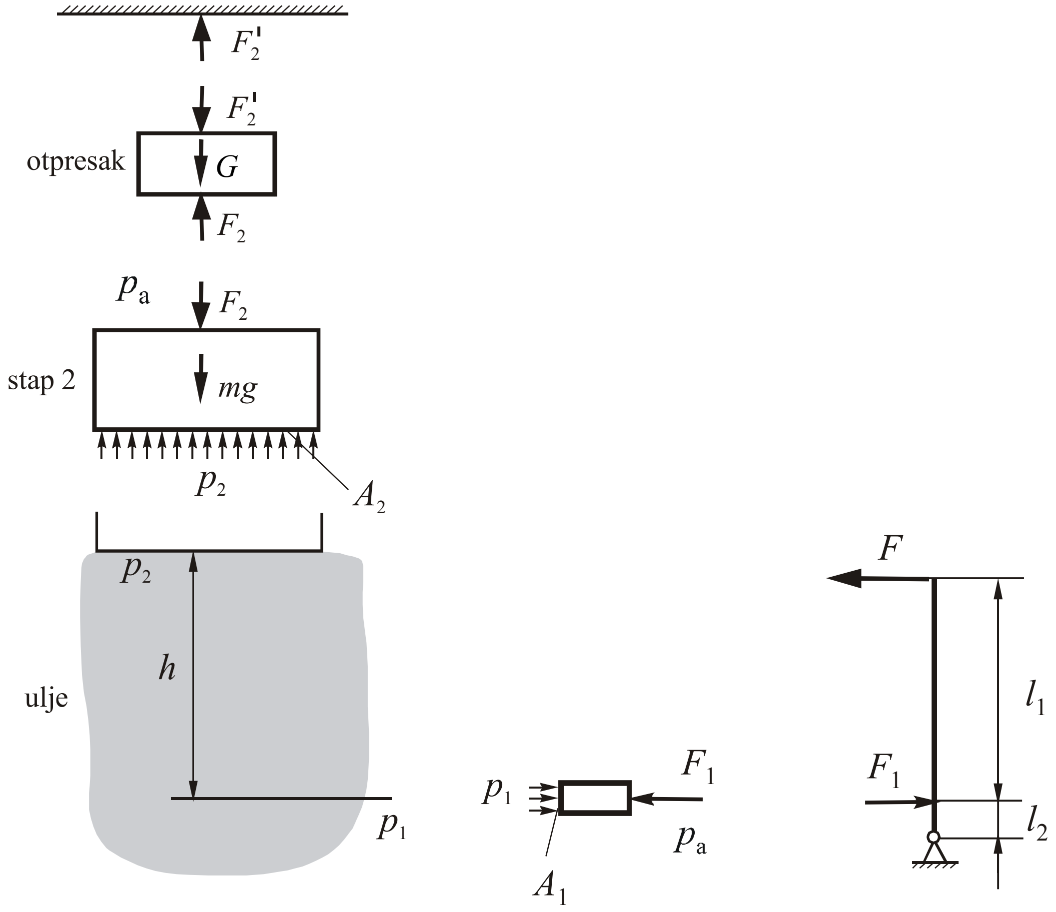
pa je kut nagiba kraka

$$\alpha = 6{,}75^\circ = 6^\circ 44' 45'' \tag{h}$$

4.2 Na slici je shematski prikazan princip rada hidrauličke preše. Odredite kojom silom F treba gurati ručicu da se ostvari sila prešanja F_2 = 4800 N. Zadano je: m = 25 kg, D = 200 mm, h = 1,3 m, l_1 = 52 cm, l_2 = 12 cm, A_1 = 19,6 cm^2, ρ = 820 kg/m^3.



Rješenje:



Jednadžba ravnoteže poluge

$$F \cdot \left(l_1 + l_2\right) = F_1 \cdot l_2 \tag{a}$$

Jednadžba ravnoteže stapa 1

$$p_1 A_1 = p_a A_1 + F_1 \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_a + \frac{F_1}{A_1} \tag{b}$$

Jednadžba manometra

$$p_2 = p_1 - \rho g h \tag{c}$$

Jednadžba ravnoteže stapa 2

$$p_2 A_2 = p_\mathrm{a} A_2 + F_2 + mg \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_\mathrm{a} + \frac{F_2 + mg}{\dfrac{D^2 \pi}{4}} \tag{d}$$

Ovo je sustav četiri jednadžbe s četiri nepoznate veličine: F, F_1, p_1, p_2 koji se može riješiti tako da se tlakovi iz jednadžbi (b) i (d) uvrste u jednadžbu (c)

$$p_a + \frac{F_2 + mg}{\frac{D^2\pi}{4}} = p_a + \frac{F_1}{A_1} - \rho g h \tag{e}$$

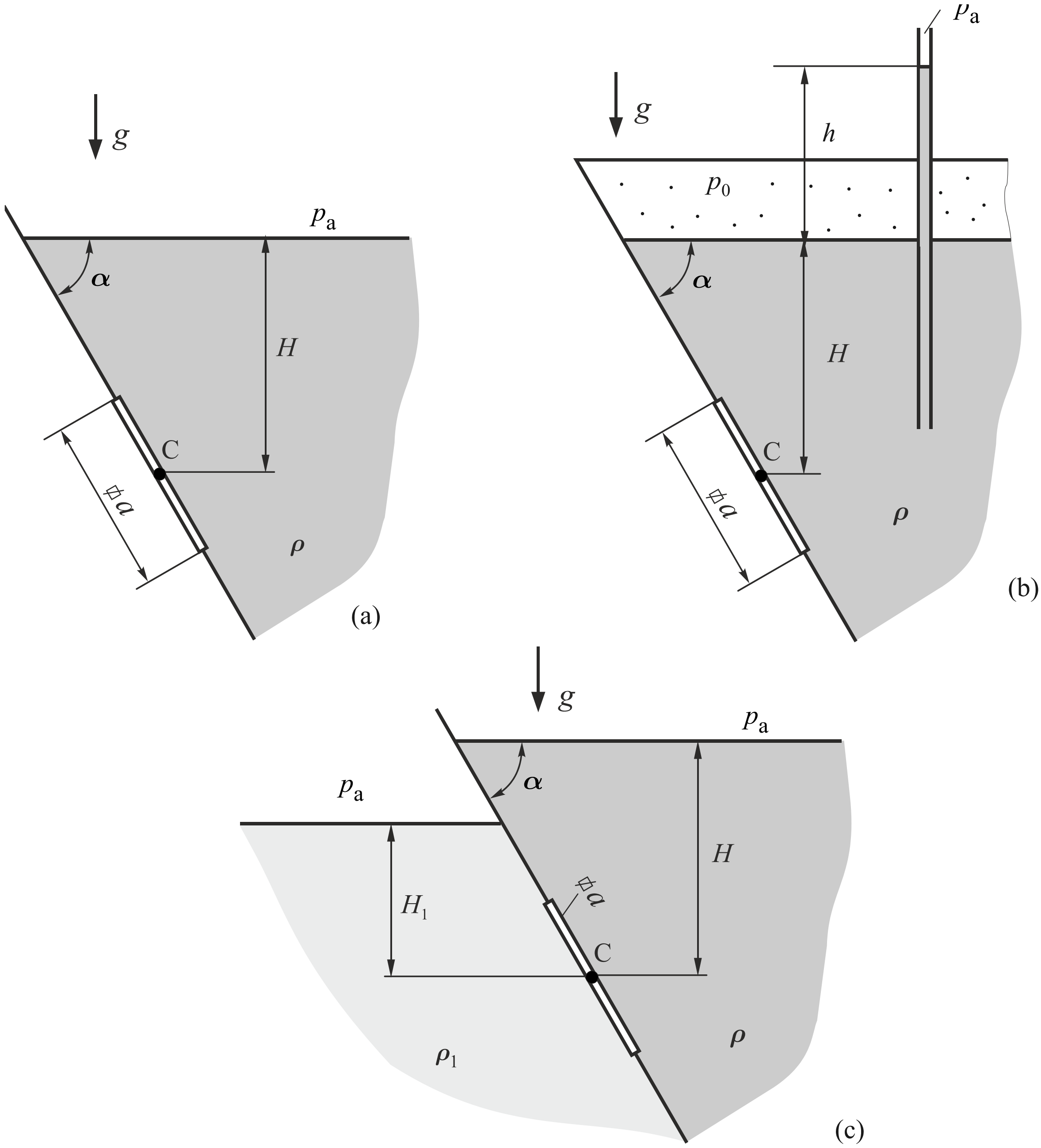
Iz koje se može izračunati sila F_1

$$F_1 = A_1 \left[\rho g h + \frac{F_2 + mg}{\frac{D^2\pi}{4}} \right] = 335 \text{ N} \tag{f}$$

Sila F kojom treba gurati ručicu se sada može izračunati iz jednadžbe (a)

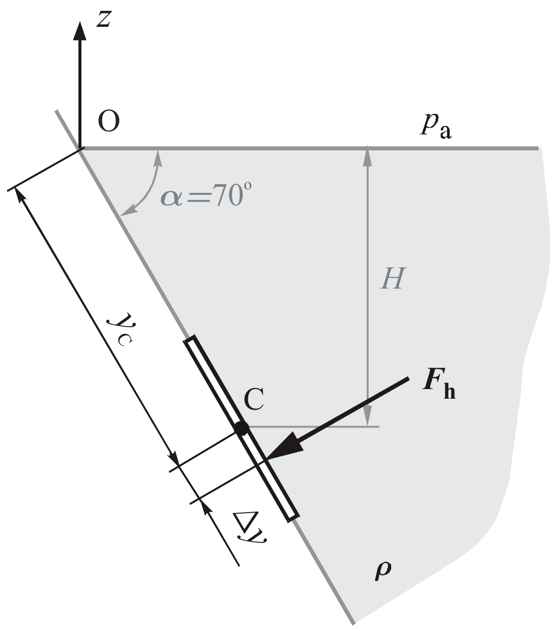
$$F = F_1 \frac{l_2}{l_1 + l_2} = 62{,}9 \text{ N} \tag{g}$$

4.3 Odredite rezultantnu silu tlaka (veličinu, smjer i hvatište) na kvadratni poklopac dimenzije a = 0,8 m, čije se težište nalazi na dubini H = 1,8 m, za slučajeve prema slikama (a), (b) i (c). Zadano je: h = 0,8 m, H_1 = 1,2 m, ρ = 998,2 kg/m^3, ρ_1 = 820 kg/m^3, α = 70^o.



Rješenje:

a)



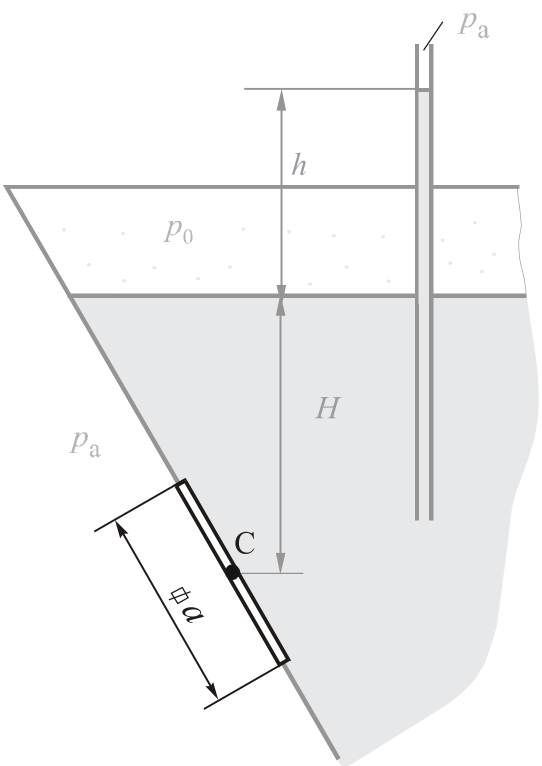
$$F_h = \rho g H \cdot a^2 = 11277 \text{ N} \tag{a}$$

$$y_C = \frac{H}{\sin\alpha} = 1.92 \text{ m} \tag{b}$$

$$\Delta y = \frac{I_{\xi\xi}}{y_C \cdot S} = \frac{\frac{a^4}{12}}{y_C \cdot a^2} = \frac{a^2}{12 \cdot y_C} = 0,0278 \text{ m} \tag{c}$$

Sile konstantnog tlaka p_a izvana i iznutra se poništavaju.

b) 1. način



Izvana djeluje sila uslijed atmosferskog tlaka p_a, a iznutra sila uslijed konstantnog tlaka p_0.

Razlika tih dviju sila je sila F_0 pretlaka p_{M0} iznutra.

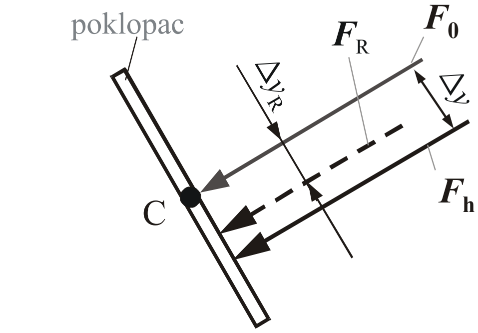
Sila F_h uslijed hidrostatskog tlaka je ista kao pod a).

Jednadžba manometra

$$p_a + \rho g h = p_0 \tag{d}$$

$$p_{M0} = p_0 - p_a = \rho g h = 7831 \text{ Pa} \tag{e}$$

$$F_0 = p_{M0} \cdot a^2 = 5012 \text{ N} \tag{f}$$



Rezultantna sila :

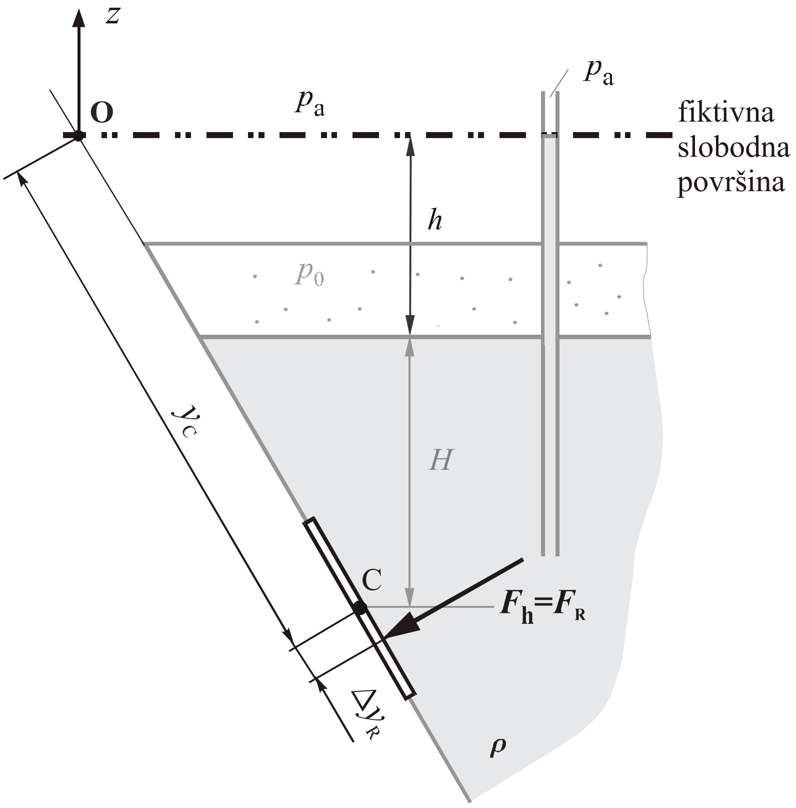
$$F_R = F_0 + F_h = 16289 \text{ N} \tag{g}$$

$$\sum M_C = M_{F_R} \tag{h}$$

$$F_R \cdot \Delta y_R = F_h \cdot \Delta y \tag{i}$$

$$\Delta y_R = \Delta y \cdot \frac{F_h}{F_R} = 0{,}0193 \text{ m} \tag{j}$$

b) 2. način



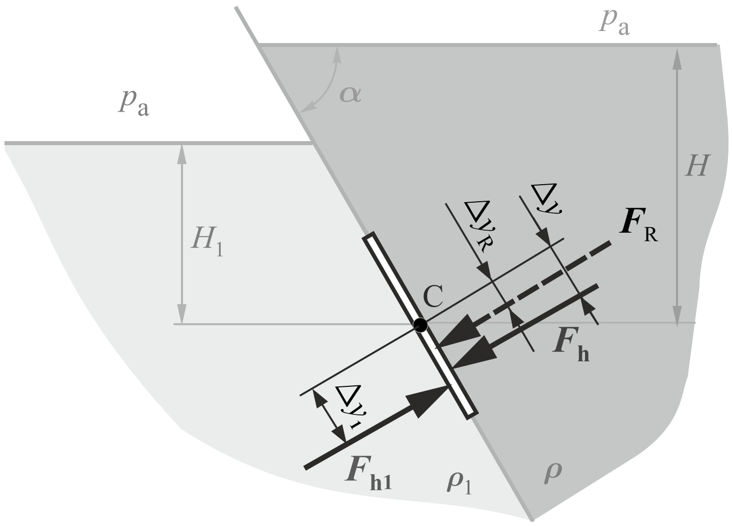
Ako se pretlak p_{M0} pretvori u visinu tlaka $\frac{p_{M0}}{\rho g} = h$ dolazi se do fiktivne slobodne površine na kojoj vlada atmosferski tlak, te na površinu djeluje samo sila uslijed hidrostatskog tlaka računata na temelju dubine mjerene od fiktivne slobodne površine.

$$F_h = F_R = \rho g \left(H + h\right) \cdot a^2 = \\ = 16289 \text{ N} \tag{k}$$

$$y_C = \frac{H+h}{\sin\alpha} = 2{,}77 \text{ m} \tag{l}$$

$$\Delta y_R = \frac{I_{\xi\xi}}{y_C \cdot S} = \frac{\frac{a^4}{12}}{y_C \cdot a^2} = \frac{a^2}{12 \cdot y_C} = 0{,}0193 \text{ m} \tag{m}$$

c)



Sile konstantnog tlaka p_a se poništavaju. Sila F_h uslijed hidrostatskog tlaka je ista kao pod a).

$$F_{h1} = \rho_1 g H_1 \cdot a^2 = 6176 \text{ N} \tag{n}$$

$$y_{C1} = \frac{H_1}{\sin\alpha} = 1,28 \text{ m} \tag{o}$$

$$\Delta y_1 = \frac{I_{\xi\xi}}{y_{C1} \cdot S} = \frac{\frac{a^4}{12}}{y_{C1} \cdot a^2} = 0,0418 \text{ m} \tag{p}$$

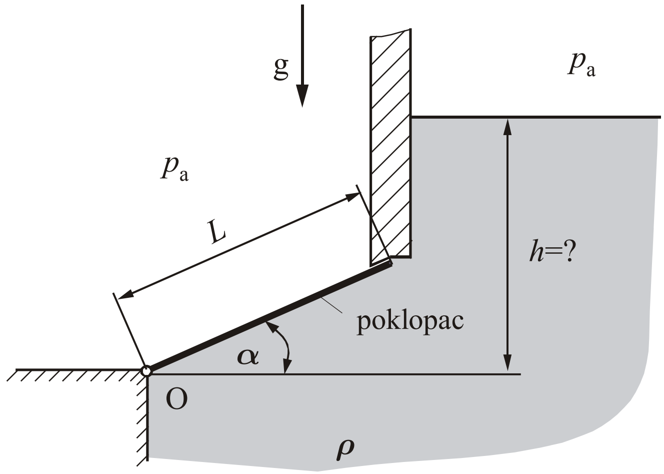
$$F_R = F_h - F_{h1} = 5101 \text{ N} \tag{q}$$

$$\sum M_C = M_{F_R} \tag{r}$$

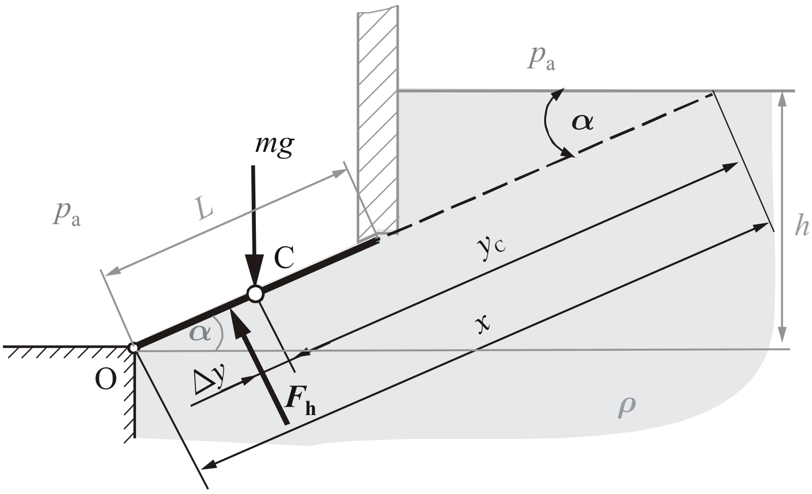
$$F_h \cdot \Delta y - F_{h1} \cdot \Delta y_1 = F_R \cdot \Delta y_R \tag{s}$$

$$\Delta y_R = \frac{F_h \cdot \Delta y - F_{h1} \cdot \Delta y_1}{F_R} = 0,0109 \text{ m} \tag{t}$$

4.4 Potrebno je odrediti na koju visinu *h* treba spustiti razinu vode, da bi se poklopac jedinične širine, okretljiv u točki O, prema slici, otvorio uslijed vlastite težine. Gustoća poklopca je jednolika, a masa mu je m = 250 kg. Zadano je: L = 160 cm , $\alpha = 15^\circ$, ρ = 998 kg/m^3.



Rješenje:



Na poklopac djeluje vlastita težina i sila hidrostatskog tlaka. Poklopac će se otvoriti kada moment sile težine u odnosu na točku O bude veći od momenta sile hidrostatskog tlaka.

Krak sile težine u odnosu na točku O je $\frac{L}{2}\cos\alpha$ a krak sile F_h hidrostatskog tlaka je $\frac{L}{2} - \Delta y$, te vrijedi

$$mg\frac{L}{2}\cos\alpha > F_h \cdot \left(\frac{L}{2} - \Delta y\right) \tag{a}$$

Sila hidrostatskog tlaka je definirana izrazom

$$F_h = \rho g h_C A = \rho g \cdot y_C \sin\alpha \cdot L \cdot 1 \tag{b}$$

a pomak

$$\Delta y = \frac{I_{\xi\xi}}{y_C A} = \frac{1 \cdot L^3}{12 \cdot y_C \cdot L \cdot 1} = \frac{L^2}{12 \cdot y_C} \tag{c}$$

Uvrštavanjem izraza (b) i (c) u (a) slijedi izraz za y_C

$$y_C < \frac{m}{\rho L} ctg\,\alpha + \frac{L}{6} = 0,851\,\mathrm{m} \tag{d}$$

Iz slike slijedi granična visina h fluida

$$h = x \sin\alpha = \left(y_C + \frac{L}{2} \right) \sin\alpha = 0,427\,\mathrm{m} \tag{e}$$

Očito je $h > L \sin\alpha$ = 0,414 m, što znači da je razina fluida iznad gornjeg ruba poklopca, kao što je pretpostavljeno na slici. Da to nije tako, trebalo bi ponoviti proračun uz pretpostavku da je samo dio površine poklopca u dodiru s fluidom.