POUZDANOST TEHNIČKIH SUSTAVA

Ver. 23.10.08.

Predmetni nastavnik:
dr. sc. I. Čala, izv. prof.

Obrada:
dr. sc. D. Lisjak

S A D R Ž A J

1. POUZDANOST

• Definicija pouzdanosti

Pouzdanost je vjerojatnost da će sustav raditi na predviđeni način u određenom vremenu i u predviđenim radnim uvjetima, uz minimalne prekide uzrokovane greškama u dizajnu ili radu.

- **Vjerojatnost kvara**
  - Uvijek postoji mogućnost kvara i moguće ju je statistički odrediti.
- **Izvođenje namijenjene funkcije**
  - Sustav obavlja funkciju za koju je dizajniran. Ako ne radi ono što se očekuje,nije pouzdan.
- **Rad u određenom vremenskom periodu**
  - Postoji određena vjerojatnost da se kvar neće dogoditi prije isteka tog vremenskog perioda.

Pouzdanost mora biti uključena u proces dizajniranja sustava!

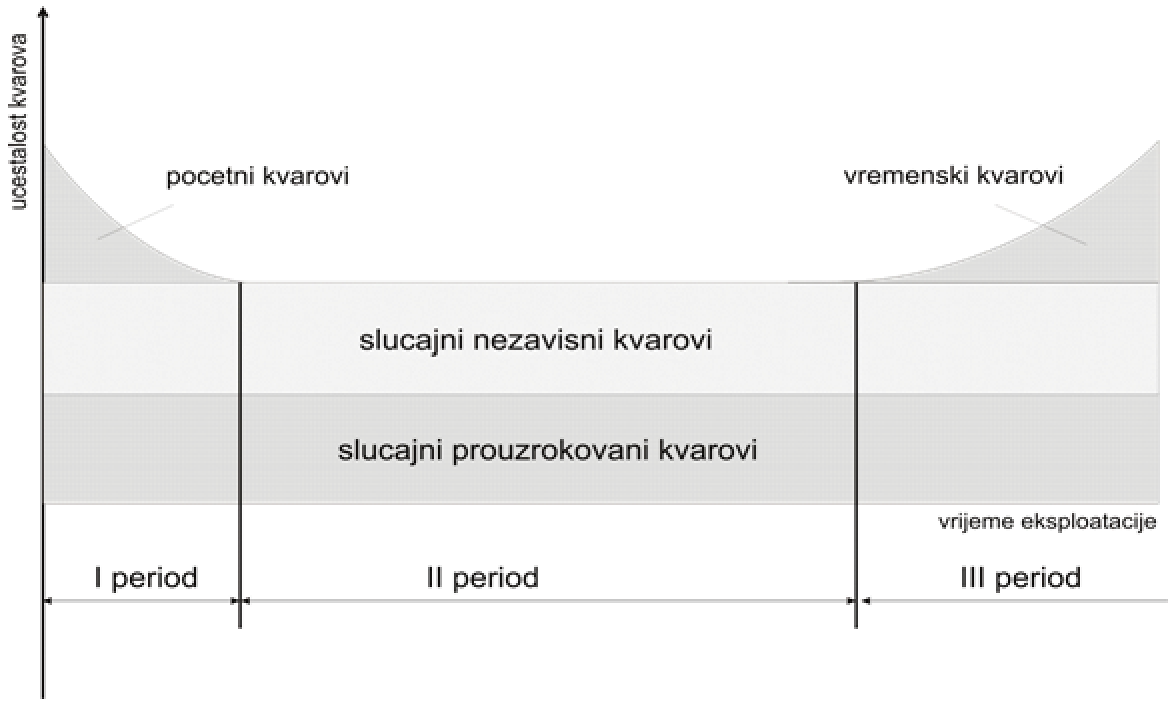
- **Metode određivanja pouzdanosti**

  - **"a priori" (prediktivna) metoda**
    - **Pouzdanost sustava predviđa se "unaprijed" tj. u fazi razvoja i projektiranja sustava i to na temelju poznavanja komponenti sustava i njihovih pouzdanosti.**

  - **"a posteriori" metoda**
    - **Pouzdanost sustava određuje se na temelju podataka dobivenih iz eksploatacije sustava. Ova metoda vrši verifikaciju "a priori" metode te omogućava daljnju optimizaciju sustava.**

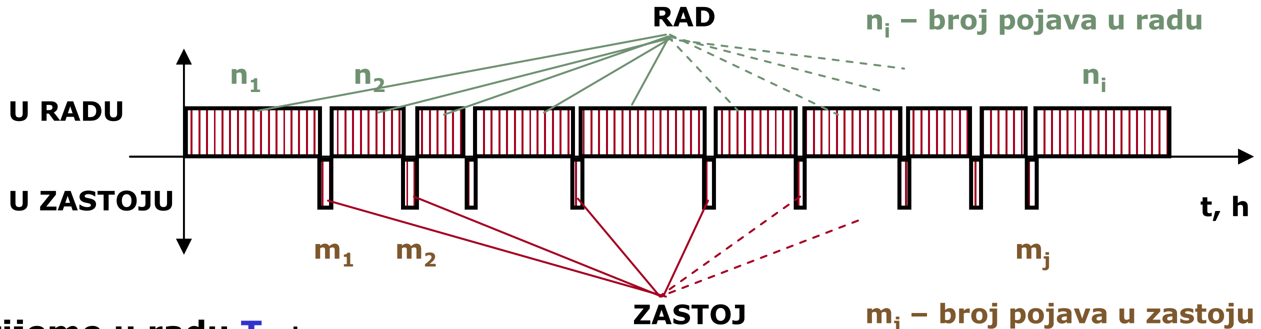
- **Postupci za određivanje pouzdanosti**
  - **ANALITIČKI**
    - **Postupak se temelji na poznavanju strukture procesa poznavanja kvarova pojedinih elemenata sustava.**
  - **EKSPERIMENTALNI**
    - **Postupak se temelji na podacima dobivenim u laboratorijskim ili u uvjetima eksploatacije.**
  - **SIMULACIJSKI**
    - **Postupak se temelji na računalnim simulacijama rada odnosno ispada sustava.**

- ***Dijagram kade*** **– tipicna prezentacija ucestalosti kvarova**



2. ANALIZA POUZDANOSTI ELEMENATA

2.1 Znacajke pouzdanosti



1.<u>Vrijeme u radu</u> T_{ur}:

- Ukupno:

$$T_{ur} = \sum_{i=1}^{n} t_{uri}, \; h$$

- Srednje:

$$T_{ur\_sred} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{uri}}{n}, \; h$$

- Srednje kvadratno odstupanje (varijanca):

$$\sigma_{ur}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (t_{uri} - T_{ur\_sred})^2}{n}, \; h$$

2. <u>Vrijeme u zastoju</u> T_{uz}:

- Ukupno:

$$T_{uz} = \sum_{j=1}^{m} t_{uzj}, h$$

- Srednje:

$$T_{uz\_sred} = \frac{\sum_{j=1}^{m} t_{uzj}}{n}, h$$

- Srednje kvadratno odstupanje (varijanca):

$$\sigma_{uz}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{m} \left(t_{uzi} - T_{uz\_sred}\right)^2}{n}, h$$

3. <u>Pouzdanost</u> $R(t)$:

$$R(t) = \frac{n - N(t)}{n}$$

n – ukupni broj pojava **U RADU** ili ukupni broj elemenata u trenutku t=0.

$N(t)$ – ukupni broj stanja ili elemenata **U ZASTOJU** do trenutka t.

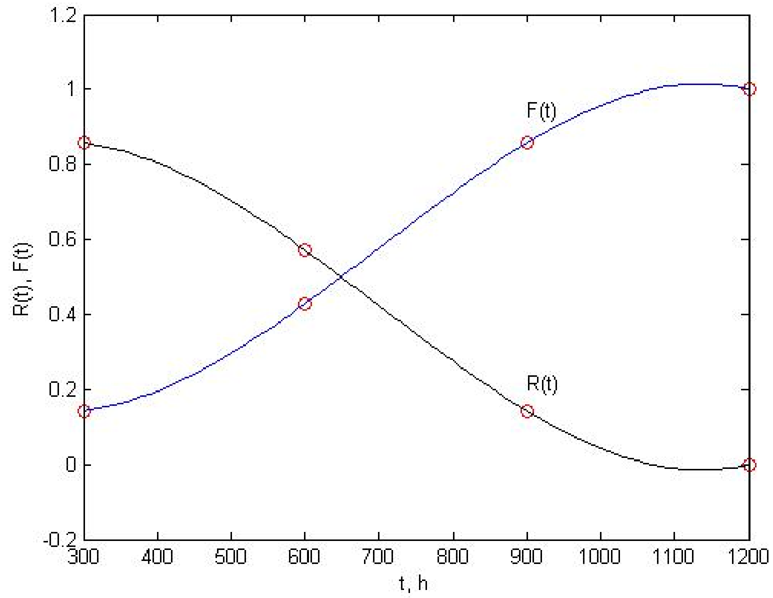
$n(t)$ – ukupni broj stanja U RADU ili ukupni broj ispravnih elemenata do trenutka t.

4. <u>Nepouzdanost</u> F(t):

$$F(t) = \frac{N(t)}{n} = 1 - R(t)$$

- Zbroj vjerojatnosti pojava u radu **R(t)** i zastoju **F(t)** uvijek je jednak jedinici:

$$F(t) + R(t) = 1$$



Tipičane krivulje pouzdanosti **R(t)** i nepouzdanosti **F(t)**

5. <u>Učestalost</u> f(t):

$$f(t) = \frac{N(\Delta t)}{n * \Delta t}, h^{-1}$$

- gdje **Δ(t)** je širina intervala:

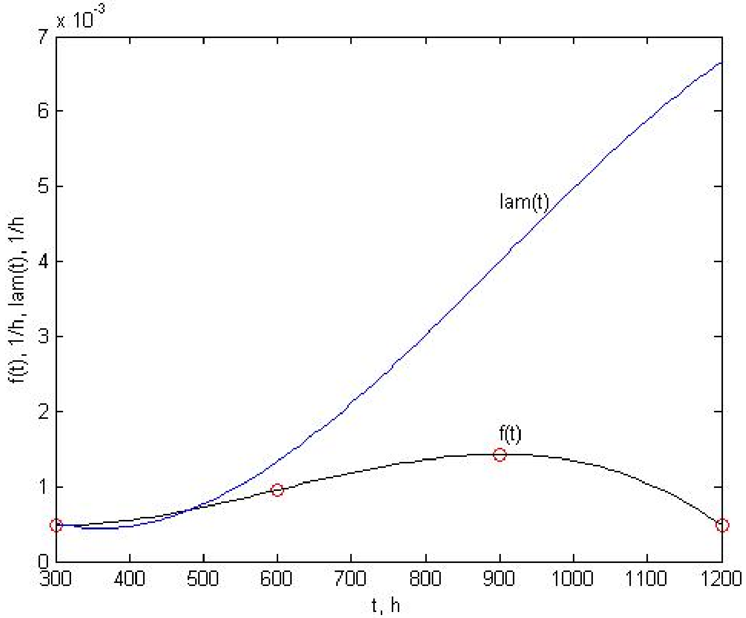
$$\Delta(t) = \frac{t_{max} - t_{min}}{1 + 3,3\log(n)}, h^{-1}$$

t_{min} – vrijeme pojave prvog zastoja. Često je $t_{min}=0$ zbog početka mjerenja.

t_{max} – vrijeme posljenje pojave zastoja.

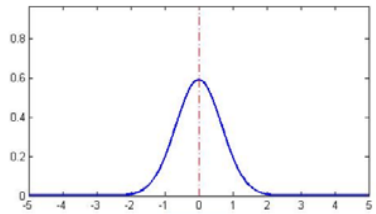
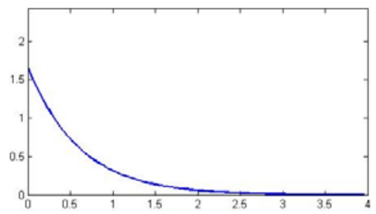
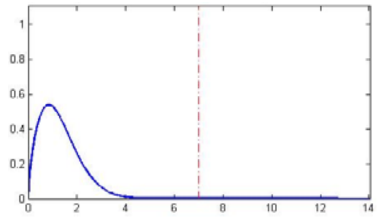
6. <u>Intenzitet</u> λ(t):

$$\lambda(t) = \frac{N(\Delta t)}{\frac{n(t-\Delta t)+n(t)}{2}\Delta t}, \ h^{-1}$$

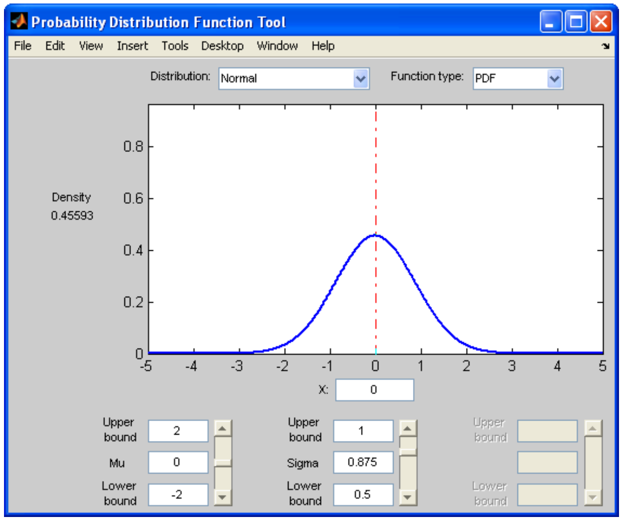


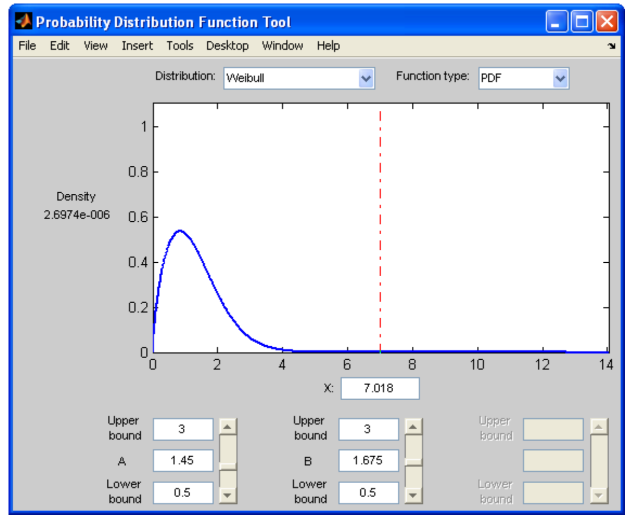
Tipične krivulje učestalosti f(t) i intenziteta λ(t)

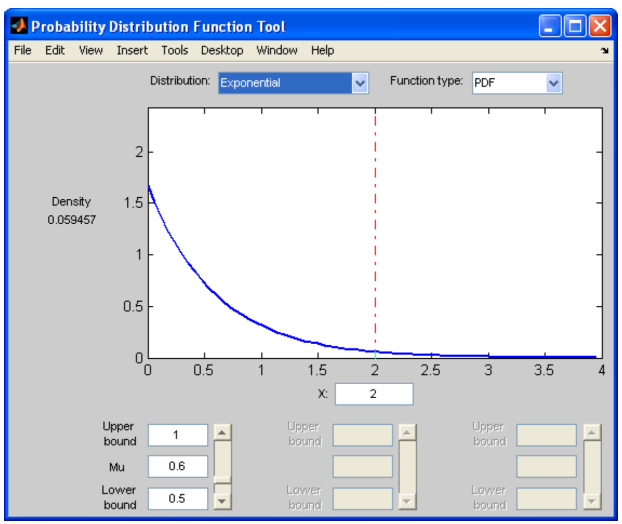
2.2 Funkcije razdioba u teoriji pouzdanosti

RAZDIOBA	GRAF	Pouzdanost $R(t)$	Učestalost $f(t)$	Intenzitet $\lambda(t)$	Vrijeme u radu T_{ur}
Normalna		$0{,}5+\Theta\left(-\frac{t-T_{ur\_sred}}{\sigma}\right)$	$0{,}5+\frac{1}{\sigma}\Theta\left(-\frac{t-T_{ur\_sred}}{\sigma}\right)$	$\frac{f(t)}{R(t)}$	T_{ur_sred}
Eksponen.		$e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\lambda = \text{const.}$	$\left(\frac{1}{\lambda}\right)$
Weibull		$e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$	$\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$	$\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$	$\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\eta$

2.3 Simulacija funkcija razdiobe







Matlab: ***disttool***

Vrijeme u radu T_{ur}

$$T_{ur} = \sum_{i=1}^{n} t_{uri},\ h$$

$$T_{ur\_sred} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{uri}}{n},\ h$$

$$\sigma_{ur}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (t_{uri} - T_{ur\_sred})^2}{n},\ h$$

$$\sigma_{ur} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (t_{uri\_sred} - T_{ur\_sred})^2}{n} N(\Delta t)},\ h$$

Vrijeme u zastoju T_{uz}

$$T_{uz} = \sum_{j=1}^{m} t_{uzj},\ h$$

$$T_{uz\_sred} = \frac{\sum_{j=1}^{m} t_{uzj}}{n},\ h$$

$$\sigma_{uz}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{m} (t_{uzi} - T_{uz\_sred})^2}{n},\ h$$

$$\sigma_{uz} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} (t_{uzi\_sred} - T_{uz\_sred})^2}{n} N(\Delta t)},\ h$$

Pouzdanost $R(t)$

$$R(t) = \frac{n - N(t)}{n}$$

Nepouzdanost $F(t)$

$$F(t) = \frac{N(t)}{n} = 1 - R(t)$$

Učestalost $f(t)$

$$f(t) = \frac{N(\Delta t)}{n * \Delta t},\ h^{-1}$$

Intenzitet $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = \frac{N(\Delta t)}{\frac{n(t-\Delta t) + n(t)}{2} \Delta t},\ h^{-1}$$

Širina intervala $\Delta(t)$

$$\Delta(t) = \frac{t_{max} - t_{min}}{1 + 3{,}3 \log(n)},\ h^{-1}$$

Normalna razdioba

$$R(t) = 0{,}5 + \Theta\left(-\frac{t_{uri} - T_{ur\_sred}}{\sigma_{ur}}\right)$$

$$f(t) = 0{,}5 + \frac{1}{\sigma_{ur}} \Theta\left(-\frac{t_{uri} - T_{ur\_sred}}{\sigma_{ur}}\right),\ h^{-1}$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)},\ h^{-1}$$

$$T_{ur\_sred} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{t_{uri} + t_{uri+1}}{2} N(\Delta t),\ h^{-1}$$

Eksponencijalna razdioba

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ h^{-1}$$

$$\lambda(t) = \text{const.},\ h^{-1}$$

$$T_{ur} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Weibull-ova razdioba

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$$

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}},\ h^{-1}$$

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1},\ h^{-1}$$

$$T_{ur} = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\eta,\ h$$

2.4 Rješavanje problema primjenom znacajki pouzdanosti

Zadatak 1.

U procesu rada radijalne bušilice dobivena su sljedeća vremena u satima:

	Vrijeme, h									
RAD	**47**	**23**	**16**	**34**	**41**	**28**	**32**	**20**	**18**	**39**
KVAR	**2**	**4**	**3**	**2**	**5**	**3**	**1**	**5**	**2**	**-**

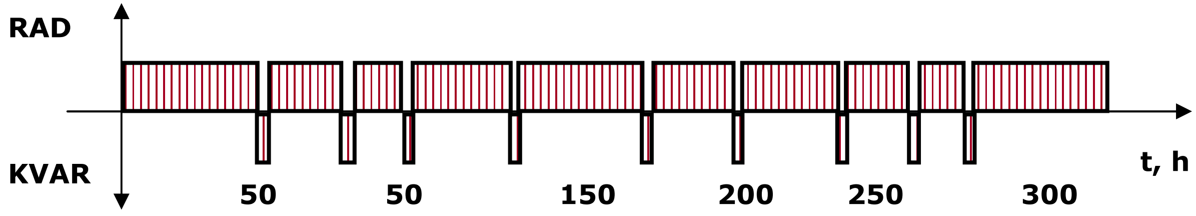
Potrebno je:

a) Prikazati vremensku sliku stanja RAD – ZASTOJ:

b) Odrediti ukupno, srednje vrijeme i srednje kvadratno odstupanje vremena u RADU i KVARU

Rješenje:

a) Vremenska slika stanja RAD – KVAR:



b) Vrijeme u radu T_{ur}:

- Ukupno:

$$T_{ur} = \sum_{i=1}^{10} t_{uri} = 47 + 23 + 16 + 34 + 41 + \ldots + 39 = 298\,\text{h}$$

- Srednje:

$$T_{ur\_\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{10} t_{uri}}{n} = \frac{298}{10} = 29{,}8\,\text{h}$$

- Srednje kvadratno odstupanje:

$$\sigma_{ur}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} \left(t_{uri} - T_{ur\_\bar{x}}\right)^2}{n-1} = \frac{(47-29{,}8)^2 + (23-29{,}8)^2 + \ldots + (39-29{,}8)^2}{10-1} = 11{,}73\,\text{h}$$

b) Vrijeme u kvaru T_{uk}:

- Ukupno:

$$T_{uk} = \sum_{j=1}^{9} t_{ukj} = 2 + 4 + 3 + \ldots + 2 = 27\ h$$

- Srednje:

$$T_{uk\_\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{9} t_{ukj}}{n} = \frac{27}{9} = 3\ h$$

- Srednje kvadratno odstupanje:

$$\sigma_{uk}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{9} (t_{uki} - T_{uk\_\bar{x}})^2}{n-1} = \frac{(2-3)^2 + (4-3)^2 + \ldots + (2-3)^2}{9-1} = 2{,}25\ h$$

Zadatak 2.

Ispitivanjem pouzdanosti 7 remena elektromotora dobivena su sljedeća vremena kvarova istih u satima: 260, 400, 540, 680, 800, 890, 1200. Za navedena vremena kvarova remena potrebno je prema intervalima kvara analizirati sljedeće:

a) Odrediti broj intervala **z**,

b) Odrediti širinu intervala **Δt**,

c) Odrediti broj kvarova po intervalu **N(Δt)**,

d) Izračunati pouzdanost **R(t)**,

e) Izračunati nepouzdanost **F(t)**,

f) Izračunati učestalost kvarova **f(t)**,

g) Izračunati intenzitet kvarova **λ(t)**,

h) Grafički prikazati funkcije **R(t)**, **F(t)**, **f(t)**, **λ(t)**.

Rješenje:

a) Broj intervala (**z**) izračunava se prema izrazu:

$$z = 5\log n$$

$$z = 5\log n = 5\log 7 = 4{,}22 \approx 4$$

b) Širina intervala (**Δt, h**) s obzirom da je najduže vrijeme ispravnog rada jednako vremenu sedmog vremena t_{max}**=1200h** i **z=4** izračunava se prema izrazu.

$$\Delta t = \frac{t_{max}}{z} = \frac{1200}{4} = 300\,h$$

c) Broj kvarova **N(Δt)** po intervalima širine **Δt=300 h** je:

Za Δt=0 ÷ 300 h ---> N(Δt)=1
Za Δt=300 ÷ 600h ---> N(Δt)=2
Za Δt=600 ÷ 900h ---> N(Δt)=3
Za Δt=900 ÷ 1200h ---> N(Δt)=1

d) Pouzdanosti **R(t)** izračunava se prema izrazu:

$$R(t) = \frac{n - N(t)}{n}$$

$$R(300) = \frac{n - N(300)}{n} = \frac{7-1}{7} = 0,86$$

$$R(600) = \frac{n - N(600)}{n} = \frac{7-(1+2)}{7} = 0,57$$

$$R(900) = \frac{n - N(900)}{n} = \frac{7-(1+2+3)}{7} = 0,14$$

$$R(1200) = \frac{n - N(1200)}{n} = \frac{7-(1+2+3+1)}{7} = 0,0$$

e) Nepouzdanosti **F(t)** od **t=0-1200 h** a za svaki **Δt=300 h** se određuje se prema izrazu:

$$F(t) = \frac{N(t)}{n} = 1 - R(t)$$

$$F(300) = 1 - R(300) = 1 - 0,86 = 0,1428$$

$$F(600) = 1 - R(600) = 1 - 0,57 = 0,4284$$

$$F(900) = 1 - R(900) = 1 - 0,14 = 0,8571$$

$$F(1200) = 1 - R(1200) = 1 - 0,0 = 1,000$$

f) Funkcija učestalosti kvarova **f(t)** određuje se prema izrazu:

$$f(t) = \frac{N(\Delta t)}{n * \Delta t},\ h^{-1}$$

$$f(300) = \frac{N(300)}{n * (\Delta t)} = \frac{1}{7 * 300} = 4{,}76 * 10^{-4},\ h^{-1}$$

$$f(600) = \frac{N(600)}{n * (\Delta t)} = \frac{2}{7 * 300} = 9{,}52 * 10^{-4},\ h^{-1}$$

$$f(900) = \frac{N(900)}{n * (\Delta t)} = \frac{3}{7 * 300} = 14{,}29 * 10^{-4},\ h^{-1}$$

$$f(1200) = \frac{N(1200)}{n * (\Delta t)} = \frac{1}{7 * 300} = 4{,}76 * 10^{-4},\ h^{-1}$$

g) Funkcija intenziteta kvarova **λ(t)** određuje se prema izrazu:

$$\lambda(t) = \frac{N(\Delta t)}{\frac{n(t-\Delta t)+n(t)}{2}\Delta t},\ h^{-1}$$

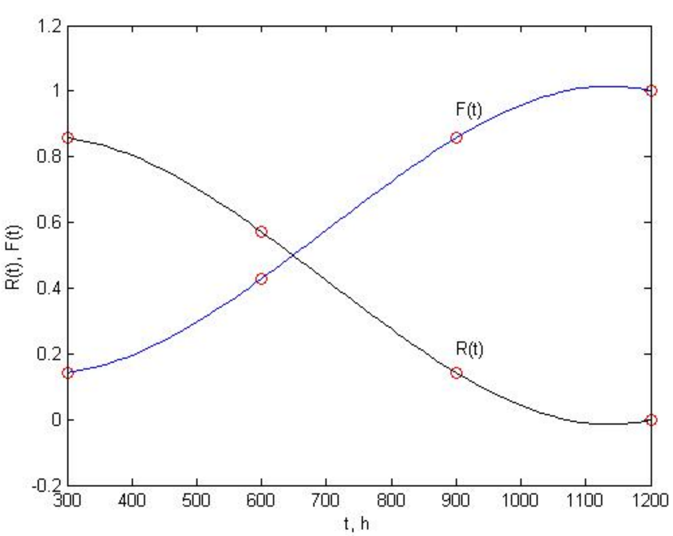
$$\lambda(300) = \frac{N(300)}{\frac{n(300-300)+n(300)}{2}\Delta t} = \frac{1}{\frac{(7-0)+(7-1)}{2}300} = 5{,}128 * 10^{-4},\ h^{-1}$$

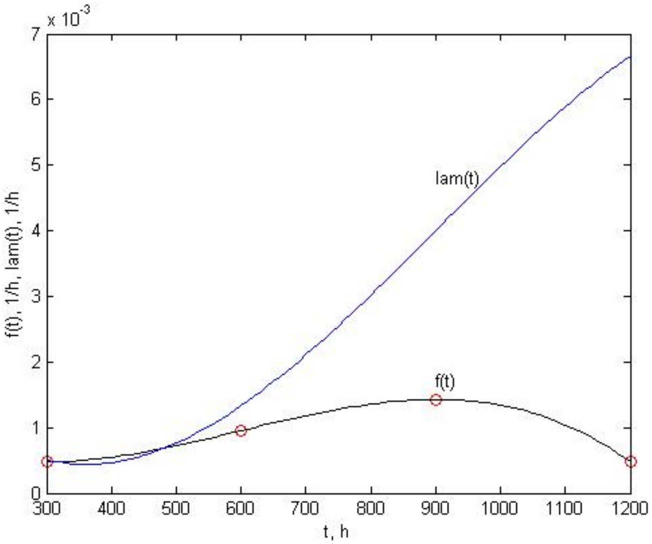
$$\lambda(600) = \frac{N(300)}{\frac{n(600-300)+n(600)}{2}\Delta t} = \frac{2}{\frac{(7-1)+(7-(1+2))}{2}300} = 13{,}33 * 10^{-4},\ h^{-1}$$

$$\lambda(900) = \frac{N(300)}{\frac{n(900-300)+n(900)}{2}\Delta t} = \frac{3}{\frac{(7-(1+2))+(7-(1+2+3))}{2}300} = 13{,}33 * 10^{-4},\ h^{-1}$$

$$\lambda(1200) = \frac{N(300)}{\frac{n(1200-300)+n(1200)}{2}\Delta t} = \frac{1}{\frac{(7-(1+2+3))+(7-(1+2+3+1))}{2}300} = 66{,}67 * 10^{-4},\ h^{-1}$$

h) Grafički prikazi funkcija **R(t)**, **F(t)**, **f(t)**, **λ(t)**.





Zadatak 3.

Ispitivano je 1000 vratila tijekom 6000 sati rada unutar kojeg su sva vratila otkazala funkciju. Tablicom je dan prikaz broja vratila (N) koja su otkazivala svakih $\Delta t=1000$ sati rada.

	Vrijeme (t), Broj vratila u kvaru (N)						
t, h	**0**	**1000**	**2000**	**3000**	**4000**	**5000**	**6000**
N (Δt)	**0**	**80**	**120**	**200**	**100**	**300**	**200**

Potrebno je:

a) Izračunati i grafički prikazati funkciju pouzdanosti **$R(t)$**

b) Izračunati i grafički prikazati funkciju nepouzdanosti **$F(t)$**

Rješenje:

a) Pouzdanost **R(t)** od t=0-6000 sati a za svaki od 1000 sati se određuje se prema izrazu:

$$R(t) = \frac{n - N(t)}{n}$$

$$R(0) = \frac{n - N(0)}{n} = \frac{1000 - 0}{1000} = 1{,}0$$

$$R(1000) = \frac{n - N(1000)}{n} = \frac{1000 - 80}{1000} = 0{,}92$$

$$R(2000) = \frac{n - N(2000)}{n} = \frac{1000 - (80 + 120)}{1000} = 0{,}80$$

$$R(3000) = \frac{n - N(3000)}{n} = \frac{1000 - (80 + 120 + 200)}{1000} = 0{,}60$$

$$R(4000) = \frac{n - N(4000)}{n} = \frac{1000 - (80 + 120 + 200 + 100)}{1000} = 0{,}50$$

$$R(5000) = \frac{n - N(5000)}{n} = \frac{1000 - (80 + 120 + 200 + 100 + 300)}{1000} = 0{,}20$$

$$R(6000) = \frac{n - N(6000)}{n} = \frac{1000 - (80 + 120 + 200 + 100 + 300 + 200)}{1000} = 0{,}0$$

b) Nepouzdanost **F(t)** od t=0-6000 sati a za svaki od 1000 sati se određuje se prema izrazu:

$$\mathbf{F(t) = \frac{N(t)}{n} = 1 - R(t)}$$

$$\mathbf{F(1000) = 1 - R(1000) = 1 - 0{,}92 = 0{,}08}$$

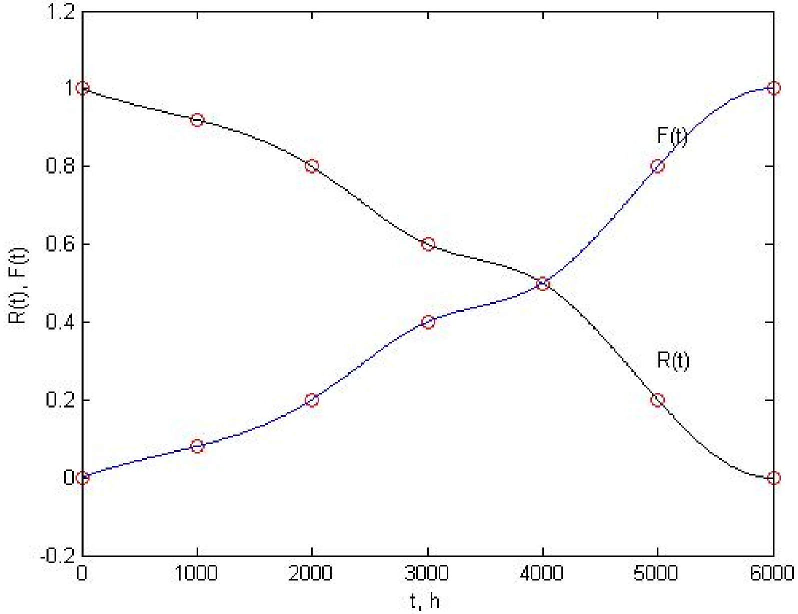
$$\mathbf{F(2000) = 1 - R(2000) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20}$$

$$\mathbf{F(3000) = 1 - R(3000) = 1 - 0{,}60 = 0{,}40}$$

$$\mathbf{F(4000) = 1 - R(4000) = 1 - 0{,}50 = 0{,}50}$$

$$\mathbf{F(5000) = 1 - R(5000) = 1 - 0{,}20 = 0{,}80}$$

$$\mathbf{F(6000) = 1 - R(6000) = 1 - 0{,}0 = 1{,}0}$$



Zadatak 4.

U tijeku ispitivanja 100 ležajeva od t=0 h do t=200 h otkazalo je 15, a od t=200 h do t=400h još 10 ležajeva. Potrebno je odrediti funkciju učestalosti kvarova f(t) i intenziteta kvarova λ(t) za t=200 h i t=400 h.

Rješenje:

a) Funkcija učestalosti kvarova **f(t)** određuje se prema izrazu:

$$f(t) = \frac{N(\Delta t)}{n * \Delta t}$$

$$f(200) = \frac{N(200-0)}{n*(200-0)} = \frac{N(200)}{n*200} = \frac{15}{100*200} = 7{,}51*10^{-4}h^{-1}$$

$$f(400) = \frac{N(400-200)}{n*(400-200)} = \frac{N(200)}{n*200} = \frac{10}{100*200} = 5{,}0*10^{-4}h^{-1}$$

b) Funkcija intenziteta kvarova **λ(t)** određuje se prema izrazu:

$$\lambda(t) = \frac{N(\Delta t)}{n(t) * \Delta t}$$

$$\lambda(200) = \frac{N(200)}{n(200)*200} = \frac{15}{(100-15)*200} = 8{,}8*10^{-4}h^{-1}$$

$$\lambda(400) = \frac{N(200)}{n(400)*200} = \frac{10}{(100-15-10)*200} = 6{,}7*10^{-4}h^{-1}$$

Zadatak 5.

Ispitivanjem 158 zavojnih opruga automatske puške nakon 18.000 ispaljenih metaka dobiveni su brojevi neispravnih opruga koji su po intervalima od Δt=1500 ispaljenih metaka prikazani tablicom. Potrebno je izračunati učestalost **f(t)** i intenzitet **λ(t)** kvarova te na temelju grafičkih prikaza odrediti vremenske intervale **početnih**, **slučajnih** i **vremenskih kvarova**.

	Broj ispucanih metaka (t, bim.), Broj neispravnih opruga (N)											
$t*10^2$, bim.	**15**	**30**	**45**	**60**	**75**	**90**	**105**	**120**	**135**	**150**	**165**	**180**
N (Δt)	**40**	**17**	**11**	**8**	**7**	**5**	**5**	**6**	**13**	**22**	**17**	**7**

Rješenje:

a) Funkcija učestalosti kvarova **f(t)** određuje se prema izrazima:

$$f(t) = \frac{N(\Delta t)}{n} * 100\% \quad \text{ili} \quad f(t) = \frac{N(\Delta t)}{n * \Delta t}$$

Npr. Za t=4500 bim.

$$f(4500) = \frac{N(1500)}{n} * 100 = \frac{11}{158} * 100 = 7\%$$

$$f(4500) = \frac{N(1500)}{n * \Delta t} = \frac{11}{158 * 1500} = 4,6 * 10^{-5}\ \text{bim}^{-1}$$

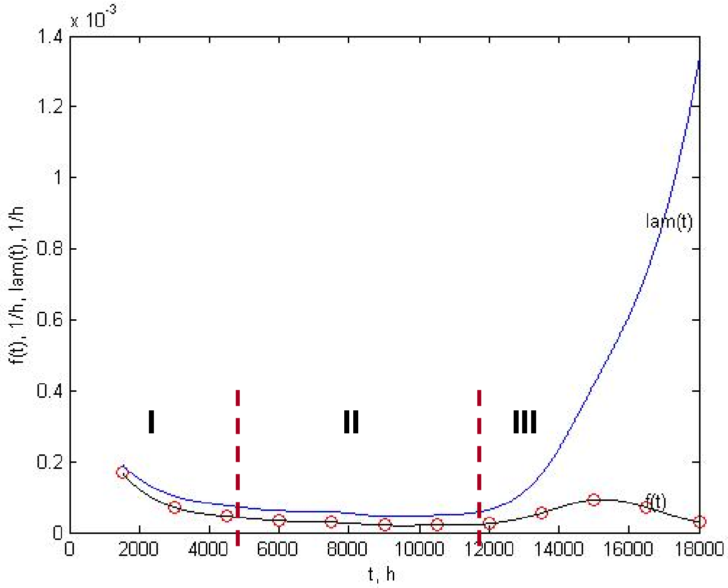
b) Funkcija intenziteta kvarova **λ(t)** određuje se prema izrazu:

$$\lambda(t)=\frac{N(\Delta t)}{n_{sr}(t)*\Delta t}\quad \text{ili}\quad \lambda(t)=\frac{N(\Delta t)}{\frac{n(t-\Delta t)+n(t)}{2}\Delta t},\ \text{bim}^{-1}$$

Npr. Za t=4500 bim. i Za t=6000 bim.

$$\lambda(4500)=\frac{N(1500)}{\frac{n(4500-1500)+n(4500)}{2}\Delta t}=\frac{11}{\frac{(158-(40+17))+(158-(40+17+11))}{2}1500}=7{,}7*10^{-5},\ \text{bim}^{-1}$$

$$\lambda(6000)=\frac{N(1500)}{\frac{n(6000-1500)+n(6000)}{2}\Delta t}=\frac{8}{\frac{(158-(40+17+11))+(158-(40+17+11+8))}{2}1500}=6{,}2*10^{-5},\ \text{bim}^{-1}$$



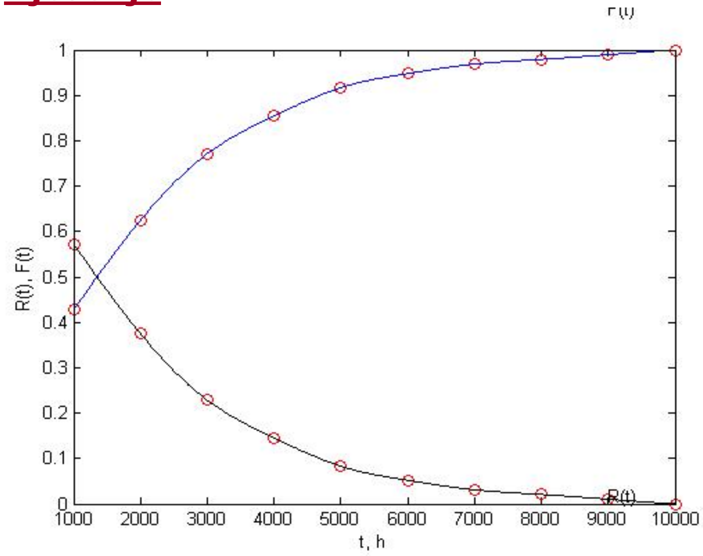
Na dijagramu se vidi da se period početnih kvarova (**I**) nalazi unutar intervala **0 ÷ 4800** bim, period slučajnih kvarova (**II**) unutar intervala **4800 ÷ 11800** bim i period vremenskih kvarova (**III**) unutar intervala **11800 ÷ 18000** bim.

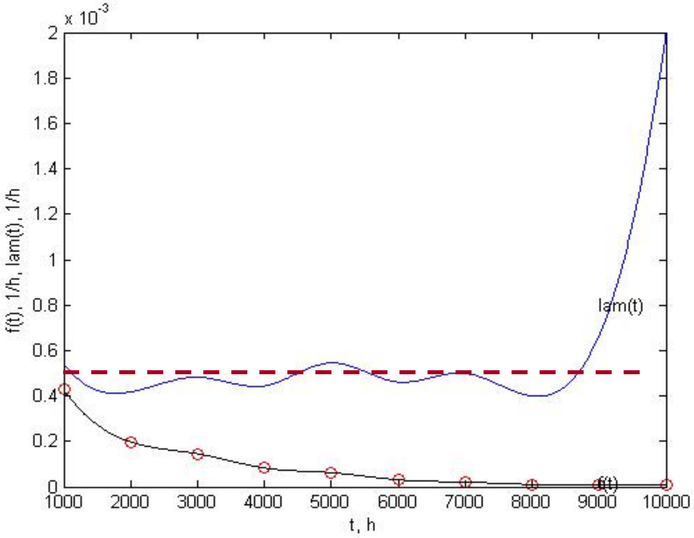
Zadatak 6.

Na temelju podataka iz tablice za interval $\Delta t=1000$ h odrediti i grafički prikazati funkcije pouzdanosti **R(t),** funkcije učestalosti **f(t)** i intenziteta **λ(t)** kvarova. Pomoću funkcije λ(t) odrediti srednje vrijeme rada T_{ur},**h**.

$t*10^3$,h	N(Δt)	R(t)	f(t)*10-4,h^{-1}	λ(t)*10^{-4},h^{-1}
1	41	0,573	4,27	5,43
2	19	0,375	1,98	4,17
3	14	0,229	1,45	4,83
4	8	0,146	0,83	4,44
5	6	0,083	0,62	5,45
6	3	0,052	0,31	4,62
7	2	0,031	0,21	5,00
8	1	0,021	0,10	4,00
9	1	0,010	0,10	6,66
10	1	0,000	0,10	20,0

Rješenje:





Aproksimacija točaka za λ(t) pokazuje da se kvarovi pokoravaju zakonu eksponencijalne razdiobe jer je **λ(t) ~ 5*10^{-4} h^{-1}=const.** tj. radi se o slučajnim kvarovima. Posljednu točku **λ(t)=10*10^{-4}, h^{-1}** možemo zanemariti jer je njezin udio u populaciji vrlo mali.

Srednje vrijeme rada T_{ur} određuje se prema izrazu:

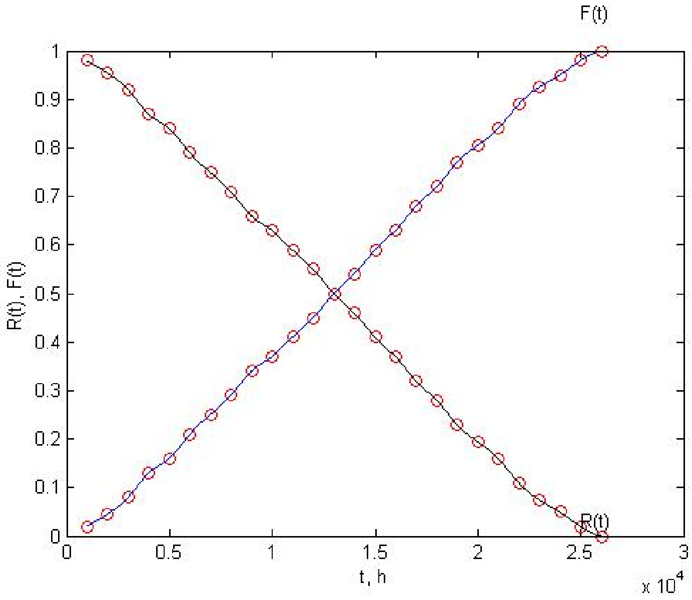
$$T_{ur} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5 * 10^{-4}} = 2000\,h$$

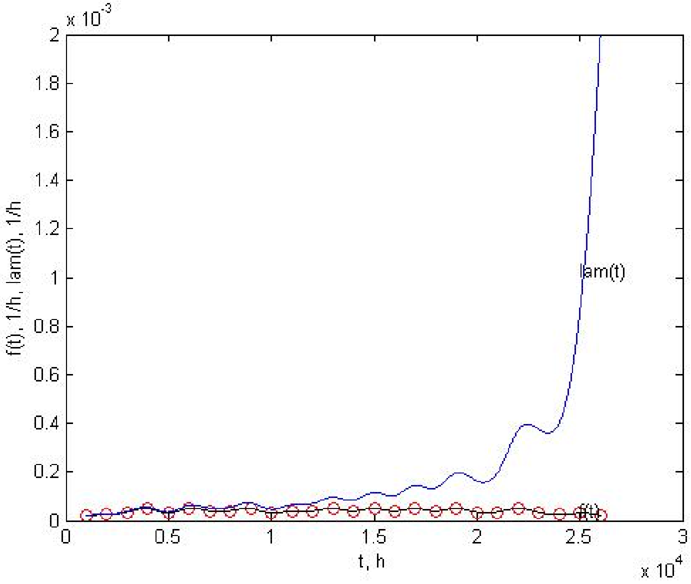
Zadatak 7.

Ispitivanjem serije od 1000 kom. jedne elektroničke komponente dobiveni su podaci o broju kvarova u intervalima od 1000 sati, a prikazani su donjom tablicom. Potrebno je odrediti i grafički prikazati funkcije pouzdanosti **R(t),** funkcije učestalosti **f(t)** i intenziteta **λ(t)** kvarova te procijeniti zakon razdiobe.

$t*10^3$,h	N(Δt)	R(t)	f(t)*10-5,h^{-1}	λ(t)*10^{-5},h^{-1}
1	20	0,98	2,0	2,02
2	25	0,96	2,5	2,58
3	35	0,92	3,5	3,73
4	50	0,87	5,0	5,6
5	30	0,84	3,0	3,5
6	50	0,79	5,0	6,15
7	40	0,75	4,0	5,2
8	40	0,71	4,0	5,5
9	50	0,66	5,0	7,3
10	30	0,63	3,0	4,65
11	40	0,59	4,0	6,55
12	40	0,55	4,0	7,0
13	50	0,50	5,0	9,5
14	40	0,46	4,0	8,3
15	50	0,41	5,0	11,5
16	40	0,37	4,0	10,25
17	50	0,32	5,0	14,5
18	40	0,28	4,0	13,3
19	50	0,23	5,0	19,6
20	35	0,19	3,5	16,4
21	35	0,16	3,5	19,7
22	50	0,11	5,0	37
23	35	0,08	3,5	38
24	25	0,05	2,5	40
25	30	0,02	3,0	85,7
26	20	0,00	2,0	200

Rješenje:





Na temelju grafičkih prikaza funkcija f(t) i λ(t) procjenjuje se **normalna razdioba**.

2.5 Rješavanje problema primjenom funkcija razdioba

Zadatak 8.

Ispitivanjem serije od 100 kom. jedne vrste strojnih elemenata dobiveni su podaci o broju kvarova u intervalima od 350 sati, a prikazani su donjom tablicom. Potrebno je:

a) Na temelju empirijskih podataka odrediti i grafički prikazati značajke $R_e(t)$, $F_e(t)$, $f_e(t)$, $\lambda_e(t)$, $T_{ur\_e\_sred}$

b) Korištenjem empirijskih podataka iz prethodne točke odrediti i grafički prikazati teorijske funkcije značajki $R_t(t)$, $F_t(t)$, $f_t(t)$, $\lambda_t(t)$, T_{ur_t} za sljedeće razdiobe:

- Normalnu razdiobu
- Eksponencijalnu razdiobu
- Weibull-ovu razdiobu

c) Na temelju podataka iz prethodne dvije točke odrediti razdiobu $R_t(t)$ koja najbolje aproksimira empirijsku (dobivenu eksperimentom) pouzdanost $R_e(t)$.

	Vrijeme (t,h), Broj elemenata u kvaru N(Δt)								
t, h	350	700	1050	1400	1750	2100	2450	2800	3150
N (Δt)	7	18	21	19	17	10	5	2	1

Rješenje:

a) - Pouzdanost $R_e(t)$ od t=350-3150 sati za interval od 350 sati određuje se prema izrazu:

$$R_e(t) = \frac{n - N(t)}{n}$$

$$R_e(350) = \frac{n - N(350)}{n} = \frac{100 - 7}{100} = 0,93$$

$$R_e(700) = \frac{n - N(700)}{n} = \frac{100 - (7 + 18)}{100} = 0,75$$

$$R_e(1050) = \frac{n - N(1050)}{n} = \frac{100 - (7 + 18 + 21)}{100} = 0,54$$

$$R_e(2800) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,01$$

$$R_e(3150) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,00$$

- Nepouzdanost $F_e(t)$ od t=350-3150 sati za interval od 350 sati određuje se prema izrazu:

$$F_e(t)=\frac{(n-N(t))-0,3}{n+0,4}$$ - Medijalni rang (zbog Weibull koeficijenata!)

$$F_e(350)=\frac{(n-N(350))-0,3}{n+0,4}=\frac{(100-7)-0,3}{100+0,4}=0,06673$$

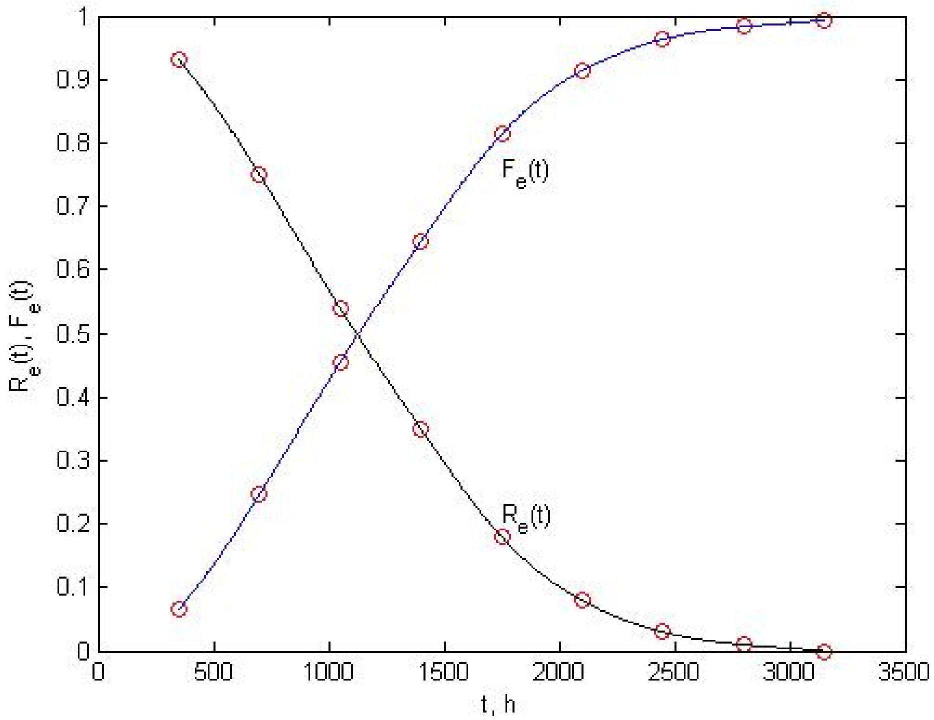
$$F_e(700)=\frac{(n-N(700))-0.3}{n+0,4}=\frac{(100-(7+18))-0,3}{100+0,4}=0,24602$$

$$F_e(1050)=\frac{(n-N(1050))-0,3}{n+0,4}=\frac{(100-(7+18+21))-0,3}{100+0,4}=0,45518$$

$$F_e(2800)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0,98307$$

$$F_e(3150)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0,99303$$

- Grafički prikaz **$R_e(t)$** i **$F_e(t)$**:



- Funkcija učestalosti $f_e(t)$ od t=350-3150 sati za interval od 350 sati određuje se prema izrazu:

$$f_e(t) = \frac{N(\Delta t)}{n * \Delta t}, h^{-1}$$

$$f_e(350) = \frac{N(350-0)}{n*(350-0)} = \frac{N(350)}{n*350} = \frac{7}{100*350} = 0{,}0002000\, h^{-1}$$

$$f_e(700) = \frac{N(700-350)}{n*(700-350)} = \frac{N(350)}{n*350} = \frac{18}{100*350} = 0{,}0005143\, h^{-1}$$

$$f_e(1050) = \frac{N(1050-350)}{n*(1050-350)} = \frac{N(350)}{n*350} = \frac{21}{100*350} = 0{,}0006000\, h^{-1}$$

$$f_e(2800) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}0000571\, h^{-1}$$

$$f_e(3150) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}0000286\, h^{-1}$$

- Funkcija intenziteta $\lambda_e(t)$ od t=350-3150 sati za interval od 350 sati određuje se prema izrazu:

$$\lambda_e(t) = \frac{N(\Delta t)}{\frac{n(t-\Delta t)+n(t)}{2}\Delta t},\ h^{-1}$$

$$\lambda_e(350) = \frac{N(350)}{\frac{n(350-350)+n(350)}{2}\Delta t} = \frac{7}{\frac{(100-0)+(100-7)}{2}350} = 0{,}0002073\ h^{-1}$$

$$\lambda_e(700) = \frac{N(350)}{\frac{n(700-350)+n(700)}{2}\Delta t} = \frac{18}{\frac{(100-7)+(100-(7+18))}{2}350} = 0{,}0006122\ h^{-1}$$

$$\lambda_e(2800) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}0028571\ h^{-1}$$

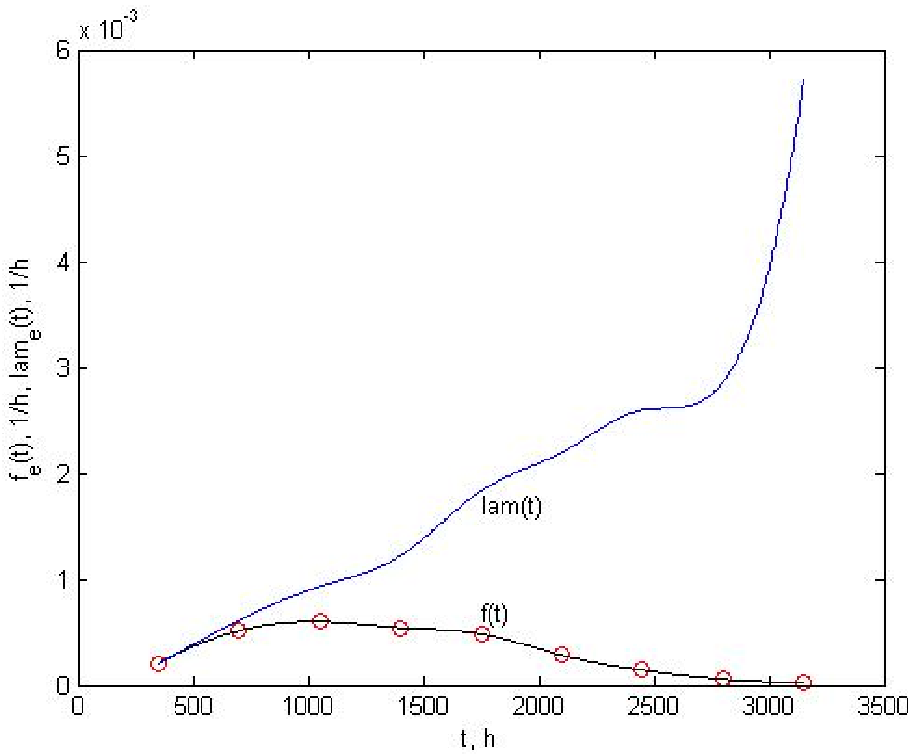
$$\lambda_e(3150) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}0057143\ h^{-1}$$

- Srednja vrijednost intenziteta $\lambda_{e\_sred}(t)$ od t=350-3150 sati za interval od 350 sati određuje se prema izrazu (<u>potrebna zbog izračunavanja eksponencijalnih značajki!!!</u>):

$$\lambda_{e\_sred}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{z}\lambda_{ei}(t)}{z},\ h^{-1}$$

$$\lambda_{e\_sred}(t) = \frac{0{,}0002073+0{,}0006122+\ldots+0{,}0057143}{9} = 0{,}002018794,\ h^{-1}$$

- Grafički prikaz **$f_e(t)$** i **$\lambda_e(t)$**:



- Tablični prikaz $R_e(t)$, $F_e(t)$, $f_e(t)$, $\lambda_e(t)$:

Empirijski podaci		Empirijske značajke			
t_i, h	$N(\Delta t)$	$R_e(t)$	$F_e(t)$	$f_e(t)$, h^{-1}	$\lambda_e(t)$, h^{-1}
350	7	0,93327	0,06673	0,0002000	0,0002073
700	18	0,75398	0,24602	0,0005143	0,0006122
1050	21	0,54482	0,45518	0,0006000	0,0009302
1400	19	0,35558	0,64442	0,0005429	0,0012199
1750	17	0,18625	0,81375	0,0004857	0,0018329
2100	10	0,08665	0,91335	0,0002857	0,0021978
2450	5	0,03685	0,96315	0,0001429	0,0025974
2800	2	0,01693	0,98307	0,0000571	0,0028571
3150	1	0,00697	0,99303	0,0000286	0,0057143

- Srednje vrijeme u radu: $T_{ur\_e\_sred} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{z}\frac{t_i + t_{i+1}}{2}N(\Delta t)$

$$T_{ur\_e\_sred} = \frac{1}{100}\left[\frac{0+350}{2}*7+\frac{350+700}{2}*18+\ldots\frac{2800+3150}{2}*1\right] = 1179{,}5\,h$$

b) **NORMALNA RAZDIOBA**

$$R_t(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_t^{\infty} e^{\left(-\frac{t-T_{ur\_sred}}{2\sigma_{ur}}\right)}dt$$

- Normirana ili standardizirana razdioba (**t**=0; σ=1): $R_t(t)=0,5+\Theta\left(-\frac{t_{uri}-T_{ur\_sred}}{\sigma_{ur}}\right)$

- Funkcija $\Theta\left(-\frac{t_{uri}-T_{ur\_sred}}{\sigma_{ur}}\right)=\Theta(u)$ određuje se iz tablica (npr. ***Pavlić: Statistička teorija i primjena***, površine ispod normalne krivulje, str.325)

- Standardna devijacija:

$$\sigma_{ur}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_{uri\_sred}-T_{ur\_sred})^2}{n}N(\Delta t)},h$$

$$\sigma_{ur}=\sqrt{\frac{1}{100}\left[\left(\frac{350}{2}-1179,5\right)^2 7+\left(\frac{350+700}{2}-1179,5\right)^2 18+\left(\frac{700+1050}{2}-1179,5\right)^2 21+\ldots\right]}=559,856\,h$$

$$R_t(350)=0,5+\Theta\left(-\frac{350-1179,5}{559,856}\right)=0,5-\Theta(-1,48163)=0,5+\Theta(1,48163)=0,5+0,43056=0,93056$$

$$R_t(700)=\ 0.804131000$$

....

$$R_t(3150)=\ 0.000216056$$

$$F_t(t) = 1 - R_t(t)$$

$$F_t(350) = 1 - R_t(350) = 1 - 0,93056 = 0,06944$$

$$F_t(700) = 1 - R_t(700) = 1 - 0,804131000 = 0,195869$$

....

$$F_t(3150) = 1 - R_t(3150) = 1 - 0,000216056 = 0,99978344$$

$$f_t(t) = 0,5 + \frac{1}{\sigma_{ur}}\Theta\left(-\frac{t_{ur} - T_{ur\_sred}}{\sigma_{ur}}\right), h^{-1}$$

$$f_t(350) = 0,5 + \frac{1}{559,856}\Theta\left(-\frac{350 - 1179,5}{559,856}\right) = 0,5 + 0,00178617\Theta(1,4816309) = 0,5 + 0,00178617(0,43056) = 0,5007691, h^{-1}$$

$$f_t(700) = 0,5 + \frac{1}{559,856}\Theta\left(-\frac{700 - 1179,5}{559,856}\right) = 0,500543230, h^{-1}$$

....

$$f_t(3150) = 0,5 + \frac{1}{559,856}\Theta\left(-\frac{3150 - 1179,5}{559,856}\right) = 0.499107299, h^{-1}$$

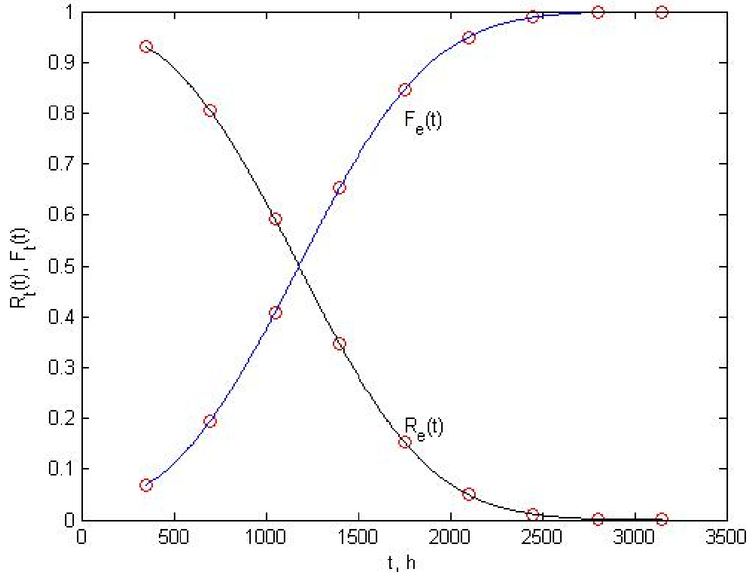
$$\lambda_t(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

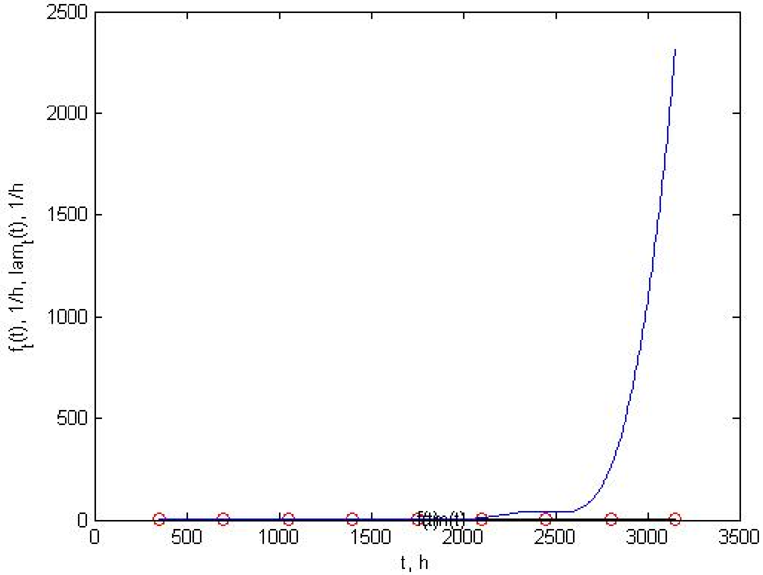
$$\lambda_t(350) = \frac{f(350)}{R(350)} = \frac{0,5007691}{0,93056} = 0,538137358, h^{-1}$$

....

$$\lambda_t(3150) = \frac{f(3150)}{R(3150)} = \frac{0.499107299}{0.000216056} = 2304,71, h^{-1}$$

- Grafički prikaz **$R_t(t)$**, **$F_t(t)$**, **$f_t(t)$** i **$\lambda_t(t)$** **NORMALNE razdiobe**:





- Tablični prikaz $R_e(t)$, $F_e(t)$, $f_e(t)$ i $\lambda_e(t)$ **NORMALNE razdiobe**:

Empirijski podaci		Teorijske značajke NORMALNE razdiobe			
t_i, h	N(Δt)	$R_t(t)$	$F_t(t)$	$f_t(t)$, h^{-1}	$\lambda_t(t)$, h^{-1}
350	7	0,937806334	0.069219366	0.500769448	0.538010172
700	18	0,804131000	0.195868999	0.500543230	0.622464785
1050	21	0,591462757	0.408537242	0.500163368	0.845637975
1400	19	0,346845505	0.653154494	0.499726440	1.440775308
1750	17	0,154098765	0.845901234	0.499382161	3.240662961
2100	10	0,050070354	0.949929645	0.499196348	9.969898322
2450	5	0,011624064	0.988375935	0.499127676	42.939169827
2800	2	0,001898859	0.998101140	0.499110305	262.847479148
3150	1	0,000216055	0.999783944	0.499107300	2310.084900072

- Srednje vrijeme u radu: $T_{ur\_t\_sred} = T_{ur\_e\_sred} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{z}\frac{t_i + t_{i+1}}{2}N(\Delta t)$

$$T_{ur\_t\_sred} = T_{ur\_e\_sred} = \frac{1}{100}\left[\frac{0+350}{2}*7+\frac{350+700}{2}*18+\ldots\frac{2800+3150}{2}*1\right] = 1179{,}5\,h$$

EKSPONENCIJALNA RAZDIOBA

$$R_t(t) = e^{-\lambda_{e\_sred} t}$$

- Prema prethodnom izračunu:

$$\lambda_{e\_sred} = 0{,}002018794, h^{-1}$$

$$R_t(350) = e^{-0{,}002018794*350} = 0.493329411$$

$$R_t(700) = e^{-0{,}002018794*700} = 0.243373907$$

....

$$R_t(3150) = e^{-0{,}002018794*3150} = 0.001730745$$

$$F_t(t) = 1 - R_t(t)$$

$$F_t(350) = 1 - R_t(350) = 1 - 0.493329411 = 0.506670589$$

$$F_t(700) = 1 - R_t(700) = 1 - 0.243373907 = 0.756626093$$

....

$$F_t(3150) = 1 - R_t(3150) = 1 - 0.001730745 = 0.998269255$$

$$f_t(t) = \lambda_{e\_sred} e^{-\lambda_{e\_sred} t}$$

- Prema prethodnom izračunu:

$$\lambda_{e\_sred} = 0{,}002018794, h^{-1}$$

$$f_t(350) = 0{,}002018794 e^{-0{,}002018794 * 350} = 0.000995931, h^{-1}$$

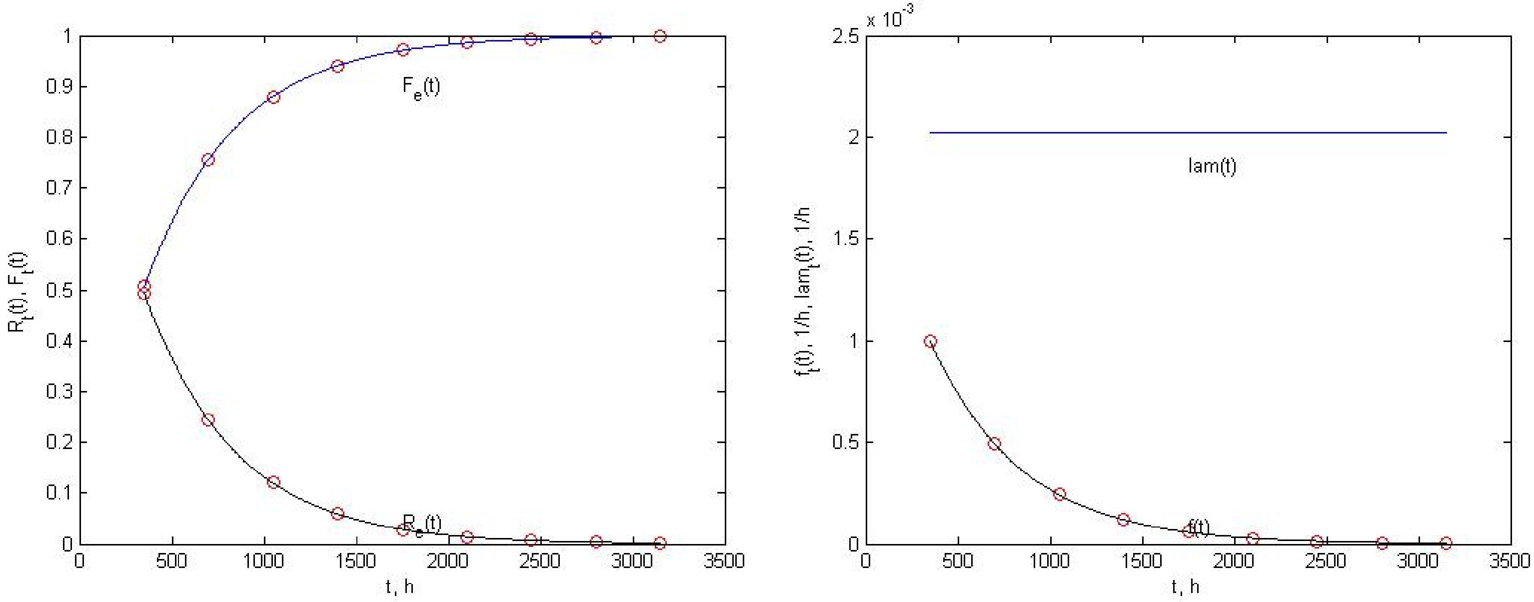
$$f_t(700) = 0{,}002018794 e^{-0{,}002018794 * 700} = 0.000491322, h^{-1}$$

....

$$f_t(3150) = 0{,}002018794 e^{-0{,}002018794 * 3150} = 0.000003494, h^{-1}$$

$$\lambda_t = \lambda_{e\_sred} = 0{,}002018794, h^{-1}$$

- Grafički prikaz **$R_t(t)$**, **$F_t(t)$**, **$f_t(t)$** i **$\lambda_t(t)$** **<u>EKSPONENCIJALNE</u> razdiobe**:



- Tablični prikaz $R_e(t)$, $F_e(t)$, $f_e(t)$ i $\lambda_e(t)$ **EKSPONENCIJALNE razdiobe**:

Empirijski podaci		Teorijske značajke EKSPONENCIJALNE razdiobe			
t_i, h	N(Δt)	$R_t(t)$	$F_t(t)$	$f_t(t)$, h^{-1}	$\lambda_t(t)$, h^{-1}
350	7	0.493329411	0.506670589	0.000995931	0.002018795
700	18	0.243373907	0.756626093	0.000491322	0.002018795
1050	21	0.120063506	0.879936494	0.000242384	0.002018795
1400	19	0.059230859	0.940769141	0.000119575	0.002018795
1750	17	0.029220325	0.970779675	0.000058990	0.002018795
2100	10	0.014415246	0.985584754	0.000029101	0.002018795
2450	5	0.007111465	0.992888535	0.000014357	0.002018795
2800	2	0.003508295	0.996491705	0.000007083	0.002018795
3150	1	0.001730745	0.998269255	0.000003494	0.002018795

- Srednje vrijeme u radu: $T_{ur\_t\_sred} = \frac{1}{\lambda_t} = \frac{1}{\lambda_{e\_sred}}, h$

$$T_{ur\_t\_sred} = \frac{1}{\lambda_{e\_sred}} = \frac{1}{0{,}002018794} = 495{,}344 \text{ h}$$

WEIBULL-ova RAZDIOBA

- Način određivanja parametara (β,η) WEIBULL-ove razdiobe:

t, h	$F_e(t)$	$x = \ln(t)$	$y = \ln\left(\ln\left(\frac{1}{1-F_e(t)}\right)\right)$	x*x	x*y
350	0,06673	5.857933154	-2.672721407	34.315380842	7.143439721
700	0,24602	6.551080335	-1.264487266	42.916653556	1.598928047
1050	0,45518	6.956545443	-0.498734850	48.393524503	0.248736450
1400	0,64442	7.244227516	0.033445916	52.478832298	0.001118629
1750	0,81375	7.467371067	0.519173890	55.761630651	0.269541528
2100	0,91335	7.649692624	0.894388288	58.517797237	0.799930409
2450	0,96315	7.803843304	1.194173766	60.899970306	1.426050985
2800	0,98307	7.937374696	1.405737599	63.001917067	1.976098198
3150	0,99303	8.055157732	1.602581894	64.885566084	2.568268726
	Suma	65.5232258	1.21355783	481.1712725	16.93715767

$$a = \frac{n*\sum(x*y) - \sum x * \sum y}{n*\sum x^2 - (\sum x^2)} = 1.957623501$$

$$b = \frac{\sum x^2 * \sum y - \sum x * \sum(x*y)}{n*\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = -14.117361$$

$$\beta = a = 1.957623501$$

$$\ln\eta = \frac{-b}{\beta} = \frac{-(-14.117361)}{1.957623501} = 7.211479119$$

$$\eta = e^{7.211479119} = 1354.894836, h$$

$$R_t(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$$

$$R_t(350) = e^{-\left(\frac{350}{1354.894836}\right)^{1.957623501}} = 0.931769277$$

$$R_t(700) = e^{-\left(\frac{700}{1354.894836}\right)^{1.957623501}} = 0.759953706$$

....

$$R_t(3150) = e^{-\left(\frac{3150}{1354.894836}\right)^{1.957623501}} = 0.005432563$$

$$F_t(t) = 1 - R_t(t)$$

$$F_t(350) = 1 - R_t(350) = 1 - 0.931769277 = 0.068230723$$

$$F_t(700) = 1 - R_t(700) = 1 - 0.759953706 = 0.240046294$$

....

$$F_t(3150) = 1 - R_t(3150) = 1 - 0.005432563 = 0.994567437$$

$$f_t(t)=\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}},h^{-1}$$

$$f_t(350)=\frac{1.957623501}{1354.894836}\left(\frac{350}{1354.894836}\right)^{1.957623501-1}e^{-\left(\frac{350}{1354.894836}\right)^{1.957623501}}=0.000368303,h^{-1}$$

....

$$f_t(3150)=\frac{1.957623501}{1354.894836}\left(\frac{3150}{1354.894836}\right)^{1.957623501-1}e^{-\left(\frac{3150}{1354.894836}\right)^{1.957623501}}=0.000017608,h^{-1}$$

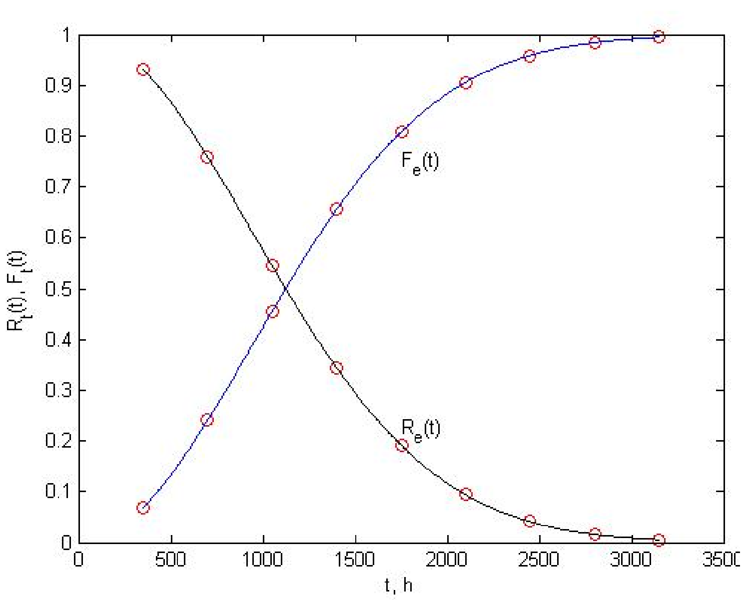
$$\lambda_t(t)=\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1},h^{-1}$$

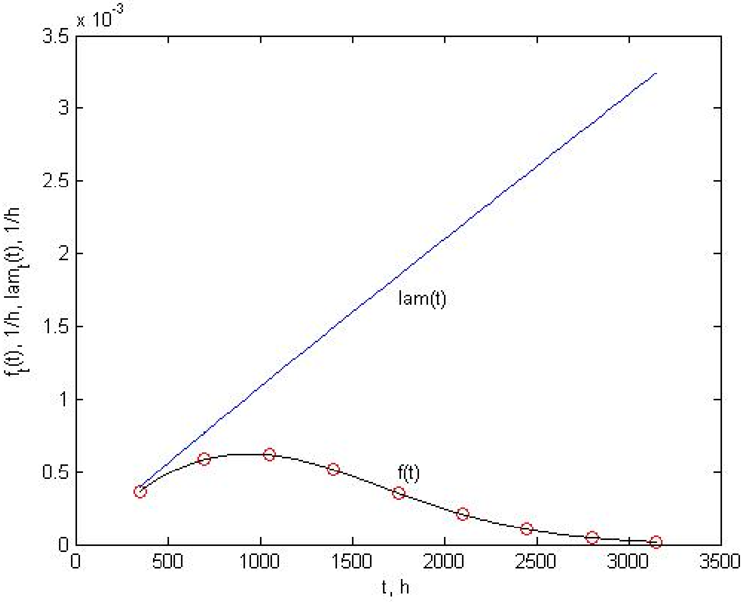
$$\lambda_t(350)=\frac{1.957623501}{1354.894836}\left(\frac{350}{1354.894836}\right)^{1.957623501-1}=0.000395272,h^{-1}$$

....

$$\lambda_t(3150)=\frac{1.957623501}{1354.894836}\left(\frac{3150}{1354.894836}\right)^{1.957623501-1}=0.003241168,h^{-1}$$

- Grafički prikaz **$R_t(t)$**, **$F_t(t)$**, **$f_t(t)$** i **$\lambda_t(t)$** **WEIBULL-ove razdiobe**:





- Tablični prikaz $R_e(t)$, $F_e(t)$, $f_e(t)$ i $\lambda_e(t)$ **WEIBULL-ove razdiobe**:

Empirijski podaci		Teorijske značajke WEIBULL-ove razdiobe			
t_i, h	$N(\Delta t)$	$R_t(t)$	$F_t(t)$	$f_t(t)$, h^{-1}	$\lambda_t(t)$, h^{-1}
350	7	0.931769277	0.068230723	0.000368303	0.000395272
700	18	0.759953706	0.240046294	0.000583387	0.000767662
1050	21	0.544929666	0.455070334	0.000616793	0.001131877
1400	19	0.344311453	0.655688547	0.000513328	0.001490882
1750	17	0.191997687	0.808002313	0.000354440	0.001846064
2100	10	0.094599603	0.905400397	0.000207951	0.002198227
2450	5	0.041223754	0.958776246	0.000105034	0.002547899
2800	2	0.015900816	0.984099184	0.000046040	0.002895454
3150	1	0.005432563	0.994567437	0.000017608	0.003241168

- Srednje vrijeme u radu: $T_{ur} = \Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\eta, h$

$$T_{ur\_t} = \Gamma\left(1+\frac{1}{1.957623500}\right)1354.894834 = \Gamma(1.51082)1354.894834 = 0.88659 * 1354.894834 = 1201.22, h$$

b) Najbolju aproksimaciju eksperimentalnih podataka postiže ona razdioba koja ima najmanji D_{max}

$$D_{max} = \left| R_t(t) - R_e(t) \right|$$

	Normalna		Eksponencijalna		Weibull	
$R_e(t)$	$R_t(t)$	D_{max}	$R_t(t)$	D_{max}	$R_t(t)$	D_{max}
0,93327	0,937806334	0.000780633	0.493329411	0.436670589	0.931769277	0.001769277
0,75398	0,804131000	0.054131000	0.243373907	0.506626093	0.759953706	0.009953706
0,54482	0,591462757	0.051462757	0.120063506	0.419936494	0.544929666	0.004929666
0,35558	0,346845505	0.003154495	0.059230859	0.290769141	0.344311453	0.005688547
0,18625	0,154098765	0.025901235	0.029220325	0.150779675	0.191997687	0.011997687
0,08665	0,050070354	0.029929645	0.014415246	0.065584754	0.094599603	0.014599603
0,03685	0,011624064	0.018375936	0.007111465	0.022888535	0.041223754	0.011223754
0,01693	0,001898859	0.008101141	0.003508295	0.006491705	0.015900816	0.005900816
0,00697	0,000216055	0.000216056	0.001730745	0.001730745	0.005432563	0.005432563

Prema gornjoj tablici očito je da Weibull-ova razdioba najbolje aproksimira razmatrani problem jer ima najmanji iznos D_{max} , a izraz funkcije pouzdanosti je:

$$R_t(t) = e^{-\left(\frac{t}{1354.894836}\right)^{1.957623501}}$$

Zadatak 9.

Na temelju dobivene funkcije pouzdanosti $R_t(t)$ iz zadatka 8. potrebno je odrediti:

a) Pouzdanost sustava nakon 1500h rada

b) Vrijeme kada pouzdanost padane na iznos 0.7

Rješenje:

a)

$$R_t(t) = e^{-\left(\frac{t}{1354.894836}\right)^{1.957623501}}$$

$$R_t(1500) = e^{-\left(\frac{1500}{1354.894836}\right)^{1.957623501}} = 0.295114827$$

b)

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} \quad / \ln$$

$$\ln(R(t)) = -\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}$$

$$t = -\eta * \ln(R(t))^{\frac{1}{\beta}} = 1354.894836 * \ln(0.7)^{\frac{1}{1.957623501}} = 800.195\,h$$

Zadatak 10.

Televizor ima intezitet kvarova 0.002 h^{-1}. Kolika je vjerojatnost da neće doći do kvara tijekom tri mjeseca eksploatacije ako se televizor koristi svaki dan 4 sata? Koliko je srednje vrijeme između dva kvara?

Rješenje:

$$t = 3 \cdot 30 \cdot 4 = 360\,h$$

$$\lambda = 0.002\ h^{-1}$$

$$R = e^{-\lambda \cdot t} = e^{-0.002 \cdot 360} = 0.48675$$

$$SVIK = MTBF = T_{ur} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.002} = 500\,h$$

Zadatak 11.

Pomoću ***Kolmogorov-Smirnov***-og testa provjeriti da li se dobivene pouzdanosti R_{t_weib} iz zadatka 8. pokoravaju zakonu Weibullove razdiobe. Računati sa stupnjem značajnosti 0.05.

Rješenje:

$$D_{max} = \left| R_e - R_{t\_weib} \right|$$

- Ako se podaci pokoravaju zakonu Weibullove razdiobe tada mora bit:

$$D_{max} < d_\alpha \qquad \textbf{(1)}$$

$$D_{max} = \mathbf{0.014599603} \ \textbf{(vidi tablicu!)}$$

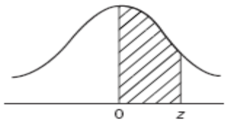
- Vrijednost *Kolmogorov-Smirnov*-og testa za n > 35 i stupanj značajnosti=0.05 izračunava se prema izrazu:

$$d_\alpha = \frac{1.36}{\sqrt{n}} = \frac{1.36}{\sqrt{100}} = 0.136$$

- Prema izrazu **(1)** vrijedi:

$$\mathbf{0.014599603} < \mathbf{0.136} \Rightarrow \textbf{Pouzdanost } R_{t\_weib} \textbf{ pokorava se Weibullovoj razdiobi!}$$

Table 40.1 Partial areas under the standardised normal curve



$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0159	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0678	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1388	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2086	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2760	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3451	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4430	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4762	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4785	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4882	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4980	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

CRITICAL VALUES FOR THE KOLMOGOROV-SMIRNOV GOODNESS-OF-FIT TEST

Sample size, N	Level of significance				
	0.20	0.15	0.10	0.05	0.01
1	0.900	0.925	0.950	0.975	0.995
2	0.684	0.726	0.776	0.842	0.929
3	0.565	0.597	0.642	0.708	0.828
4	0.494	0.575	0.564	0.624	0.733
5	0.446	0.424	0.510	0.454	0.669
6	0.410	0.436	0.470	0.521	0.618
7	0.381	0.405	0.438	0.486	0.577
8	0.358	0.381	0.411	0.457	0.543
9	0.339	0.360	0.388	0.432	0.514
10	0.322	0.342	0.368	0.410	0.490
11	0.307	0.326	0.452	0.391	0.468
12	0.295	0.313	0.338	0.375	0.405
13	0.284	0.302	0.325	0.361	0.433
14	0.274	0.292	0.314	0.349	0.418
15	0.266	0.293	0.304	0.338	0.404
16	0.258	0.274	0.295	0.328	0.392
17	0.250	0.266	0.286	0.318	0.381
18	0.244	0.259	0.278	0.309	0.371
19	0.237	0.252	0.272	0.301	0.363
20	0.231	0.246	0.264	0.294	0.356
25	0.21	0.22	0.24	0.27	0.32
30	0.19	0.20	0.22	0.24	0.29
35	0.18	0.19	0.21	0.23	0.27
> 35	$\frac{1.07}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.14}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{N}}$

2.6 Simulacijski *Matlab*© racunalni program za izracunavanje znacajki pouzdanosti

- Naziv programa: ***Pouzdanost_elemenata.m***

- Struktura:

1. Definicije: n, t, N, dt

↓

2. Izračunavanje značajki pouzdanosti na temelju eksperimentalnih podataka

↓

3. Izračunavanje značajki pouzdanosti na temelju funkcija razdioba

3. ANALIZA POUZDANOSTI SUSTAVA

- **Tehnički sustavi** predstavljaju skupove elemenata i relacije između njih i njihovih karakteristika, povezanih međusobno u cjelinu na način koji je pogodan za izvođenje korisnog rada.

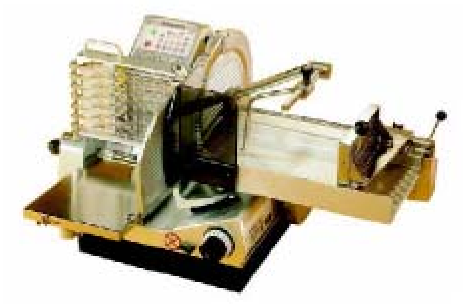
- Složeni sustavi objedinjavaju veći ili manji broj sastavnih elemenata (podsustava, sklopova, podsklopova, dijelova) te se o njegovoj pouzdanosti može govoriti samo ako se analiziraju i analitički obuhvate svi elementi zasebno.

- Teorijom pouzdanosti analiziraju se načini povezivanja elemenata sustava na temelju kojih se dobiju analitički izrazi za izračunavanje pouzdanosti sustava.

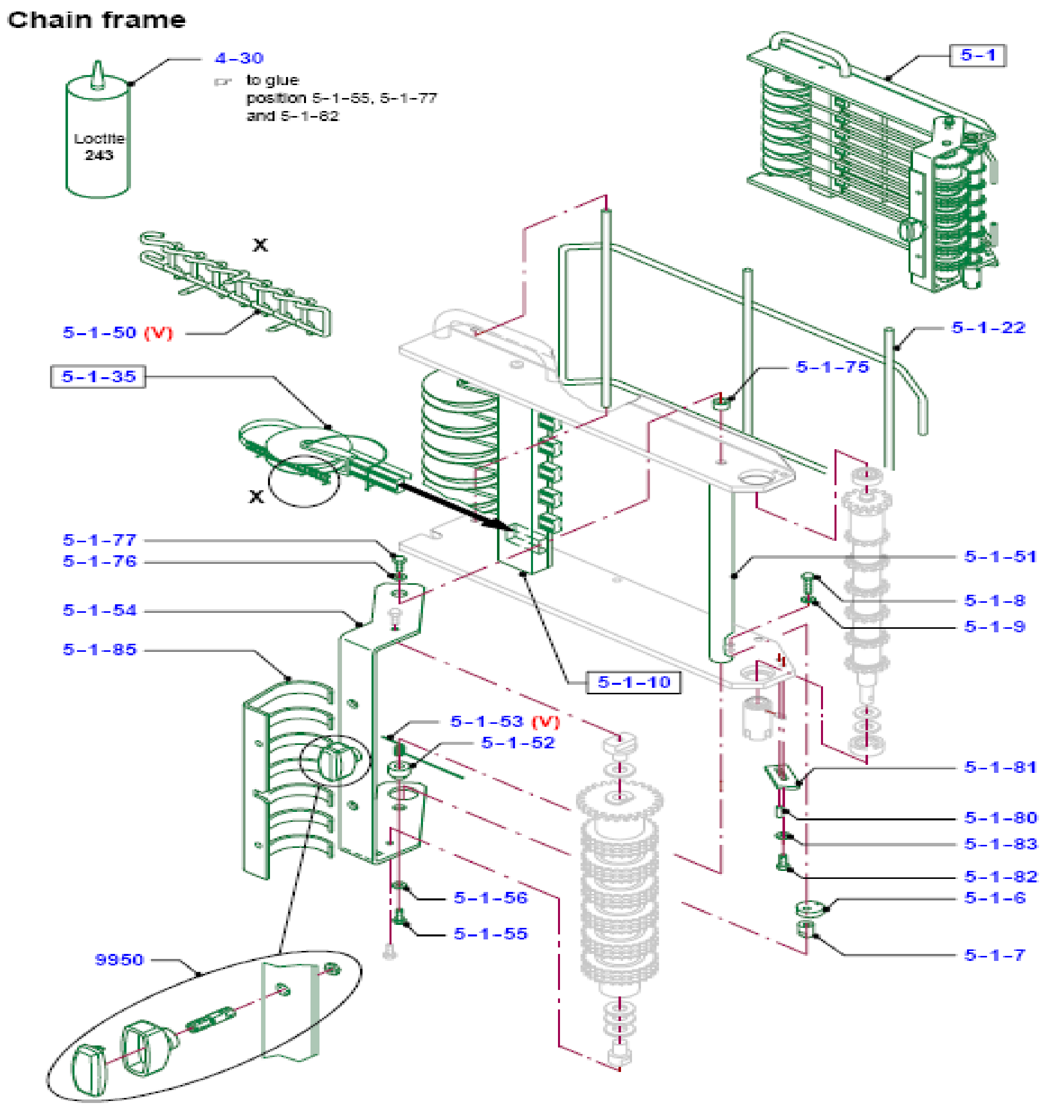
- Načini povezivanja mogu biti:
  - serijski,
  - paralelni,
  - poluserijski,
  - poluparalelni,
  - sa sklopkom.

3.1 Primjer slozenih tehnickih sustava

VS 12 D



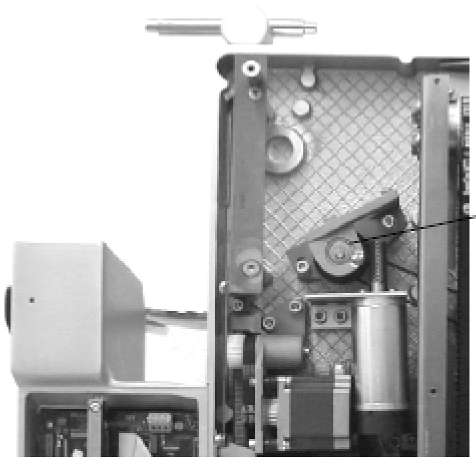
VS 12 D-V

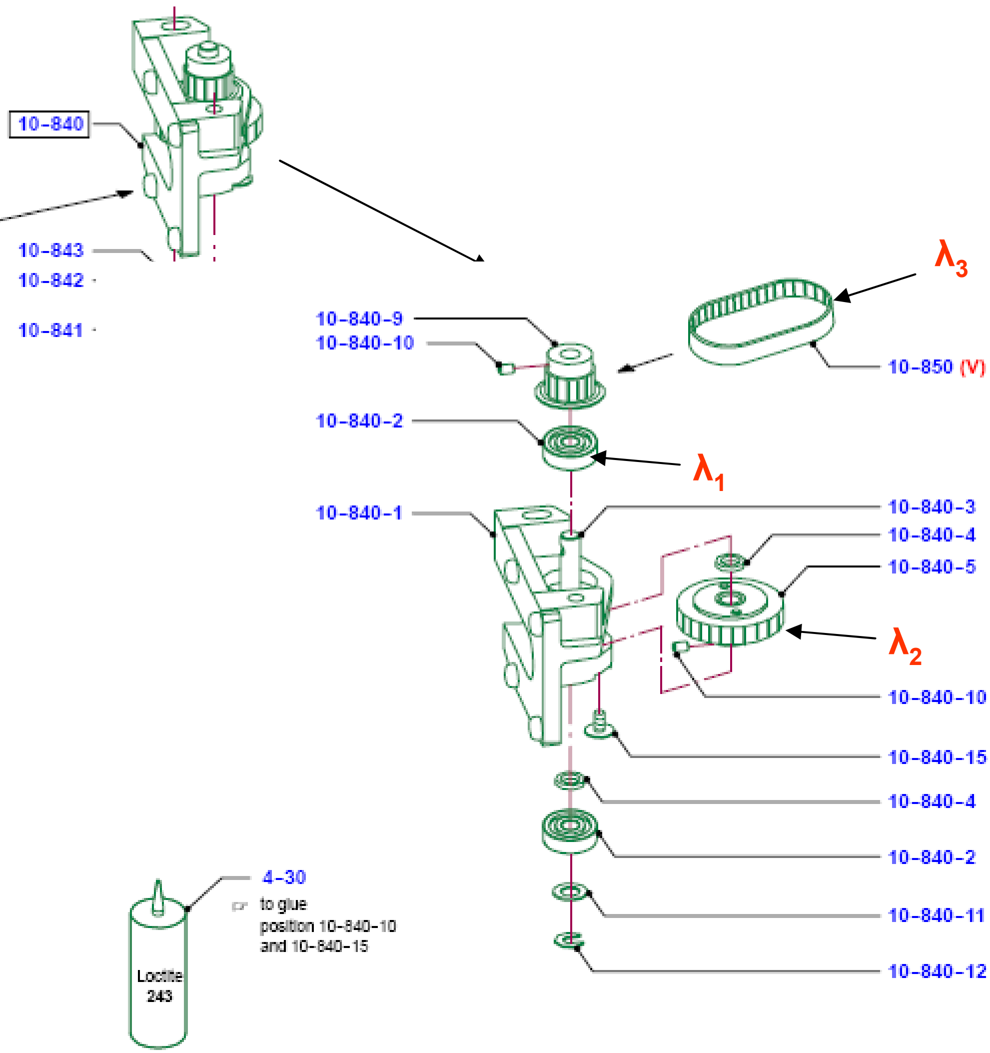


Chain frame
4-30
to glue
position 5-1-55, 5-1-77
and 5-1-82
Loctite
243
5-1
X
5-1-50 (V)
5-1-35
5-1-22
5-1-75
X
5-1-77
5-1-76
5-1-54
5-1-85
5-1-51
5-1-8
5-1-9
5-1-10
5-1-53 (V)
5-1-52
5-1-81
5-1-80
5-1-83
5-1-82
5-1-6
5-1-56
5-1-55
5-1-7
9950

Basic parts

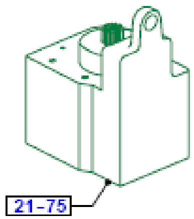
Intermediate bearing

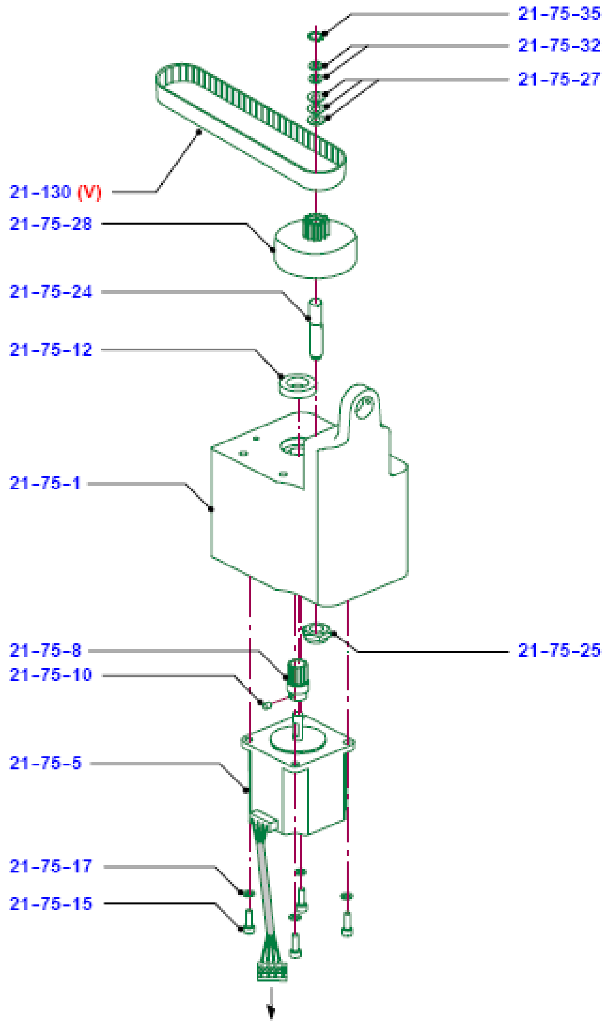




Carriage

Version VS 12 D–V: Bearing rear

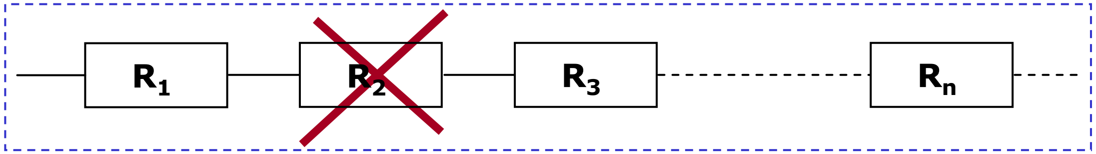




3.2 Sustavi sa serijskom vezom

- Elementi su povezani u serijski spoj, a kvar bilo kojeg elementa u spoju ima za posljedicu zastoj (kvar) cijelog sustava.

$R_s = 0;\ F_s = 1$



$$R_s = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot \ldots \cdot R_n = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - F_i\right) = \prod_{i=1}^{n} R_i$$

- Ako je pouzdanost svih elemenata međusobno jednaka ($R_i = R$) tada je:

$$R_s = \left(1 - F\right)^n = R^n$$

- Gdje je:

n – broj elemenata u spoju

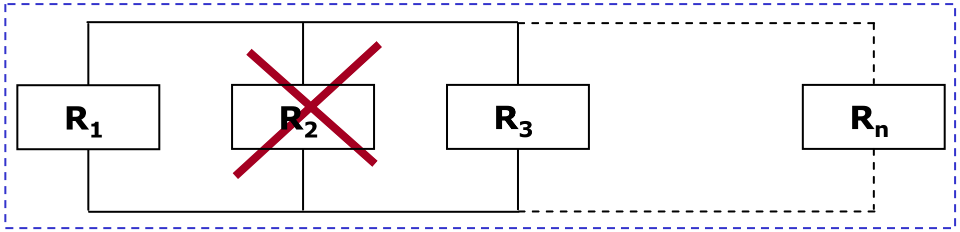
R_i – pouzdanost pojedinog elementa

F_i – nepouzdanost pojedinog elementa

3.3 Sustavi sa paralelnom vezom

- Elementi su povezani u paralelni spoj, a kvar bilo kojeg elementa u spoju nema za posljedicu zastoja (kvara) cijelog sustava.

$R_p > 0;\ F_p < 1$



$$R_p = 1 - \prod_{i=1}^{n} F_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i)$$

- Ako je pouzdanost svih elemenata međusobno jednaka (**$R_i = R$**) tada je:

$$R_p = 1 - F^n = 1 - (1 - R)^n$$

- Gdje je:

n – broj elemenata u spoju

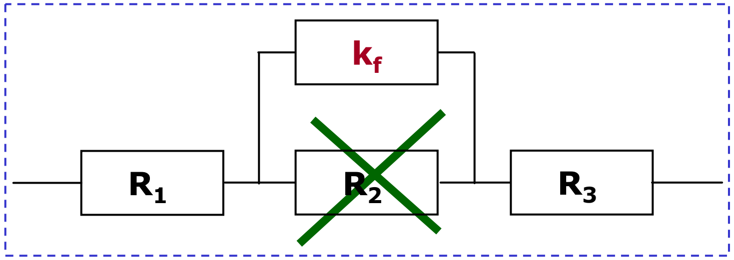
R_i – pouzdanost pojedinog elementa

F_i – nepouzdanost pojedinog elementa

3.4 Sustavi sa poluserijskom vezom

- Elementi su povezani u "poluserijsku" vezu kada kvar jednog ili više elemenata sustava nema za posljedicu zastoja cijelog sustava već sustav i dalje radi ali sa pogrešnim karakteristikama.

$R_{PS} > 0;\ F_{PS} < 1$



$$R_{PS} = R_1 \cdot \left[1 - (1 - R_2) \cdot (1 - k_f)\right] \cdot R_3$$

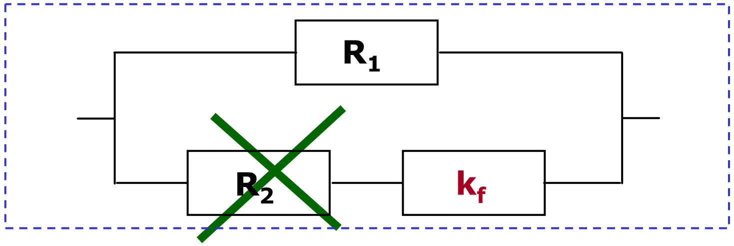
- Gdje je:

k_f – fiktivni element - faktor umanjena pouzdanosti nekog elementa sustava kada on ne radi kako bi trebao.

3.5 Sustavi sa poluparalelnom vezom

- Elementi su povezani u “poluparalelnu” vezu kada kvar jednog ili više elemenata sustava nema za posljedicu zastoja cijelog sustava već sustav i dalje radi ali sa pogrešnim karakteristikama.

$R_{PP} > 0;\ F_{PP} < 1$



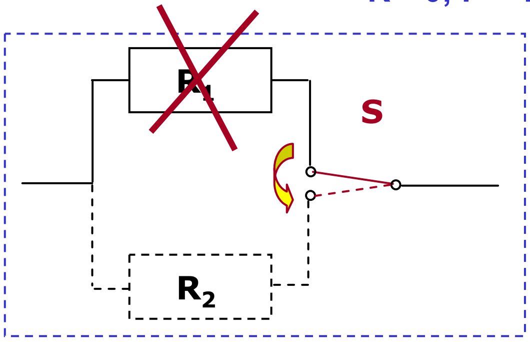
$$R_{PP} = 1 - (1 - R_1) \cdot (1 - R_2 \cdot k_f)$$

- Gdje je:

k_f – faktor umanjena pouzdanosti nekog elementa sustava kada on ne radi kako bi trebao

3.6 Sustavi sa sklopkom

- Elementi su povezani u paralelnu vezu kod kojeg kvar jednog elemenata izaziva automatsko uključivanje sklopke **S** te sustav radi dalje bez zastoja.



- Idealno stanje sustava: - sklopka se uključuje kada je potrebno

$$R_{p_s} = 1 - (1 - R_1) \cdot (1 - R_2)$$

- Realno stanje sustava:

a) Element 1 radi ispravno, sklopka se aktivira prijevremeno i element 2 otkazuje,

b) Element 1 otkazuje i sklopka otkazuje,

c) Element 1 otkazuje, sklopka se propisno aktivira ali element 2 otkazuje.

- Pouzdanost sustava sa sklopkom:

$$R_{p_s} = 1 - \underbrace{(\underbrace{R_1 \cdot Q_S^{'} \cdot Q_2}_{a)} + \underbrace{Q_1 \cdot Q_S}_{b)} + \underbrace{Q_1 \cdot R_S \cdot Q_2}_{c)})}_{F_{Ps}}$$

F_{Ps} - **NEPOUZDANOST**

- Gdje je:

R_1 – pouzdanost elementa 1

$Q_1=1-R_1$ –nepouzdanost sklopke u serijskoj vezi sa elementom 1

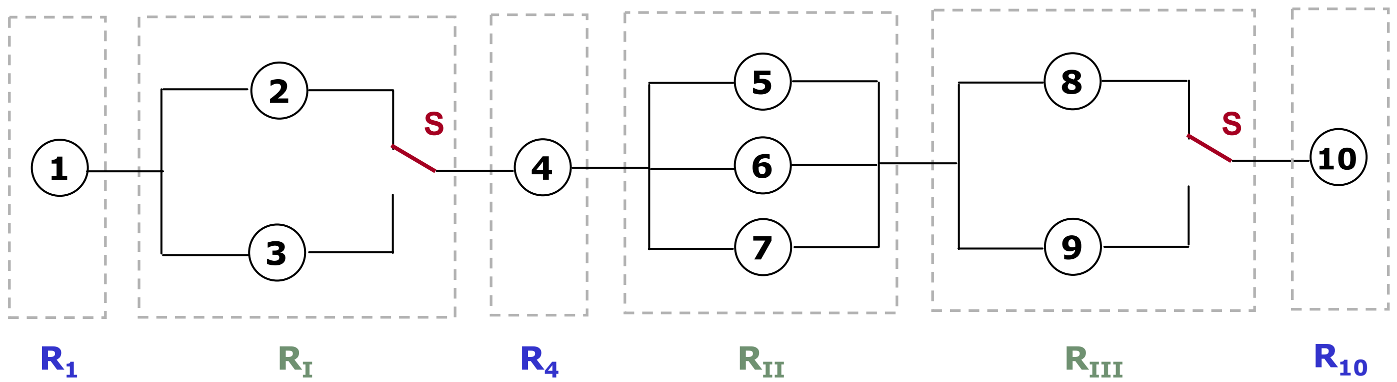
$Q_2=1-R_2$ –nepouzdanost sklopke u serijskoj vezi sa elementom 2

Q_S – **vjerojatnost** (nepouzdanost) uključivanja sklopke

Q_S' – **vjerojatnost** (nepouzdanost) prijevremenog uključivanja sklopke

$R_S=1-Q_S$ –pouzdanost sklopke u trenutku uključivanja

Primjer:



$$R_S = R_1 \cdot R_I \cdot R_4 \cdot R_{II} \cdot R_{III} \cdot R_{10}$$

$$R_I = 1 - (R_2 \cdot Q_S^{'} \cdot Q_3 + Q_2 \cdot Q_S + Q_2 \cdot R_S \cdot Q_3)$$

$$R_{II} = 1 - (1 - R_5) \cdot (1 - R_6) \cdot (1 - R_7) = 1 - Q_5 \cdot Q_6 \cdot Q_7$$

$$R_{III} = 1 - (R_8 \cdot Q_S^{'} \cdot Q_9 + Q_8 \cdot Q_S + Q_8 \cdot R_S \cdot Q_9)$$

3.7 Primjeri zadataka

Zadatak 1.

Odrediti pouzdanost za 3 sata rada sustava prikazanog na slici ako su zadane sljedeće veličine:

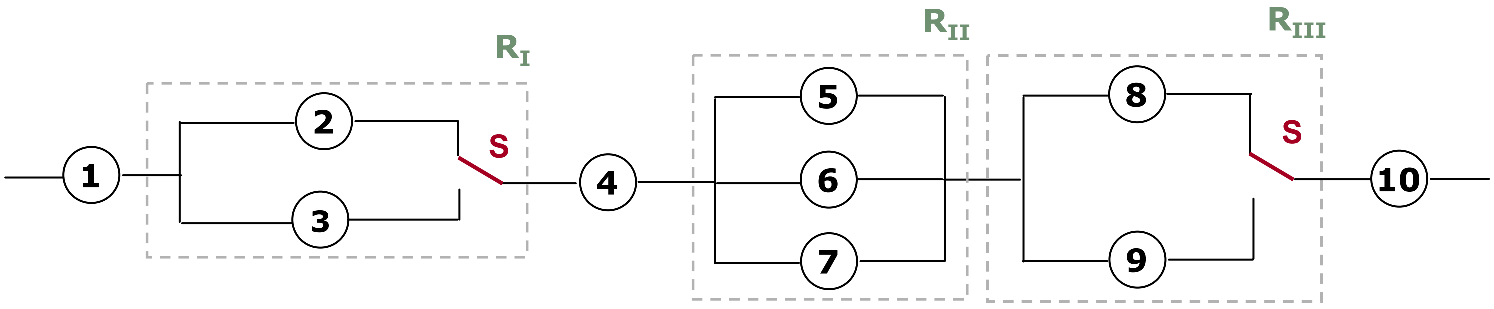
$R_1=0.79$	$R_5=0.60$	$Q_9=0.10$
$R_2=0.68$	$R_6=0.65$	$R_{10}=0.95$
$R_3=0.88$	$R_7=0.80$	$R_s=0.87$
$Q_4=0.42$	$Q_8=0.34$	

Vjerojatnosti da se sklopka uključi prije vremena: $Q'_s=0.00015$

Napomena:

-računati na 5 decimala

Rješenje:



$$R_I = 1-(R_2 \cdot Q_S^{'} \cdot Q_3 + Q_2 \cdot Q_S + Q_2 \cdot R_S \cdot Q_3) =$$
$$= 1-\left(0.68 \cdot 0.00015 \cdot 0.12 + 0.32 \cdot 0.13 + 0.32 \cdot 0.87 \cdot 0.12\right) = 0.92498$$

$$Q_2 = 1 - R_2 = 1 - 0.68 = 0.32$$

$$Q_3 = 1 - R_3 = 1 - 0.88 = 0.12$$

$$R_{II} = 1-\left[\left(1-R_5\right)\cdot\left(1-R_6\right)\cdot\left(1-R_7\right)\right] = 1-\left[0.4 \cdot 0.35 \cdot 0.2\right] = 0.972$$

$$R_{III} = 1-(R_8 \cdot Q_S^{'} \cdot Q_9 + Q_8 \cdot Q_S + Q_8 \cdot R_S \cdot Q_9) =$$
$$= 1-\left(0.66 \cdot 0.00015 \cdot 0.1 + 0.34 \cdot 0.13 + 0.34 \cdot 0.87 \cdot 0.1\right) = 0.92621$$

$$R_S = R_1 \cdot R_I \cdot R_4 \cdot R_{II} \cdot R_{III} \cdot R_{10} = 0.79 \cdot 0.92498 \cdot 0.58 \cdot 0.972 \cdot 0.92621 \cdot 0.95 = 0.36248$$

Zadatak 2.

Odrediti pouzdanost za 3 sata rada sustava prikazanog na slici ako su zadane sljedeće veličine:

$R_1=0.72$	$\lambda_5=0.042611124$	$R_{s1}=0.888$
$\lambda_2=0.003350112$	$Q_6=0.59$	$Q_{s2}=0.223$
$Q_3=0.03$	$Q_7=0.15$	$R_{s3}=0.999$
$R_4=0.90$	$R_8=0.80$	

Pouzdanost fiktivnog elementa $k_f=0.987$

Vjerojatnosti da se sklopke uključe prije vremena: $Q'_{s1}=0.009$; $Q'_{s2}=0.007$; $Q'_{s3}=0.002$

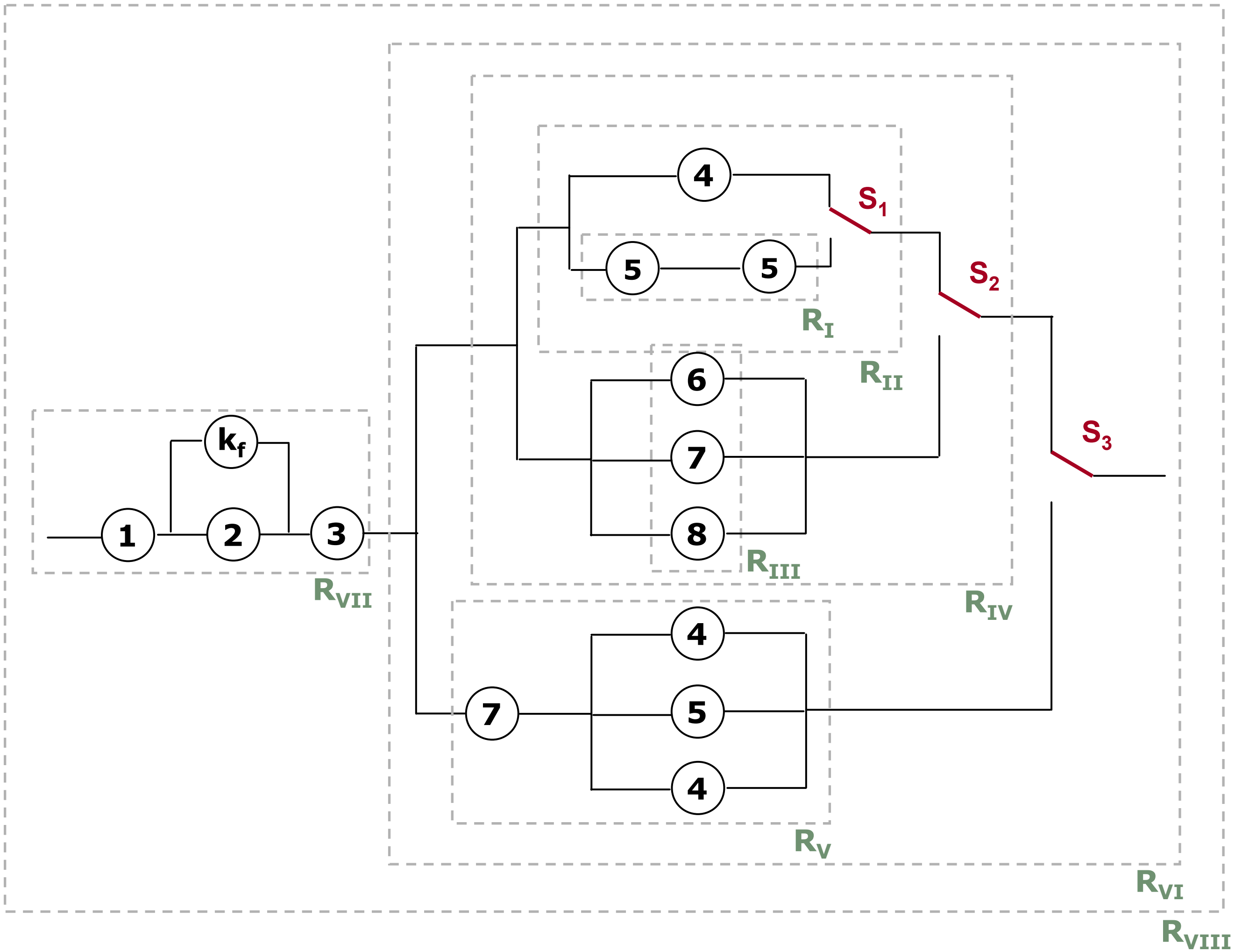
Napomena:

-raspodjela pouzdanosti je eksponencijalna, a računa se za vrijeme od 3 sata,

-pouzdanost elemenata 2 i 5 zaokružiti na dvije decimale,

-sve ostale proračune raditi na 5 decimala.

Rješenje:



$$R_I = R_5^2 = \left(e^{-\lambda_5 \cdot t}\right)^2 = \left(e^{-0.042611124 \cdot 3}\right)^2 = 0.7744$$

$$Q_I = 1 - R_I = 1 - 0.7744 = 0.2256$$

$$R_{II} = 1 - (R_4 \cdot Q'_{S1} \cdot Q_I + Q_4 \cdot Q_{S1} + Q_4 \cdot R_{S1} \cdot Q_I) =$$
$$= 1 - \left(0.9 \cdot 0.009 \cdot 0.2256 + 0.1 \cdot 0.112 + 0.1 \cdot 0.888 \cdot 0.2256\right) = 0.96694$$

$$Q_{II} = 1 - R_{II} = 1 - 0.96694 = 0.03306$$

$$R_{III} = 1 - \left(Q_6 \cdot Q_7 \cdot Q_8\right) = 1 - \left(0.59 \cdot 0.15 \cdot 0.2\right) = 0.9823$$

$$Q_8 = 1 - R_8 = 1 - 0.80 = 0.20$$

$$Q_{III} = 1 - R_{III} = 1 - 0.9823 = 0.0177$$

$$R_{IV} = 1 - (R_{II} \cdot Q'_{S2} \cdot Q_{III} + Q_{II} \cdot Q_{S2} + Q_{II} \cdot R_{S2} \cdot Q_{III}) =$$
$$= 1 - \left(0.96694 \cdot 0.007 \cdot 0.0177 + 0.03306 \cdot 0.223 + 0.03306 \cdot 0.777 \cdot 0.0177\right) = 0.99205$$

$$Q_{IV} = 1 - R_{IV} = 1 - 0.99205 = 0.00795$$

$$R_V = R_7 \cdot (1 - (Q_4 \cdot Q_5 \cdot Q_4)) = 0.85 \cdot (1 - (0.1 \cdot 0.12 \cdot 0.1)) = 0.84898$$

$$Q_V = 1 - R_V = 1 - 0.84898 = 0.15102$$

$$R_{VI} = 1 - (R_{IV} \cdot Q'_{S3} \cdot Q_V + Q_{IV} \cdot Q_{S3} + Q_{IV} \cdot R_{S3} \cdot Q_V) =$$
$$= 1 - (0.99205 \cdot 0.002 \cdot 0.15102 + 0.00795 \cdot 0.001 + 0.00795 \cdot 0.999 \cdot 0.15102) = 0.99849$$

$$R_{VII} = R_1 \cdot \left[1 - (1 - R_2) \cdot (1 - k_f)\right] \cdot R_3 = 0.72 \cdot \left[1 - (1 - 0.99) \cdot (1 - 0.987)\right] \cdot 0.97 = 0.69831$$

$$R_{VIII} = R_{VII} \cdot R_{VI} = 0.69831 \cdot 0.99849 = 0.69726$$