

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje
Zavod za tehničku mehaniku

MEHANIKA III – Z
RAČUNALNA KINEMATIKA

Sastavili:

Prof. dr. sc. Dragan Pustaić

Asistent Martina Lovrenić, dipl. ing. stroj.

Zagreb, 20. travnja 2005.

MEHANIKA III-Z

RAČUNALNA KINEMATIKA

Numeričke metode u kinematici

Numerička efikasnost, računalnog programa opće namjene ovisi o nekoliko faktora. Dva od njih treba posebno istaknuti, a to su: izbor koordinata i metoda numeričkog rješenja. Izbor koordinata direktno utječe na broj jednadžbi gibanja i red njihove nelinearnosti.

Efikasnost naspram jednostavnosti

Jednadžbe gibanja mehaničkog sustava mogu se izvesti i izraziti na različite načine, ovisno uglavnom o tipu koordinata koje se koriste. Skup koordinata \mathbf{q} (ili \underline{q}) odabran za određeni mehanički sustav može opisati položaj elemenata u sustavu i to jednoga u odnosu na drugoga (relativno), ili u odnosu na zajednički referentni koordinatni sustav.

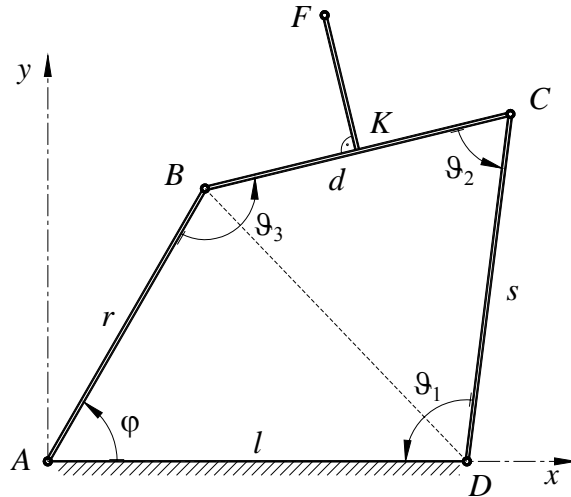
S namjerom da se pokaže kako različiti skupovi koordinata mogu voditi k različitim formulacijama, opisujući isti mehanički sustav, bit će pokazano na jednostavnom primjeru ravninskog četveročlanog mehanizma, tvz. **zglobnog četverokuta**. Provedena je kinematička analiza mehanizma. Sve osnovne kinematičke jednadžbe su algebarske jednadžbe, tj. ne uvode se diferencijalne jednadžbe.

I. Prvi način formuliranja kinematičkih jednadžbi za četveročlani mehanizam

Da bi se opisala konfiguracija mehaničkog sustava uvodi se samo jedna nezavisna koordinata, budući da zglobni četverokut ima samo jedan stupanj slobode gibanja (only one degree of freedom DOF). To se odnosi na jednu **poopćenu koordinatu** sustava, npr. kut φ . Za sustav koji ima n stupnjeva slobode gibanja bit će potrebno n poopćenih koordinata. Kod zglobnoga četverokuta, prema slici, za poopćenu koordinatu $q = \varphi$ može se odabrati, kut φ koji definira položaj ručice u odnosu na postolje, tj.

$$\underline{q} = [\varphi]. \quad (1)$$

U bilo kojem položaju mehanizma, znajući kut φ , može se jednoznačno izračunati položaj bilo koje druge točke mehanizma.



Slika 1. Položaj četveročlanog zglobnog mehanizma definiran je poopćenom koordinatom φ .

Kutovi ϑ_1 , ϑ_2 i ϑ_3 mogu se odrediti iz sljedećih **jednadžbi veza**:

$$(r^2 + l^2 + s^2 - d^2) - 2rl \cos \varphi - 2ls \cos \vartheta_1 + 2rs \cos(\varphi + \vartheta_1) = 0, \quad (2)$$

Trokut $\triangle ABD \rightarrow$ kosinusov poučak:

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= r^2 + l^2 - 2rl \cos \varphi = d^2 + s^2 - 2d s \cos \vartheta_2, \\ (r^2 + l^2 - s^2 - d^2) - 2rl \cos \varphi + 2d s \cos \vartheta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Konačno, zadnja jednadžba se dobije iz uvjeta da je zbroj kutova u četverokutu jednak 360° , tj.

$$\varphi + \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 - 2\pi = 0. \quad (4)$$

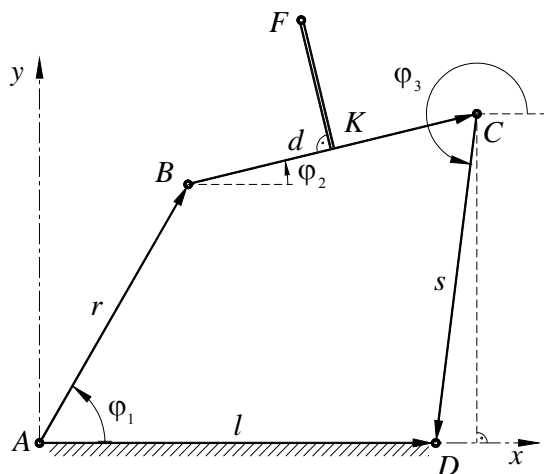
Jasno je, da se za dani kut φ (mehanizam ima jedan stupanj slobode gibanja), iz jedn. (2) može odrediti kut ϑ_1 , iz jedn. (3) kut ϑ_2 te konačno, iz jedn. (4) slijedi kut ϑ_3 . Rješenje tih jednadžbi zahtjeva *direktnu supstituciju* – nema potrebe za rješavanjem sustava simultanih algebarskih jednadžbi. Sada mora biti jasno da se koordinate bilo koje točke, pridružene bilo kojem članu mehanizma, u ovom primjeru točka F na članu BC , mogu lako odrediti.

II. Drugi način formuliranja kinematičkih jednadžbi

Prema toj metodi, da bi se definirao položaj četveročlanog zglobnog mehanizma uvode se tri koordinate. Za taj mehanizam, kao i za svaki drugi mehanizam, odabrane koordinate definiraju orijentaciju svakog pokretnog tijela u odnosu na nepokretno tijelo (postolje), ili u odnosu na neko drugo pokretno tijelo. Te koordinate nazivaju se **relativne koordinate**. Kao što je pokazano na slici, kutovi φ_1 , φ_2 i φ_3 odabiru se kao skup relativnih koordinata

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Ti se kutovi mjere između pozitivnog smjera osi x i pozitivnog vektora (položaja) koji predstavlja pojedini član mehanizma.



Slika 2. Relativne koordinate koje opisuju konfiguraciju četveročlanog zglobnog mehanizma.

Budući da četveročlani zglobni mehanizam, prema slici, ima samo jedan stupanj slobode gibanja, to znači da tri koordinate nisu međusobno nezavisne. Dvije **jednadžbe veze** koje se odnose na ove koordinate mogu se zapisati kako slijedi:

$$r \cos \varphi_1 + d \cos \varphi_2 + s \cos \varphi_3 - l = 0, \quad (6)$$

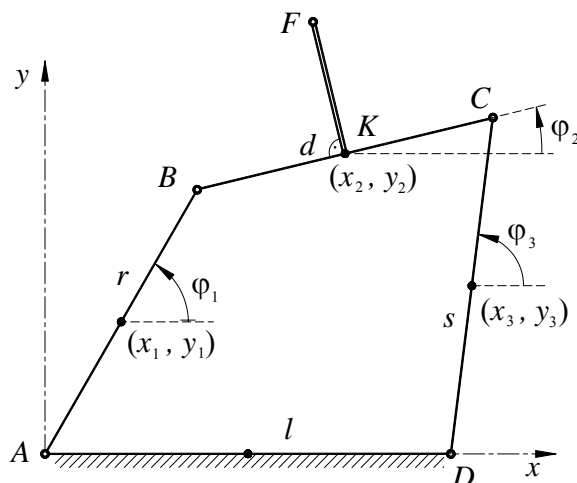
$$r \sin \varphi_1 + d \sin \varphi_2 + s \sin \varphi_3 = 0. \quad (7)$$

Za bilo koju konfiguraciju mehaničkog sustava, tj. poznavajući kut φ_1 , potrebno je riješiti *sustav od dvije simultane algebarske jednadžbe* (6) i (7), da bi odredili nepoznate koordinate φ_2 i φ_3 .

III. Treći način formuliranja kinematičkih jednadžbi

U ovoj formulaciji koriste se tri Kartezijske koordinate po svakom članu mehanizma i to: x i y koordinata težišta (središta masa) svakog člana mehanizma te kut što ga svaki član zatvara s pozitivnim smislom osi x – prema slici. Prema tome, vektor koordinata koji opisuje konfiguraciju četveročlanog mehanizma glasi:

$$\underline{q} = [x_1 \quad y_1 \quad \varphi_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad \varphi_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad \varphi_3]^T. \quad (8)$$



Slika 3. Kartezijske koordinate koje opisuju konfiguraciju četveročlanog zglobnog mehanizma.

Devet koordinata vektora (8) su međusobno ovisne. Te se ovisnosti mogu izraziti preko sljedećih osam **jednadžbi veza**:

$$x_1 - \frac{r}{2} \cos \varphi_1 = 0, \quad (9)$$

$$y_1 - \frac{r}{2} \sin \varphi_1 = 0, \quad (10)$$

$$x_1 + \frac{r}{2} \cos \varphi_1 - x_2 + \frac{d}{2} \cos \varphi_2 = 0, \quad (11)$$

$$y_1 + \frac{r}{2} \sin \varphi_1 - y_2 + \frac{d}{2} \sin \varphi_2 = 0, \quad (12)$$

$$x_2 + \frac{d}{2} \cos \varphi_2 - x_3 - \frac{s}{2} \cos \varphi_3 = 0, \quad (13)$$

$$y_2 + \frac{d}{2} \sin \varphi_2 - y_3 - \frac{s}{2} \sin \varphi_3 = 0, \quad (14)$$

$$x_3 - \frac{s}{2} \cos \varphi_3 - l = 0, \quad (15)$$

$$y_3 - \frac{s}{2} \sin \varphi_3 = 0. \quad (16)$$

Za svaku poznatu konfiguraciju sustava, može se specificirati devet varijabli, a potom se može izraziti preostalih osam varijabli tako da se riješi **sustav od osam nelinearnih algebarskih jednadžbi**, (9) do (16), s osam nepoznanica.

Tri prethodno opisana oblika formulacije – preko poopćenih koordinata, preko relativnih koordinata i pomoću Kartezijskih koordinata opisuju kinematiku četveročlanog zglobnog mehanizma. U slučaju dinamičke analize mogu se, također, izvesti diferencijalne jednadžbe gibanja za taj četveročlani zglobni mehanizam, ili za bilo koji drugi mehanički sustav, pomoću bilo kojeg od ova tri skupa koordinata. Ako se zglobni četverokut formulira pomoću poopćenih koordinata, onda se dobije jedna diferencijalna jednadžba drugoga reda u kojoj se pojavljuju φ , $\dot{\varphi}$ i $\ddot{\varphi}$. Ta je jednadžba visoko nelinearna u članovima koji sadrže veličine φ i $\dot{\varphi}$. Ako se formuliranje gibanja sustava izvodi preko relativnih koordinata, onda se za četveročlani zglobni mehanizam dobiju tri diferencijalne jednadžbe gibanja drugoga reda u kojima figuriraju veličine φ_i , $\dot{\varphi}_i$ i $\ddot{\varphi}_i$, za $i = 1, 2$ i 3 . Red nelinearnosti tih jednadžbi nije tako visok, ili tako kompleksan, kao u prvom slučaju. Međutim, zajedno s ove tri diferencijalne jednadžbe, treba istovremeno razmatrati i dvije algebarske jednadžbe veza (6) i (7). Prema tome, izvorne jednadžbe gibanja toga mehanizma, zapisane pomoću relativnih koordinata, su mješoviti **sustav algebarsko-diferencijalnih jednadžbi**. Slično se, u slučaju, opisivanja pomoću Kartezijskih koordinata, može izvesti sustav od devet diferencijalnih jednadžbi drugoga reda. One, zajedno s osam algebarskih jednadžbi veza, (9) do (16), definiraju osnovne jednadžbe gibanja četveročlanog zglobnog mehanizma. Te algebarsko-diferencijalne jednadžbe su slabo (labavo) spregnute i imaju relativno nizak red nelinearnosti kad se usporede s prethodna dva sustava jednadžbi.

Gruba, no ipak općenita usporedba tih triju sustava (skupova) koordinata, s obzirom na nekoliko ključnih i važnih aspekata, sabrana je u donjoj tablici. Općeniti zaključak koji se može izvesti iz tablice je: što je manji broj koordinata i jednadžbi, to je viši stupanj nelinearnosti i složenosti osnovnih jednadžbi gibanja.

	Poopćene koordinate	Relativne koordinate	Kartezijske koordinate
Broj koordinata	minimalan ⁺	umjeren, osrednji	velik
Broj diferencijalnih jednadžbi drugoga reda	minimalan ⁺	umjeren, osrednji	velik
Broj algebarskih jednadžbi veza	nijedna ⁺	umjeren, osrednji	velik
Red nelinearnosti	visok	umjeren, osrednji	nizak ⁺
Izvođenje diferencijalnih jednadžbi gibanja	teško	osrednje teško	jednostavno ⁺
Numerička efikasnost ¹	efikasne ⁺	efikasne ⁺	Ne toliko efikasne
Razvoj kompjutorskog programa opće namjene	teško	relativno teško	lako ⁺

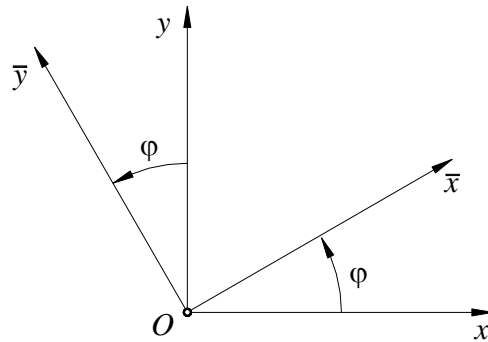
+ prednost pred druga dva sustava koordinata.

1 Numerička efikasnost u rješavanju izvornih jednadžbi gibanja ovisi o obliku i broju jednadžbi i metodi numeričkog rješenja.

TRANSFORMACIJA KOORDINATA

Rotacija koordinatnog sustava

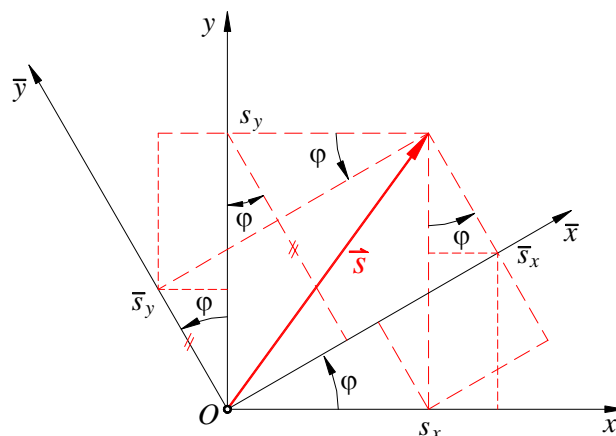
Slika 4 prikazuje dva Kartezijska referentna koordinatna sustava: osnovni, nepomični Oxy i novi (zarotirani ili transformirani) $O\bar{x}\bar{y}$. Os \bar{x} zarotirana je za kut φ u pozitivnom smislu u odnosu na os x (suprotno od smisla gibanja kazaljke na satu).



Slika 4. Rotacija koordinatnog sustava.

Geometrijski vektor \vec{s} može se predstaviti kao algebarski vektori $\underline{s} = \mathbf{s}$ i $\underline{\bar{s}} = \bar{\mathbf{s}}$ u osnovnom i transformiranom koordinatnom sustavu čije su komponente jednake komponentama vektora \vec{s} , tj.

$$\begin{aligned} \mathbf{s} = \underline{s} &= [s_x, s_y]^T && \rightarrow \text{u koord. sustavu } Oxy \\ \bar{\mathbf{s}} = \underline{\bar{s}} &= [\bar{s}_x, \bar{s}_y]^T && \rightarrow \text{u koord. sustavu } O\bar{x}\bar{y} \end{aligned} \quad (17)$$



Slika 5. Komponente vektora \vec{s} u osnovnom koordinatnom sustavu Oxy i zarotiranom koordinatnom sustavu $O\bar{x}\bar{y}$.

Iz slike 5 slijedi

$$\begin{aligned} s_x &= \bar{s}_x \cos \varphi - \bar{s}_y \sin \varphi, \\ s_y &= \bar{s}_x \sin \varphi + \bar{s}_y \cos \varphi. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} s_x \\ s_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{s}_x \\ \bar{s}_y \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Prema tome, vektori \mathbf{s} i $\bar{\mathbf{s}}$ povezani su linearnom transformacijom (matričnom transformacijom):

$$\mathbf{s} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{s}} \quad \text{ili} \quad \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\bar{s}}}, \quad (20)$$

pri čemu je $\underline{\underline{A}}$ **matrica transformacije** pri rotaciji koordinatnog sustava Oxy , u ravnini, a iznosi

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Inverzijom jednadžbi (2) dobije se:

$$\begin{aligned} \bar{s}_x &= s_x \cos \varphi + s_y \sin \varphi, \\ \bar{s}_y &= -s_x \sin \varphi + s_y \cos \varphi. \end{aligned} \quad (22)$$

$$\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{A}^T \mathbf{s}, \quad \text{ili} \quad \underline{\underline{\bar{s}}} = \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{s}}, \quad (23)$$

pri čemu je \mathbf{A}^T transponirana matrica matrice, \mathbf{A} , tj.

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Umnožak matrica \mathbf{A}^T i \mathbf{A} daje:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi + \cos \varphi \sin \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi + \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} = \underline{\underline{I}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Prema tome, \mathbf{A} je **ortogonalna matrica**, pa vrijedi

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}, \quad \text{ili} \quad \underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}^{-1}, \quad (26)$$

gdje je \mathbf{A}^{-1} **inverzna matrica** matrice \mathbf{A} .

Translacija i rotacija koordinatnog sustava

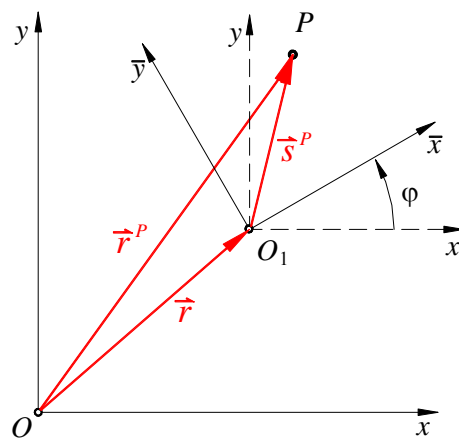
Ako se ishodišta koordinatnih sustava ne podudaraju, onda se prethodna analiza može primijeniti na zarotirani koordinatni sustav $O_1\bar{x}\bar{y}$ i translativani sustav O_1xy (prema donjoj slici). Ako vektor $\bar{\mathbf{s}}^P$ označava položaj točke P u zarotiranom koor. sustavu $O_1\bar{x}\bar{y}$, tada će u translativanom koor. sustavu O_1xy taj vektor iznositi –prema izrazu (20):

$$\mathbf{s}^P = \mathbf{A} \bar{\mathbf{s}}^P. \quad (27)$$

Iz slike se vidi da vrijedi

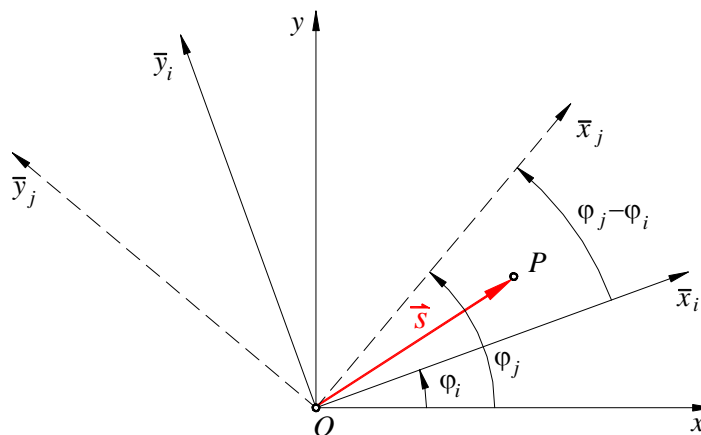
$$\mathbf{r}^P = \mathbf{r} + \mathbf{s}^P = \mathbf{r} + \mathbf{A} \bar{\mathbf{s}}^P, \quad (28)$$

gdje \mathbf{r} predstavlja vektor položaja novog ishodišta O_1 u odnosu na staro O .



Slika 6. Translacija i rotacija koordinatnog sustava.

Tri referentna koordinatna sustava sa zajedničkim ishodištem Oxy , $O\bar{x}_i\bar{y}_i$ i $O\bar{x}_j\bar{y}_j$



Slika 7. Tri referentna koordinatna sustava sa zajedničkim ishodištem Oxy , $O\bar{x}_i\bar{y}_i$ i $O\bar{x}_j\bar{y}_j$.

Neki proizvoljni vektor \mathbf{s} u koor. sustavu Oxy , bit će predstavljen kao vektor $\bar{\mathbf{s}}_i$ u sustavu $O\bar{x}_i\bar{y}_i$, odnosno kao vektor $\bar{\mathbf{s}}_j$ u sustavu $O\bar{x}_j\bar{y}_j$, tj.

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}_i \bar{\mathbf{s}}_i = \mathbf{A}_j \bar{\mathbf{s}}_j \quad (29)$$

gdje su \mathbf{A}_i i \mathbf{A}_j **matrice transformacije** iz koor. sustava $O\bar{x}_i\bar{y}_i$ i $O\bar{x}_j\bar{y}_j$ u koor. sustav Oxy , a definirane su prema izrazu (21). Kako su \mathbf{A}_i i \mathbf{A}_j **ortogonalne matrice** (a to znači da vrijedi: $\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i = \mathbf{I}$ i $\mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_j = \mathbf{I}$) pa iz tog svojstva slijedi da je $\mathbf{A}_i^T = \mathbf{A}_i^{-1}$ i $\mathbf{A}_j^T = \mathbf{A}_j^{-1}$. Na osnovi toga svojstva iz jednadžbe (29) može se odrediti vektor $\bar{\mathbf{s}}_i$ (dijeljenjem s matricom \mathbf{A}_i ili što je isto: množenjem (s lijeva) s inverznom matricom \mathbf{A}_i^{-1} , a ona je jednaka \mathbf{A}_i^T)

$$\bar{\mathbf{s}}_i = \frac{\mathbf{A}_j}{\mathbf{A}_i} \cdot \bar{\mathbf{s}}_j = \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{A}_j \bar{\mathbf{s}}_j = \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j \bar{\mathbf{s}}_j = \mathbf{A}_{ij} \bar{\mathbf{s}}_j. \quad (30)$$

$$\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j \quad \left(\mathbf{A}_{ij}^T = \mathbf{A}_j^T (\mathbf{A}_i^T)^T \right) \quad (31)$$

Prema tome, \mathbf{A}_{ij} je **matrica transformacije** iz koor. sustava $O\bar{x}_j\bar{y}_j$ u koor. sustav $O\bar{x}_i\bar{y}_i$. Neposredan i jednostavan račun pokazuje da je matrica \mathbf{A}_{ij} također **ortogonalna matrica**.

$$\mathbf{A}_{ij}^T \mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_i \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j = \mathbf{A}_j^T \mathbf{I} \mathbf{A}_j = \mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_j = \mathbf{I}. \quad (32)$$

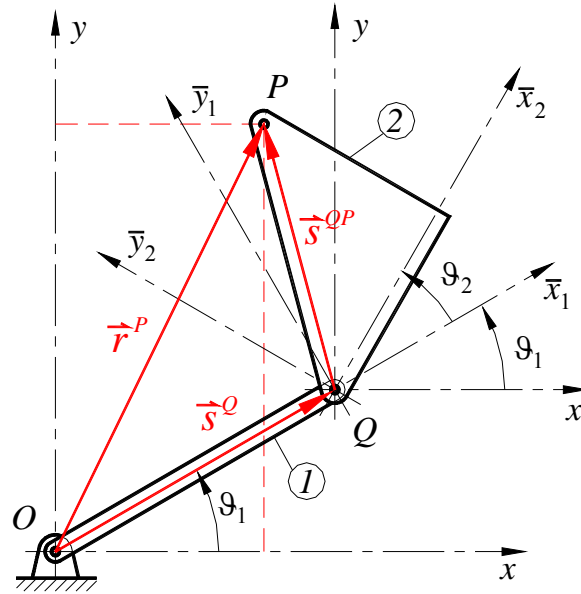
Koristeći se definicijom matrica transformacije \mathbf{A}_i i \mathbf{A}_j , prema izrazu (21), može se na osnovi matrične jednadžbe (31) pisati

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ij} &= \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_j & -\sin \varphi_j \\ \sin \varphi_j & \cos \varphi_j \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi_i \cos \varphi_j + \sin \varphi_i \sin \varphi_j & \sin \varphi_i \cos \varphi_j - \cos \varphi_i \sin \varphi_j \\ -\cos \varphi_j \sin \varphi_i + \sin \varphi_j \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \sin \varphi_j + \cos \varphi_i \cos \varphi_j \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi_j - \varphi_i) & -\sin(\varphi_j - \varphi_i) \\ \sin(\varphi_j - \varphi_i) & \cos(\varphi_j - \varphi_i) \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\varphi_j - \varphi_i). \end{aligned} \quad (33)$$

To je upravo **matrica transformacije** zbog rotacije koor. sustava $O\bar{x}_j\bar{y}_j$ za kut $(\varphi_j - \varphi_i)$, u odnosu na koor. sustav $O\bar{x}_i\bar{y}_i$. Kako matrica \mathbf{A}_{ij} transformira vektore iz koor. sustava $O\bar{x}_j\bar{y}_j$ u koordinatni sustav $O\bar{x}_i\bar{y}_i$, onda se matrična jednadžba (30) može očitati (napisati) neposredno sa slike.

PRIMJER 1

Mehanizam, prema slici, sastavljen je od dva kruta tijela 1 i 2 (two-body positioning mechanism). Položaj mehanizma određen je kutovima $\varphi_1 = \vartheta_1$ i $\varphi_2 = \vartheta_1 + \vartheta_2$. Dva aktuatora (motora) upravljaju kutovima φ_1 i φ_2 . Odrediti položaj točke P u odnosu na ishodište koor. sustava Oxy .



Slika 8. Određivanje položaja mehanizma sastavljenog od dva kruta tijela.

$$\vec{r}^P = \vec{r}^Q + \vec{s}^{QP} \quad (34)$$

$$\mathbf{r}^P = \mathbf{r}^Q + \mathbf{s}^{QP} = \mathbf{s}^Q + \mathbf{s}^{QP} \quad (35)$$

\mathbf{r}^Q ili $\mathbf{s}^Q \Rightarrow$ prema (20)

$$\mathbf{r}^Q = \mathbf{A}(\vartheta_1) \bar{\mathbf{s}}_1^Q, \quad \mathbf{s}^{QP} = \mathbf{A}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP}, \quad (36)$$

gdje $\bar{\mathbf{s}}_2^{QP}$ predstavlja vektor *fiksiran* u koor. sustavu $Q\bar{x}_2\bar{y}_2$, a označava *relativan položaj* točke P prema točki Q .

$$\mathbf{r}^P = \mathbf{A}(\vartheta_1) \bar{\mathbf{s}}_1^Q + \mathbf{A}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP}$$

$$\mathbf{r}^P = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_1 & -\sin \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{s}}_1^Q + \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) & -\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) & \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{bmatrix} \bar{\mathbf{s}}_2^{QP}. \quad (37)$$

PRIMJER 2

Isti primjer, ali druga formulacija. Koristimo se *linearnom transformacijom* (30), pri čemu je: $\varphi_j = \vartheta_1 + \vartheta_2$ i $\varphi_i = \vartheta_1$ pa je $\varphi_j - \varphi_i = \vartheta_2$.

$$\mathbf{r}^P = \mathbf{r}^Q + \mathbf{s}^{QP} = \mathbf{A}_1(\vartheta_1)\bar{\mathbf{s}}_1^Q + \mathbf{A}_1(\vartheta_1)\bar{\mathbf{s}}_1^{QP} \quad (38)$$

Vektor \mathbf{s}^{QP} , transformiran iz koor. sustava $Q\bar{x}_2\bar{y}_2$ u koor. sustav $Q\bar{x}_1\bar{y}_1$ iznosi, prema (30)

$$\bar{\mathbf{s}}_1^{QP} = \mathbf{A}_{12}\bar{\mathbf{s}}_2^{QP} \quad (39)$$

$$\mathbf{r}^P = \mathbf{A}_1(\vartheta_1)\bar{\mathbf{s}}_1^Q + \mathbf{A}_1(\vartheta_1)\mathbf{A}_{12}(\vartheta_2)\bar{\mathbf{s}}_2^{QP}. \quad (40)$$

$$\mathbf{A}_1(\vartheta_1) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_1 & -\sin \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12}(\vartheta_2) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_2 & -\sin \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 & \cos \vartheta_2 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

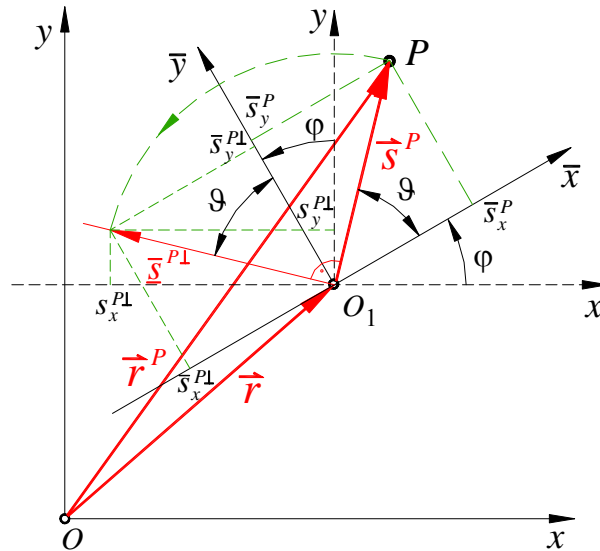
$$\mathbf{r}^P = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_1 & -\sin \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{s}}_1^Q + \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) & -\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) & \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{bmatrix} \bar{\mathbf{s}}_2^{QP}. \quad (42)$$

BRZINA I UBRZANJE TOČKE FIKSIRANE U POMIČNOM KOORDINATNOM SUSTAVU

Često puta se u praktičnim primjenama Kartezijski referentni koordinatni sustav $O_1\bar{x}\bar{y}$ fiksira (veže) za tijelo koje se giba kako bi se definirao njegov položaj i orijentacija, relativno u odnosu na stacionarni globalni referentni koordinatni sustav Oxy . Promatramo točku P koja je fiksirana u koordinatnom sustavu $O_1\bar{x}\bar{y}$, kao što je prikazano na slici. Vektor koji određuje položaj točke P u koordinatnom sustavu Oxy dan je matričnom jednačbom (28)

$$\underline{r}^P = \underline{r} + \underline{s}^P = \underline{r} + \underline{\underline{A}}\bar{s}^P, \quad \mathbf{r}^P = \mathbf{r} + \mathbf{s}^P = \mathbf{r} + \mathbf{A}\bar{\mathbf{s}}^P \quad (43)$$

gdje \bar{s}^P predstavlja *konstantni* vektor koordinata točke P u koordinatnom sustavu $O_1\bar{x}\bar{y}$, a $\underline{\underline{A}}$ je *matrica transformacije* iz koordinatnog sustava $O_1\bar{x}\bar{y}$ u koordinatni sustav Oxy .



Slika 9. Točka P vezana (fiksirana) u koordinatnom sustavu $O_1\bar{x}\bar{y}$.

Budući da se koordinatni sustav $O_1\bar{x}\bar{y}$ giba (rotira) i mijenja svoju orijentaciju s vremenom, onda su vektor \underline{r} i matrica transformacije $\underline{\underline{A}}$ funkcije vremena. Derivirajmo vektor položaja \underline{r}^P po vremenu – prema jednačbi (43)

$$\dot{\underline{r}}^P = \dot{\underline{r}} + \dot{\underline{\underline{A}}}\bar{s}^P. \quad (44)$$

Kod deriviranja po vremenu vektor \bar{s}^P smatramo *konstantom*, jer se ne mijenja u koordinatnom sustavu $O_1\bar{x}\bar{y}$. Iz jednačbe (21) slijedi:

$$\dot{\underline{\underline{A}}} = \frac{d}{d\varphi} \underline{\underline{A}} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d}{d\varphi} \underline{\underline{A}} = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{bmatrix} \equiv \dot{\varphi} \underline{\underline{B}}, \quad (45)$$

gdje je

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Iz izraza (44) slijedi:

$$\dot{\mathbf{r}}^P = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\varphi} \mathbf{B} \bar{\mathbf{s}}^P. \quad (47)$$

Ako se uvede *ortogonalna matrica rotacije* \mathbf{R}

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (48)$$

vidi se da je

$$\mathbf{A} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{bmatrix} = \mathbf{B}. \quad (49)$$

Isto tako vrijedi:

$$\mathbf{A} \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{A}. \quad (50)$$

Iz jednadžbe (47) slijedi:

$$\dot{\mathbf{r}}^P = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\varphi} \mathbf{A} \mathbf{R} \bar{\mathbf{s}}^P = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\varphi} \mathbf{A} \bar{\mathbf{s}}^{P\perp} = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\varphi} \mathbf{s}^{P\perp}. \quad (51)$$

\perp znak za okomicu, okomit na $\bar{\mathbf{s}}^P$.

$\mathbf{s}^{P\perp} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{s}}^{P\perp}$, u osnovnom koordinatnom sustavu O_1xy .

$$\mathbf{R} \bar{\mathbf{s}}^P = \bar{\mathbf{s}}^{P\perp}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{s}_x^P \\ \bar{s}_y^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{s}_y^P \\ \bar{s}_x^P \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{s}}^{P\perp}.$$

$$\bar{s}_x^{P\perp} = \bar{s}^P \cos \vartheta, \quad \bar{s}_y^{P\perp} = \bar{s}^P \sin \vartheta, \quad \bar{s}_x^{P\perp} = -\bar{s}_y^P, \quad \bar{s}_y^{P\perp} = \bar{s}_x^P.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{s}^P \cos \vartheta \\ \bar{s}^P \sin \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{s}^P \sin \vartheta \\ \bar{s}^P \cos \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{s}_y^P \\ \bar{s}_x^P \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{s}}^{P\perp}.$$

$$\mathbf{A} \bar{\mathbf{s}}^{P\perp} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\bar{s}^P \sin \vartheta \\ \bar{s}^P \cos \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{s}^P \sin \vartheta \cdot \cos \varphi - \bar{s}^P \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \\ -\bar{s}^P \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + \bar{s}^P \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\bar{s}^P (\sin \mathcal{G} \cdot \cos \varphi + \cos \mathcal{G} \cdot \sin \varphi) \\ \bar{s}^P (\cos \mathcal{G} \cdot \cos \varphi - \sin \mathcal{G} \cdot \sin \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{s}^P \sin(\mathcal{G} + \varphi) \\ \bar{s}^P \cos(\mathcal{G} + \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x^{P\perp} \\ s_y^{P\perp} \end{bmatrix} = \mathbf{s}^{P\perp}.$$

Konačno, lako se uoči da vrijedi

$$\dot{\mathbf{B}} = \frac{d}{dt} \mathbf{B} = \frac{d}{d\varphi} \mathbf{B} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d}{d\varphi} \mathbf{B} = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix} = -\dot{\varphi} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = -\dot{\varphi} \mathbf{A}. \quad (52)$$

Ako se matricna jednadžba (47) još jedanput derivira po vremenu t dobije se ubrzanje točke P , tj.

$$\ddot{\mathbf{r}}^P = \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\varphi} \dot{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{s}}^P + \dot{\varphi} \dot{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{s}}^P = \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\varphi} \dot{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{s}}^P - \dot{\varphi}^2 \mathbf{A} \bar{\mathbf{s}}^P. \quad (53)$$

Alternativni oblici matricne jednadžbe (53) dobiju se, koristeći matricne jednadžbe (49) i (50), kao

$$\ddot{\mathbf{r}}^P = \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\varphi} \mathbf{A} \bar{\mathbf{s}}^{P\perp} - \dot{\varphi}^2 \mathbf{A} \bar{\mathbf{s}}^P = \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\varphi} \mathbf{s}^{P\perp} - \dot{\varphi}^2 \mathbf{s}^P. \quad (54)$$

Vektor položaja točke P na krutom tijelu 2 izveden je u prethodnom primjeru i određen matricnom jednadžbom:

$$\mathbf{r}^P = \mathbf{A}_1(\mathcal{G}_1) \bar{\mathbf{s}}_1^Q + \mathbf{A}_1(\mathcal{G}_1) \mathbf{A}_{12}(\mathcal{G}_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} \quad (55)$$

Vektori $\bar{\mathbf{s}}_1^Q$ i $\bar{\mathbf{s}}_2^{QP}$ su konstantne veličine. Ako jednadžbu (55) deriviramo po vremenu t , uzevši u obzir da je $\dot{\mathbf{A}}(\varphi) = \dot{\varphi} \mathbf{B}(\varphi)$, dobije se

$$\dot{\mathbf{r}}^P = \dot{\mathcal{G}}_1 \mathbf{B}_1(\mathcal{G}_1) \bar{\mathbf{s}}_1^Q + \dot{\mathcal{G}}_1 \mathbf{B}_1(\mathcal{G}_1) \mathbf{A}_{12}(\mathcal{G}_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} + \dot{\mathcal{G}}_2 \mathbf{A}_1(\mathcal{G}_1) \mathbf{B}_{12}(\mathcal{G}_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} \quad (56)$$

Ponovnim deriviranjem matricne jednadžbe (56) po vremenu t , koristeći se pri tom matricnom jednadžbom $\dot{\mathbf{B}}(\varphi) = -\dot{\varphi} \mathbf{A}(\varphi)$, dobije se ubrzanje točke P .

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}^P = & \ddot{\mathcal{G}}_1 \mathbf{B}_1(\mathcal{G}_1) \bar{\mathbf{s}}_1^Q + \dot{\mathcal{G}}_1 (-\dot{\mathcal{G}}_1 \mathbf{A}_1(\mathcal{G}_1)) \bar{\mathbf{s}}_1^Q + \left[\ddot{\mathcal{G}}_1 \mathbf{B}_1(\mathcal{G}_1) + \dot{\mathcal{G}}_1 (-\dot{\mathcal{G}}_1 \mathbf{A}_1(\mathcal{G}_1)) \right] \mathbf{A}_{12}(\mathcal{G}_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} + \\ & + \dot{\mathcal{G}}_1 \mathbf{B}_1(\mathcal{G}_1) \dot{\mathcal{G}}_2 \mathbf{B}_{12}(\mathcal{G}_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} + \left[\ddot{\mathcal{G}}_2 \mathbf{A}_1(\mathcal{G}_1) + \dot{\mathcal{G}}_2 \dot{\mathcal{G}}_1 \mathbf{B}_1(\mathcal{G}_1) \right] \mathbf{B}_{12}(\mathcal{G}_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} + \dot{\mathcal{G}}_2 \mathbf{A}_1(\mathcal{G}_1) (-\dot{\mathcal{G}}_2 \mathbf{A}_{12}(\mathcal{G}_2)) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} \end{aligned} \quad (57)$$

$$\mathbf{A}_1(\mathcal{G}_1) = \begin{bmatrix} \cos \mathcal{G}_1 & -\sin \mathcal{G}_1 \\ \sin \mathcal{G}_1 & \cos \mathcal{G}_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{12}(\mathcal{G}_2) = \begin{bmatrix} \cos \mathcal{G}_2 & -\sin \mathcal{G}_2 \\ \sin \mathcal{G}_2 & \cos \mathcal{G}_2 \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$\mathbf{B}_1(\mathcal{G}_1) = \begin{bmatrix} -\sin \mathcal{G}_1 & -\cos \mathcal{G}_1 \\ \cos \mathcal{G}_1 & -\sin \mathcal{G}_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{12}(\mathcal{G}_2) = \begin{bmatrix} -\sin \mathcal{G}_2 & -\cos \mathcal{G}_2 \\ \cos \mathcal{G}_2 & -\sin \mathcal{G}_2 \end{bmatrix} \quad (59)$$

Pogledajmo što predstavlja zbroj dvaju zaokruženih pribrojnika.

$$-\dot{\mathcal{G}}_1^2 \mathbf{A}_1(\mathcal{G}_1) \bar{\mathbf{s}}_1^Q - \dot{\mathcal{G}}_1^2 \mathbf{A}_1(\mathcal{G}_1) \mathbf{A}_{12}(\mathcal{G}_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} = ? \quad (60)$$

Sa slike, iz PRIMJERA 1, slijedi

$$\bar{\mathbf{r}}^P = \bar{\mathbf{s}}^Q + \bar{\mathbf{s}}^{QP} \quad \dots \text{ u koordinatnom sustavu } Oxy. \quad (61)$$

$$\mathbf{r}^P = \mathbf{s}^Q + \mathbf{s}^{QP} \quad \dots \text{ vektori u koordinatnom sustavu } Oxy. \quad (62)$$

Koristeći matrične jednadžbe (27) i (30) može se pisati

$$\mathbf{r}^P = \mathbf{A}_1(\mathcal{G}_1) \bar{\mathbf{s}}_1^Q + \mathbf{A}_{12}(\mathcal{G}_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP}$$

$$\bar{\mathbf{s}}_1^Q \quad \dots \text{ vektor u koordinatnom sustavu } O\bar{x}_1\bar{y}_1.$$

$$\bar{\mathbf{s}}_2^{QP} \quad \dots \text{ vektor u koordinatnom sustavu } Q\bar{x}_2\bar{y}_2.$$

$$\mathbf{A}_{12}(\mathcal{G}_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} \quad \dots \text{ vektor u koordinatnom sustavu } Q\bar{x}_1\bar{y}_1.$$

Da bi dobili vektor $\mathbf{A}_{12}(\mathcal{G}_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP}$ prikazan u osnovnom koordinatnom sustavu Oxy još ga treba *s lijeva*, prema matričnoj jednadžbi (27), pomnožiti s $\mathbf{A}_1(\mathcal{G}_1)$, tj.

$$\mathbf{r}^P = \mathbf{A}_1(\mathcal{G}_1) \bar{\mathbf{s}}_1^Q + \mathbf{A}_1(\mathcal{G}_1) \cdot \mathbf{A}_{12}(\mathcal{G}_2) \cdot \bar{\mathbf{s}}_2^{QP}, \quad (63)$$

A to je upravo izraz (60) kad se pomnoži s $(-\dot{\mathcal{G}}_1^2)$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}^P = \ddot{\mathcal{G}}_1 \left[\mathbf{B}_1(\mathcal{G}_1) \bar{\mathbf{s}}_1^Q + \mathbf{B}_1(\mathcal{G}_1) \cdot \mathbf{A}_{12}(\mathcal{G}_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} \right] + \ddot{\mathcal{G}}_2 \mathbf{A}_1(\mathcal{G}_1) \cdot \mathbf{B}_{12}(\mathcal{G}_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} - \dot{\mathcal{G}}_1^2 \cdot \mathbf{r}^P - \\ - \dot{\mathcal{G}}_2^2 \mathbf{A}_1(\mathcal{G}_1) \mathbf{A}_{12}(\mathcal{G}_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} + 2\dot{\mathcal{G}}_1 \dot{\mathcal{G}}_2 \mathbf{B}_1(\mathcal{G}_1) \mathbf{B}_{12}(\mathcal{G}_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} \end{aligned} \quad (64)$$

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje
Zavod za tehničku mehaniku

MEHANIKA III – Z
RAČUNALNA KINEMATIKA

Numerički primjeri

Sastavili:

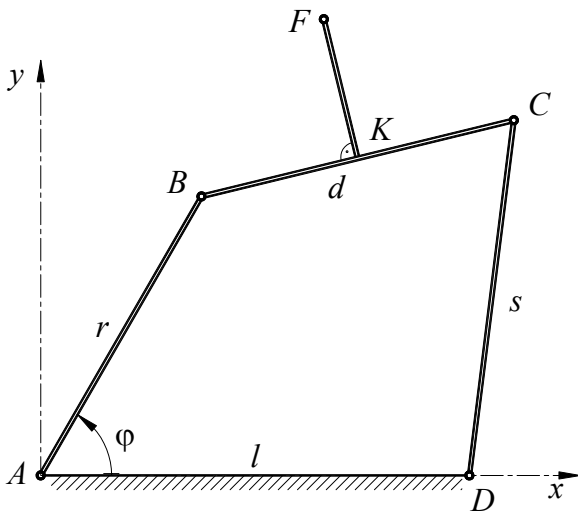
Prof. dr. sc. Dragan Pustaić

Asistent Martina Lovrenić, dipl. ing. stroj.

Zagreb, 28. veljače 2005.

Različiti načini formuliranja kinematičkih jednadžbi četveročlanog mehanizma

Primjer 1



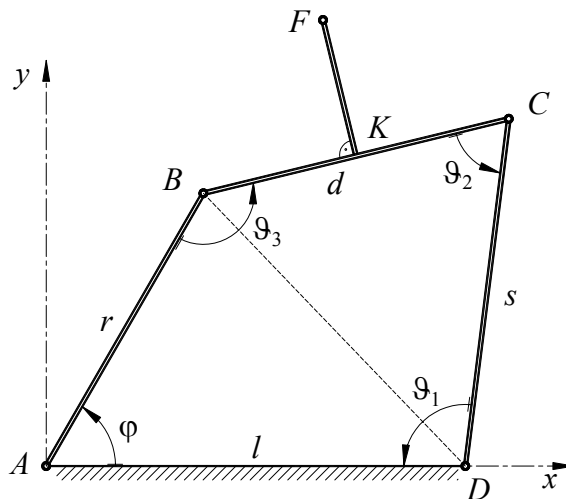
Odrediti položaj mehanizma za tri karakteristične vrijednosti nezavisne varijable (kut φ po prvoj formulaciji, kut φ_1 po drugoj i trećoj formulaciji). Nacrati karakteristične položaje mehanizma za φ (ili φ_1) = 30° , 60° i 120° .

Na sredini člana \overline{BC} , okomito na njega pričvršćen je član \overline{KF} , duljine $\overline{KF} = 200$ mm

Zadano: $r = d = 450$ mm ; $s = 500$ mm ;
 $l = 600$ mm.

I. Prvi način formuliranja kinematičkih jednadžbi

U bilo kojem položaju mehanizma, znajući kut φ , može se jednoznačno izračunati položaj bilo koje druge točke mehanizma.



Slika 1. Položaj četveročlanog zglobnog mehanizma definiran poopćenom koordinatom φ .

Kutevi ϑ_1 , ϑ_2 i ϑ_3 mogu se odrediti iz slijedećih jednadžbi veza:

$$d^2 = d_x^2 + d_y^2$$

$$(r^2 + l^2 + s^2 - d^2) - 2rl \cos \varphi - 2ls \cos \vartheta_1 + 2rs \cos(\varphi + \vartheta_1) = 0 \quad (1)$$

Kosinusov poučak:

$$\overline{BD}^2 = r^2 + l^2 - 2rl \cos \varphi = d^2 + s^2 - 2ds \cos \vartheta_2$$

$$(r^2 + l^2 - s^2 - d^2) - 2rl \cos \varphi + 2ds \cos \vartheta_2 = 0 \quad (2)$$

Konačno zadnja jednačba se dobije iz uvjeta da je zbroj kutova u četverokutu jednak 360° , tj.

$$\varphi + \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 - 2\pi = 0 \quad (3)$$

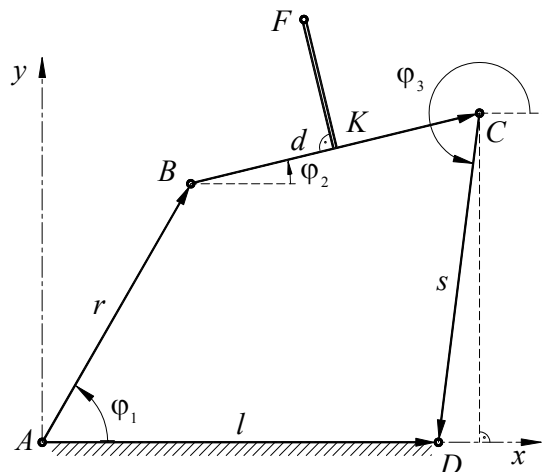
Jasno je, da se za dani kut φ (mehanizam ima jedan stupanj slobode gibanja), iz jednačbe (1) može odrediti kut ϑ_1 , iz jednačbe (2) kut ϑ_2 te konačno, iz jednačbe (3) slijedi kut ϑ_3 . Rješenje tih jednačbi zahtijeva direktnu supstituciju - nema potrebe za rješavanjem sustava simultanih algebarskih jednačbi. Sada mora biti jasno da se koordinate bilo koje točke, pridružene bilo kojem članu mehanizma, u ovom primjeru točka F na članu BC , mogu lako odrediti.

II. Drugi način formuliranja kinematičkih jednačbi

Prema toj metodi da bi se definirao položaj četveročlanog zglobnog mehanizma uvode se tri koordinate. Za taj mehanizam, kao i za svaki drugi mehanizam, odabrane koordinate definiraju orijentaciju svakog pokretnog tijela u odnosu na nepokretno tijelo (postolje), ili u odnosu na neko drugo pokretno tijelo. Te koordinate nazivaju se relativne koordinate. Kao što je pokazano na slici, kutovi φ_1 , φ_2 i φ_3 odabiru se kao skup relativnih koordinata

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Ti se kutovi mjere između pozitivnog smjera osi x i pozitivnog vektora (položaja) koji predstavlja pojedini član mehanizma.



Slika 2. Relativne koordinate koje opisuju konfiguraciju četveročlanog zglobnog mehanizma.

Budući da četveročlani zglojni mehanizam, prema slici, ima samo jedan stupanj slobode gibanja, to znači da tri koordinate nisu međusobno nezavisne. Dvije jednačbe veze koje se odnose na ove koordinate mogu se zapisati kako slijedi:

$$r \cos \varphi_1 + d \cos \varphi_2 + s \cos \varphi_3 - l = 0, \quad (5)$$

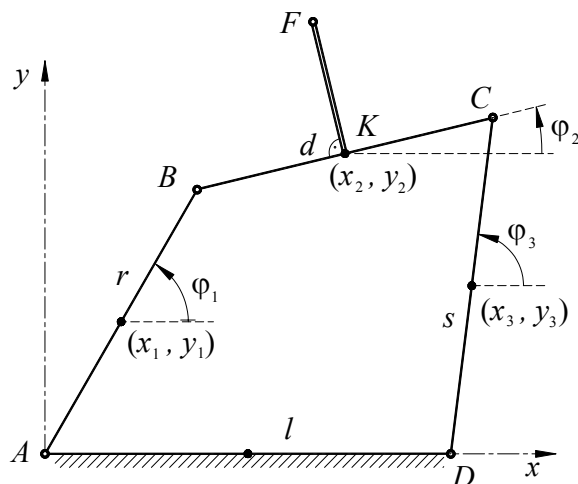
$$r \sin \varphi_1 + d \sin \varphi_2 + s \sin \varphi_3 = 0. \quad (6)$$

Za bilo koju konfiguraciju mehaničkog sustava, tj. poznavajući kut φ_1 , potrebno je riješiti sustav od dvije simultane algebarske jednačbe (5) i (6), da bi odredili nepoznate koordinate φ_2 i φ_3 .

III. Treći način formuliranja kinematičkih jednačbi

U ovoj formulaciji koriste se tri Kartezijske koordinate po svakom članu mehanizma i to: x i y koordinate težišta (središta masa) svakog člana mehanizma te kut što ga svaki član zatvara s pozitivnim smislom osi x - prema slici. Prema tome, vektor koordinata koji opisuje konfiguraciju četveročlanog mehanizma glasi:

$$\mathbf{q} = [x_1 \ y_1 \ \varphi_1 \ x_2 \ y_2 \ \varphi_2 \ x_3 \ y_3 \ \varphi_3]^T \quad (7)$$



Slika 3. Kartezijske koordinate koje opisuju konfiguraciju četveročlanog zglobnog mehanizma.

Devet koordinata vektora (7) su međusobno ovisne. Te se ovisnosti mogu izraziti preko sljedećih osam jednačbi veza:

$$x_1 - \frac{r}{2} \cos \varphi_1 = 0, \quad (8)$$

$$y_1 - \frac{r}{2} \sin \varphi_1 = 0, \quad (9)$$

$$x_1 + \frac{r}{2} \cos \varphi_1 - x_2 + \frac{d}{2} \cos \varphi_2 = 0, \quad (10)$$

$$y_1 + \frac{r}{2} \sin \varphi_1 - y_2 + \frac{d}{2} \sin \varphi_2 = 0, \quad (11)$$

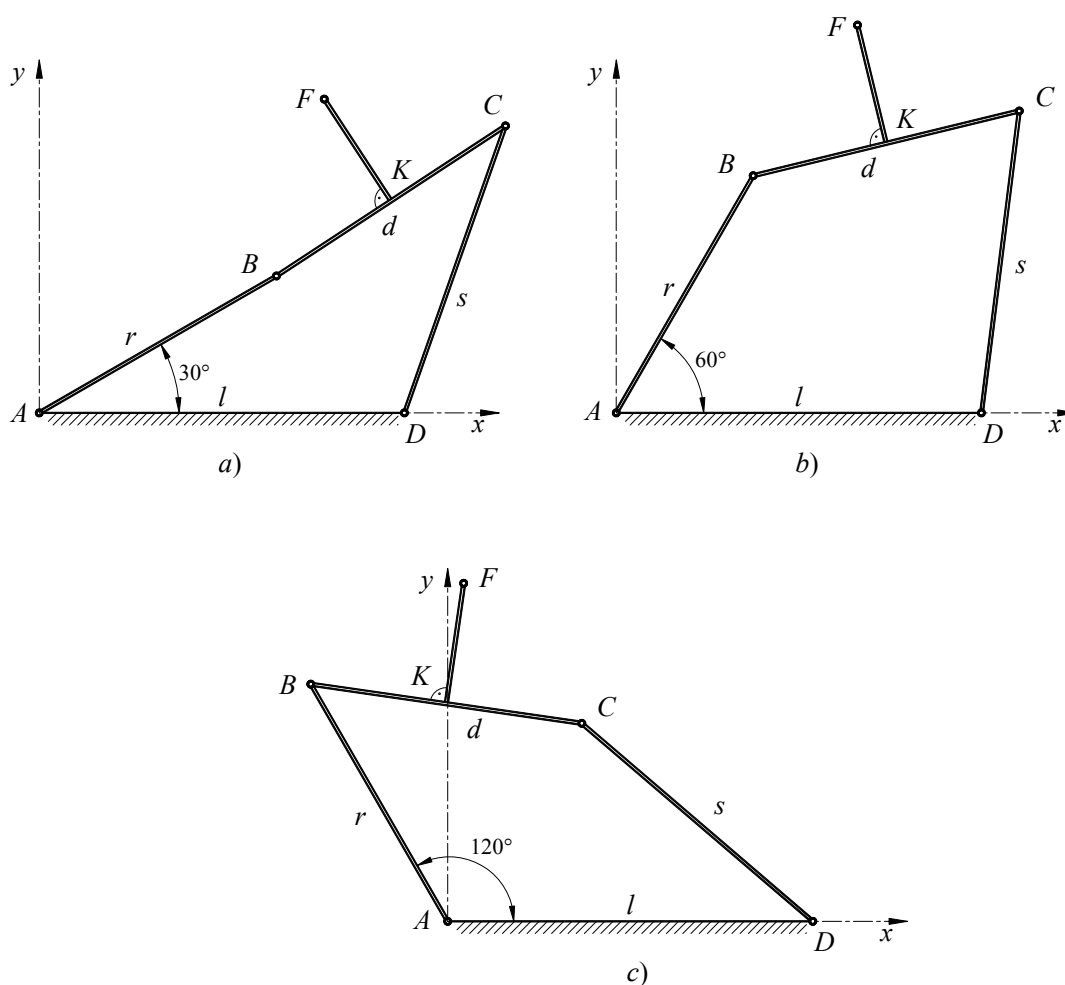
$$x_2 + \frac{d}{2} \cos \varphi_2 - x_3 - \frac{s}{2} \cos \varphi_3 = 0, \quad (12)$$

$$y_2 + \frac{d}{2} \sin \varphi_2 - y_3 - \frac{s}{2} \sin \varphi_3 = 0, \quad (13)$$

$$x_3 - \frac{s}{2} \cos \varphi_3 - l = 0, \quad (14)$$

$$y_3 - \frac{s}{2} \sin \varphi_3 = 0. \quad (15)$$

Za svaku poznatu konfiguraciju sustava, može se specificirati devet varijabli, a potom se može izraziti preostalih osam varijabli tako da se riješi sustav od osam nelinearnih algebarskih jednadžbi (8) do (15), s osam nepoznanica.



Slika 4. Traženi položaji četveročlanog zglobnog mehanizma.

Tri prethodno opisana oblika formulacije - preko poopćenih koordinata, preko relativnih koordinata i pomoću Kartezijskih koordinata opisuju kinematiku četveročlanog zglobnog mehanizma. U slučaju dinamičke analize mogu se, također, izvesti diferencijalne jednačbe gibanja.

Rješenja:

	$\varphi (\varphi_1) = 30^\circ$	$\varphi (\varphi_1) = 60^\circ$	$\varphi (\varphi_1) = 120^\circ$
I. način formuliranja	$\vartheta_1 = 109,4^\circ$ $\vartheta_2 = 37,37^\circ$ $\vartheta_3 = 183,23^\circ$	$\vartheta_1 = 97,15^\circ$ $\vartheta_2 = 69,17^\circ$ $\vartheta_3 = 133,68^\circ$	$\vartheta_1 = 40,60^\circ$ $\vartheta_2 = 147,61^\circ$ $\vartheta_3 = 51,79^\circ$
II. način formuliranja	$\varphi_2 = 33,23^\circ$ $\varphi_3 = 250,59^\circ$	$\varphi_2 = 13,68^\circ$ $\varphi_3 = 262,85^\circ$	$\varphi_2 = -8,22^\circ$ $\varphi_3 = 319,40^\circ$
III. način formuliranja	$x_1 = 194,856 \text{ mm}$ $y_1 = 112,500 \text{ mm}$ $x_2 = 577,921 \text{ mm}$ $y_2 = 348,297 \text{ mm}$ $\varphi_2 = 33,23^\circ$ $x_3 = 683,065 \text{ mm}$ $y_3 = 235,797 \text{ mm}$ $\varphi_3 = 70,59^\circ$	$x_1 = 112,500 \text{ mm}$ $y_1 = 194,856 \text{ mm}$ $x_2 = 443,620 \text{ mm}$ $y_2 = 442,911 \text{ mm}$ $\varphi_2 = 13,68^\circ$ $x_3 = 631,120 \text{ mm}$ $y_3 = 248,056 \text{ mm}$ $\varphi_3 = 82,85^\circ$	$x_1 = -112,50 \text{ mm}$ $y_1 = 194,856 \text{ mm}$ $x_2 = 2,30906 \text{ mm}$ $y_2 = 357,559 \text{ mm}$ $\varphi_2 = -8,22^\circ$ $x_3 = 410,191 \text{ mm}$ $y_3 = 162,704 \text{ mm}$ $\varphi_3 = 139,40^\circ$

Raspisani oblik jednadžbe (1):

$$d^2 = d_x^2 + d_y^2$$

$$d^2 = [l - r \cos \varphi + s \cos(180 - \mathcal{A}_1)]^2 + [s \sin(180 - \mathcal{A}_1) - r \sin \varphi]^2$$

$$d^2 = [l - r \cos \varphi - s \cos \mathcal{A}_1]^2 + [s \sin \mathcal{A}_1 - r \sin \varphi]^2$$

$$d^2 = [l^2 + r^2 \cos^2 \varphi + s^2 \cos^2 \mathcal{A}_1 - 2rl \cos \varphi - 2sl \cos \mathcal{A}_1 + 2rs \cos \varphi \cos \mathcal{A}_1] + [s^2 \sin^2 \mathcal{A}_1 + r^2 \sin^2 \varphi - 2sr \sin \varphi \sin \mathcal{A}_1]$$

$$d^2 = l^2 + r^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + s^2 (\sin^2 \mathcal{A}_1 + \cos^2 \mathcal{A}_1) - 2rl \cos \varphi - 2sl \cos \mathcal{A}_1 + 2rs (\cos \varphi \cos \mathcal{A}_1 - \sin \varphi \sin \mathcal{A}_1)$$

$$d^2 = l^2 + r^2 + s^2 - 2rl \cos \varphi - 2sl \cos \mathcal{A}_1 + 2rs \cos(\varphi + \mathcal{A}_1)$$

$$(r^2 + l^2 + s^2 - d^2) - 2rl \cos \varphi - 2ls \cos \mathcal{A}_1 + 2rs \cos(\varphi + \mathcal{A}_1) = 0$$

$$A = r^2 + l^2 + s^2 - d^2$$

$$A - 2rl \cos \varphi - 2ls \cos \mathcal{A}_1 + 2rs (\cos \varphi \cos \mathcal{A}_1 - \sin \varphi \sin \mathcal{A}_1) = 0$$

$$A - 2rl \cos \varphi - 2ls \cos \mathcal{A}_1 + 2rs \cos \varphi \cos \mathcal{A}_1 - 2rs \sin \varphi \sin \mathcal{A}_1 = 0$$

$$A - 2rl \cos \varphi - 2ls \cos \mathcal{A}_1 + 2rs \cos \varphi \cos \mathcal{A}_1 - 2rs \sin \varphi \sqrt{1 - \cos^2 \mathcal{A}_1} = 0$$

$$A - 2rl \cos \varphi - 2ls \cos \mathcal{A}_1 + 2rs \cos \varphi \cos \mathcal{A}_1 = 2rs \sin \varphi \sqrt{1 - \cos^2 \mathcal{A}_1} \quad /^2$$

$$A^2 + 4r^2 l^2 \cos^2 \varphi + 4l^2 s^2 \cos^2 \mathcal{A}_1 + 4r^2 s^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \mathcal{A}_1 - 4Arl \cos \varphi - 4Asl \cos \mathcal{A}_1 + 4Ars \cos \varphi \cos \mathcal{A}_1 + 8rsl^2 \cos \varphi \cos \mathcal{A}_1 - 8r^2 sl \cos^2 \varphi \cos \mathcal{A}_1 - 8rls^2 \cos \varphi \cos^2 \mathcal{A}_1 = 4r^2 s^2 \sin^2 \varphi (1 - \cos^2 \mathcal{A}_1)$$

$$A^2 + 4r^2 l^2 \cos^2 \varphi + 4l^2 s^2 \cos^2 \mathcal{A}_1 + 4r^2 s^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \mathcal{A}_1 - 4Arl \cos \varphi - 4Asl \cos \mathcal{A}_1 + 4Ars \cos \varphi \cos \mathcal{A}_1 + 8rsl^2 \cos \varphi \cos \mathcal{A}_1 - 8r^2 sl \cos^2 \varphi \cos \mathcal{A}_1 - 8rls^2 \cos \varphi \cos^2 \mathcal{A}_1 = 4r^2 s^2 \sin^2 \varphi - 4r^2 s^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \mathcal{A}_1$$

$$\cos^2 \mathcal{A}_1 (4r^2 s^2 \sin^2 \varphi + 4s^2 l^2 + 4r^2 s^2 \cos^2 \varphi - 8rsl^2 \cos \varphi) +$$

$$+ \cos \mathcal{A}_1 (4Ars \cos \varphi - 4Asl + 8rsl^2 \cos \varphi - 8r^2 sl \cos^2 \varphi) +$$

$$+ A^2 + 4r^2 l^2 \cos^2 \varphi - 4Arl \cos \varphi - 4r^2 s^2 \sin^2 \varphi = 0$$

$$\cos^2 \mathcal{A}_1 (4r^2 s^2 + 4s^2 l^2 - 8rsl^2 \cos \varphi) +$$

$$+ \cos \mathcal{A}_1 (4Ars \cos \varphi - 4Asl + 8rsl^2 \cos \varphi - 8r^2 sl \cos^2 \varphi) +$$

$$+ A^2 + 4r^2 l^2 \cos^2 \varphi - 4Arl \cos \varphi - 4r^2 s^2 \sin^2 \varphi = 0$$

$$B \cos^2 \mathcal{A}_1 + F \cos \mathcal{A}_1 + G = 0$$

$$B = 4r^2 s^2 + 4s^2 l^2 - 8rsl^2 \cos \varphi$$

$$F = 4Ars \cos \varphi - 4Asl + 8rsl^2 \cos \varphi - 8r^2 sl \cos^2 \varphi$$

$$G = A^2 + 4r^2 l^2 \cos^2 \varphi - 4Arl \cos \varphi - 4r^2 s^2 \sin^2 \varphi$$

I. Prvi način formuliranja

$r = 450$

$d = 450$

$s = 500$

$l = 600$

$A := r^2 + l^2 + s^2 - d^2$

$fi = 30^\circ$

$B := 4 * r^2 * s^2 + 4 * s^2 * l^2 - 8 * r * l * s^2 * \text{Cos}[fi]$

$F := 4 * (A * r * s * \text{Cos}[fi] - A * s * l + 2 * r * s * l^2 * \text{Cos}[fi] - 2 * r^2 * s * l * (\text{Cos}[fi])^2)$

$G := A^2 + 4 * r^2 * l^2 * (\text{Cos}[fi])^2 - 4 * A * r * l * \text{Cos}[fi] - 4 * r^2 * s^2 * (\text{Sin}[fi])^2$

$\text{Solve}[B * x^2 + F * x + G == 0, x]$

$N[\%]$

$\{\{x \rightarrow 0.963468\}, \{x \rightarrow -0.332262\}\}$

$H := r^2 + l^2 - s^2 - d^2$

$th2 := \text{ArcCos}[(1 / (2 * d * s)) * (2 * r * l * \text{Cos}[fi] - H)]$

$N[\%]$

$\% * 180 / \text{Pi}$

37.3649

II. Drugi način formuliranja

$\text{Solve}[\{r * \text{Cos}[fi] + d * \text{Cos}[fi2] + s * \text{Cos}[fi3] - l == 0,$
 $r * \text{Sin}[fi] + d * \text{Sin}[fi2] + s * \text{Sin}[fi3] == 0\}, \{fi2, fi3\}]$

$N[\%]$

$\{\{fi3 \rightarrow -1.9095, fi2 \rightarrow 0.579954\}, \{fi3 \rightarrow 0.271132, fi2 \rightarrow -2.21832\}\}$

III. Treći način formuliranja

$x1 := r / 2 * \text{Cos}[fi]$

$y1 := r / 2 * \text{Sin}[fi]$

$\{x1, y1\}$

$N[\%]$

$\{194.856, 112.5\}$

$\text{Solve}[\{x1 + r / 2 * \text{Cos}[fi] - x2 + d / 2 * \text{Cos}[fi2] == 0,$
 $y1 + r / 2 * \text{Sin}[fi] - y2 + d / 2 * \text{Sin}[fi2] == 0, x2 + d / 2 * \text{Cos}[fi2] - x3 - s / 2 * \text{Cos}[fi3] == 0,$
 $y2 + d / 2 * \text{Sin}[fi2] - y3 - s / 2 * \text{Sin}[fi3] == 0, x3 - s / 2 * \text{Cos}[fi3] - l == 0,$
 $y3 - s / 2 * \text{Sin}[fi3] == 0\}, \{x2, y2, fi2, x3, y3, fi3\}]$

N[%]

```
{ {x2 → 253.989, y2 → 45.5444,  
  x3 → 359.133, y3 → -66.9556, fi3 → -2.87046, fi2 → -2.21832},  
  {x2 → 577.921, y2 → 348.297, x3 → 683.065, y3 → 235.797, fi3 → 1.2321, fi2 → 0.579954} }
```

I. Prvi način formuliranja

$r = 450$

$d = 450$

$s = 500$

$l = 600$

$A := r^2 + l^2 + s^2 - d^2$

$fi = 60^\circ$

$B := 4 * r^2 * s^2 + 4 * s^2 * l^2 - 8 * r * l * s^2 * \text{Cos}[fi]$

$F := 4 * (A * r * s * \text{Cos}[fi] - A * s * l + 2 * r * s * l^2 * \text{Cos}[fi] - 2 * r^2 * s * l * (\text{Cos}[fi])^2)$

$G := A^2 + 4 * r^2 * l^2 * (\text{Cos}[fi])^2 - 4 * A * r * l * \text{Cos}[fi] - 4 * r^2 * s^2 * (\text{Sin}[fi])^2$

$\text{Solve}[B * x^2 + F * x + G == 0, x]$

$N[\%]$

$\{\{x \rightarrow -0.124481\}, \{x \rightarrow 0.996276\}\}$

$H := r^2 + l^2 - s^2 - d^2$

$th2 := \text{ArcCos}[(1 / (2 * d * s)) * (2 * r * l * \text{Cos}[fi] - H)]$

$th2$

$N[\%]$

$\% * 180 / \text{Pi}$

69.1725

II. Drugi način formuliranja

$\text{Solve}[\{r * \text{Cos}[fi] + d * \text{Cos}[fi2] + s * \text{Cos}[fi3] - l == 0,$
 $r * \text{Sin}[fi] + d * \text{Sin}[fi2] + s * \text{Sin}[fi3] == 0\}, \{fi2, fi3\}]$

$N[\%]$

$\{\{fi3 \rightarrow -1.6956, fi2 \rightarrow 0.238704\}, \{fi3 \rightarrow 0.0863334, fi2 \rightarrow -1.84797\}\}$

III. Treći način formuliranja

$x1 := r / 2 * \text{Cos}[fi]$

$y1 := r / 2 * \text{Sin}[fi]$

$\{x1, y1\}$

$N[\%]$

$\{112.5, 194.856\}$

$\text{Solve}[\{x1 + r / 2 * \text{Cos}[fi] - x2 + d / 2 * \text{Cos}[fi2] == 0,$
 $y1 + r / 2 * \text{Sin}[fi] - y2 + d / 2 * \text{Sin}[fi2] == 0, x2 + d / 2 * \text{Cos}[fi2] - x3 - s / 2 * \text{Cos}[fi3] == 0,$
 $y2 + d / 2 * \text{Sin}[fi2] - y3 - s / 2 * \text{Sin}[fi3] == 0, x3 - s / 2 * \text{Cos}[fi3] - l == 0,$
 $y3 - s / 2 * \text{Sin}[fi3] == 0\}, \{x2, y2, fi2, x3, y3, fi3\}]$

N[%]

```
{ {x2 → 163.431, y2 → 173.299,  
  x3 → 350.931, y3 → -21.5566, fi3 → -3.05526, fi2 → -1.84797},  
  {x2 → 443.62, y2 → 442.911, x3 → 631.12, y3 → 248.056, fi3 → 1.44599, fi2 → 0.238704} }
```

I. Prvi način formuliranja

$r = 450$

$d = 450$

$s = 500$

$l = 600$

$A := r^2 + l^2 + s^2 - d^2$

$fi = 120^\circ$

$B := 4 * r^2 * s^2 + 4 * s^2 * l^2 - 8 * r * l * s^2 * \text{Cos}[fi]$

$F := 4 * (A * r * s * \text{Cos}[fi] - A * s * l + 2 * r * s * l^2 * \text{Cos}[fi] - 2 * r^2 * s * l * (\text{Cos}[fi])^2)$

$G := A^2 + 4 * r^2 * l^2 * (\text{Cos}[fi])^2 - 4 * A * r * l * \text{Cos}[fi] - 4 * r^2 * s^2 * (\text{Sin}[fi])^2$

$\text{Solve}[B * x^2 + F * x + G == 0, x]$

$N[\%]$

$\{\{x \rightarrow 0.759236\}, \{x \rightarrow 0.984908\}\}$

$H := r^2 + l^2 - s^2 - d^2$

$th2 := \text{ArcCos}[(1 / (2 * d * s)) * (2 * r * l * \text{Cos}[fi] - H)]$

$th2$

$N[\%]$

$\% * 180 / \text{Pi}$

147.612

II. Drugi način formuliranja

$\text{Solve}[\{r * \text{Cos}[fi] + d * \text{Cos}[fi2] + s * \text{Cos}[fi3] - l == 0,$
 $r * \text{Sin}[fi] + d * \text{Sin}[fi2] + s * \text{Sin}[fi3] == 0\}, \{fi2, fi3\}]$

$N[\%]$

$\{\{fi3 \rightarrow -0.708658, fi2 \rightarrow -0.143388\}, \{fi3 \rightarrow -0.173955, fi2 \rightarrow -0.739225\}\}$

III. Treći način formuliranja

$x1 := r / 2 * \text{Cos}[fi]$

$y1 := r / 2 * \text{Sin}[fi]$

$\{x1, y1\}$

$N[\%]$

$\{-112.5, 194.856\}$

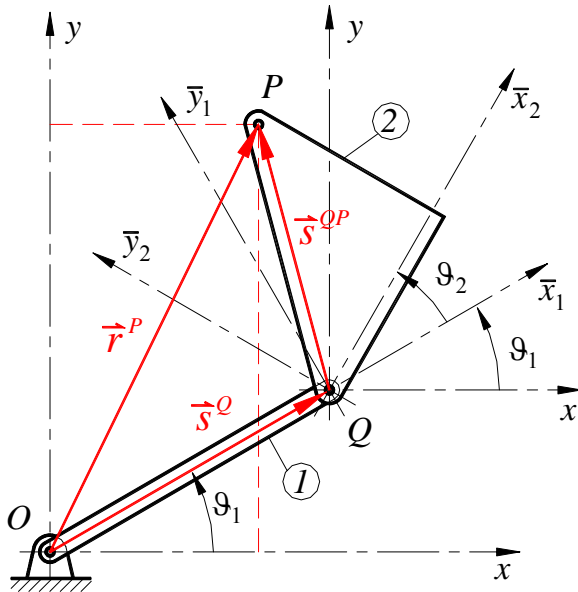
$\text{Solve}[\{x1 + r / 2 * \text{Cos}[fi] - x2 + d / 2 * \text{Cos}[fi2] == 0,$
 $y1 + r / 2 * \text{Sin}[fi] - y2 + d / 2 * \text{Sin}[fi2] == 0, x2 + d / 2 * \text{Cos}[fi2] - x3 - s / 2 * \text{Cos}[fi3] == 0,$
 $y2 + d / 2 * \text{Sin}[fi2] - y3 - s / 2 * \text{Sin}[fi3] == 0, x3 - s / 2 * \text{Cos}[fi3] - l == 0,$
 $y3 - s / 2 * \text{Sin}[fi3] == 0\}, \{x2, y2, fi2, x3, y3, fi3\}]$

N[%]

```
{ {x2 → -58.727, y2 → 238.126, x3 → 353.773, y3 → 43.2698, fi3 → 2.96764, fi2 → -0.739225},  
  {x2 → -2.30906, y2 → 357.559, x3 → 410.191,  
    y3 → 162.704, fi3 → 2.43294, fi2 → -0.143388} }
```

Određivanje položaja točaka mehanizma

Primjer 2



Za mehanizam prema slici, sastavljen od dva kruta tijela, odrediti položaj točke P u odnosu na ishodište koordinatnog sustava Oxy .

Zadano: $\overline{OQ} = l = 500 \text{ mm}$;

$$\overline{QP} = \frac{600}{\sqrt{2}} \text{ mm} ;$$

$$\alpha = 45^\circ ;$$

$$\vartheta_1 = 30^\circ ;$$

$$\vartheta_2 = 30^\circ .$$

$$\vec{r}^P = \vec{s}^Q + \vec{s}^{QP}$$

$$\mathbf{r}^P = \mathbf{s}^Q + \mathbf{s}^{QP}$$

$$\mathbf{s}^Q = \mathbf{A}(\vartheta_1) \bar{\mathbf{s}}_1^Q$$

$$\mathbf{s}^{QP} = \mathbf{A}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP}$$

$$\mathbf{r}^P = \mathbf{A}(\vartheta_1) \bar{\mathbf{s}}_1^Q + \mathbf{A}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP}$$

$$\mathbf{r}^P = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_1 & -\sin \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{s}}_1^Q + \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) & -\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) & \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{bmatrix} \bar{\mathbf{s}}_2^{QP}$$

Istu jednadžbu dobit ćemo ako koristimo drugu formulaciju, tj linearnu transformaciju.

$$\mathbf{r}^P = \mathbf{s}^Q + \mathbf{s}^{QP}$$

$$\mathbf{r}^P = \mathbf{A}_1(\vartheta_1) \bar{\mathbf{s}}_1^Q + \mathbf{A}_1(\vartheta_1) \bar{\mathbf{s}}_1^{QP}$$

$$\bar{\mathbf{s}}_1^{QP} = \mathbf{A}_{12}(\vartheta_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP}$$

$$\mathbf{r}^P = \mathbf{A}_1(\vartheta_1) \bar{\mathbf{s}}_1^Q + \mathbf{A}_1(\vartheta_1) \mathbf{A}_{12}(\vartheta_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP}$$

$$\mathbf{A}_1(\vartheta_1) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_1 & -\sin \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{12}(\vartheta_2) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_2 & -\sin \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 & \cos \vartheta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(\vartheta_1) \mathbf{A}_{12}(\vartheta_2) &= \begin{bmatrix} \cos \vartheta_1 & -\sin \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \vartheta_2 & -\sin \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 & \cos \vartheta_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 & -\sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1 - \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 & \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) & -\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) & \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}^P = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_1 & -\sin \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{s}}_1^Q + \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) & -\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) & \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{bmatrix} \bar{\mathbf{s}}_2^{QP}$$

uvrštavajući vrijednosti dobijemo:

$$\mathbf{r}^P = \begin{bmatrix} \cos 30 & -\sin 30 \\ \sin 30 & \cos 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 500 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos 60 & -\sin 60 \\ \sin 60 & \cos 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{600}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{600}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}^P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 500 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 300 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}^P = \begin{bmatrix} 250\sqrt{3} \\ 250 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 150 - 150\sqrt{3} \\ 150\sqrt{3} + 150 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}^P = \begin{bmatrix} 150 + 100\sqrt{3} \\ 400 + 150\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}^P = \begin{bmatrix} 323,205 \\ 659,808 \end{bmatrix}, \text{ mm}$$

$$\mathbf{r}^P = 323,205 \bar{i} + 659,808 \bar{j}$$

Brzina i ubrzanje točke fiksirane u pomičnom koordinatnom sustavu

Primjer 3

Za mehanizam iz primjera 2, odrediti brzinu i ubrzanje točke P u koordinatnom sustavu Oxy .

Zadano: $\dot{\vartheta}_1 = 10 \text{ rad/s}$; $\ddot{\vartheta}_1 = 60 \text{ rad/s}^2$; $\dot{\vartheta}_2 = \frac{10}{\sqrt{2}} \text{ rad/s}$; $\ddot{\vartheta}_2 = \frac{100}{\sqrt{2}} \text{ rad/s}^2$.

Vektor položaja točke P na krutom tijelu 2 izveden je u prethodnom primjeru i određen matričnom jednačinom:

$$\mathbf{r}^P = \mathbf{A}_1(\vartheta_1) \bar{\mathbf{s}}_1^O + \mathbf{A}_1(\vartheta_1) \mathbf{A}_{12}(\vartheta_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{OP} \quad (1)$$

Vektori $\bar{\mathbf{s}}_1^O$ i $\bar{\mathbf{s}}_2^{OP}$ su konstantne veličine. Ako jednačinu (1) deriviramo po vremenu t , uzevši u obzir da je $\dot{\mathbf{A}}(\varphi) = \dot{\varphi} \mathbf{B}(\varphi)$, dobije se

$$\dot{\mathbf{r}}^P = \dot{\vartheta}_1 \mathbf{B}_1(\vartheta_1) \bar{\mathbf{s}}_1^O + \dot{\vartheta}_1 \mathbf{B}_1(\vartheta_1) \mathbf{A}_{12}(\vartheta_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{OP} + \dot{\vartheta}_2 \mathbf{A}_1(\vartheta_1) \mathbf{B}_{12}(\vartheta_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{OP} \quad (2)$$

Ponovnim deriviranjem matrične jednačine (2) po vremenu t , koristeći se pri tom matričnom jednačinom $\dot{\mathbf{B}}(\varphi) = -\dot{\varphi} \mathbf{A}(\varphi)$, dobije se ubrzanje točke P .

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}^P = & \ddot{\vartheta}_1 \mathbf{B}_1(\vartheta_1) \bar{\mathbf{s}}_1^O + \dot{\vartheta}_1 (-\dot{\vartheta}_1 \mathbf{A}_1(\vartheta_1)) \bar{\mathbf{s}}_1^O + \left[\ddot{\vartheta}_1 \mathbf{B}_1(\vartheta_1) + \dot{\vartheta}_1 (-\dot{\vartheta}_1 \mathbf{A}_1(\vartheta_1)) \right] \mathbf{A}_{12}(\vartheta_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{OP} + \\ & + \dot{\vartheta}_1 \mathbf{B}_1(\vartheta_1) \dot{\vartheta}_2 \mathbf{B}_{12}(\vartheta_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{OP} + \left[\ddot{\vartheta}_2 \mathbf{A}_1(\vartheta_1) + \dot{\vartheta}_2 \dot{\vartheta}_1 \mathbf{B}_1(\vartheta_1) \right] \mathbf{B}_{12}(\vartheta_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{OP} + \dot{\vartheta}_2 \mathbf{A}_1(\vartheta_1) (-\dot{\vartheta}_2 \mathbf{A}_{12}(\vartheta_2)) \bar{\mathbf{s}}_2^{OP} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}^P = & \ddot{\vartheta}_1 \left[\mathbf{B}_1(\vartheta_1) \bar{\mathbf{s}}_1^O + \mathbf{B}_1(\vartheta_1) \cdot \mathbf{A}_{12}(\vartheta_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{OP} \right] + \ddot{\vartheta}_2 \mathbf{A}_1(\vartheta_1) \cdot \mathbf{B}_{12}(\vartheta_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{OP} - \dot{\vartheta}_1^2 \cdot \mathbf{r}^P - \\ & - \dot{\vartheta}_2^2 \mathbf{A}_1(\vartheta_1) \mathbf{A}_{12}(\vartheta_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{OP} + 2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 \mathbf{B}_1(\vartheta_1) \mathbf{B}_{12}(\vartheta_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{OP} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_1(\vartheta_1) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_1 & -\sin \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{12}(\vartheta_2) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_2 & -\sin \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 & \cos \vartheta_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1(\vartheta_1) = \begin{bmatrix} -\sin \vartheta_1 & -\cos \vartheta_1 \\ \cos \vartheta_1 & -\sin \vartheta_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{12}(\vartheta_2) = \begin{bmatrix} -\sin \vartheta_2 & -\cos \vartheta_2 \\ \cos \vartheta_2 & -\sin \vartheta_2 \end{bmatrix}$$

Uvrštavajući zadane vrijednosti u jednadžbu 2 dobijemo brzinu točke P .

$$\dot{\mathbf{r}}^P = \dot{\mathcal{G}}_1 \mathbf{B}_1(\mathcal{G}_1) \bar{\mathbf{s}}_1^Q + \dot{\mathcal{G}}_1 \mathbf{B}_1(\mathcal{G}_1) \mathbf{A}_{12}(\mathcal{G}_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} + \dot{\mathcal{G}}_2 \mathbf{A}_1(\mathcal{G}_1) \mathbf{B}_{12}(\mathcal{G}_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP}$$

$$\dot{\mathbf{r}}^P = \dot{\mathcal{G}}_1 \begin{bmatrix} -\sin \mathcal{G}_1 & -\cos \mathcal{G}_1 \\ \cos \mathcal{G}_1 & -\sin \mathcal{G}_1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{s}}_1^Q + \dot{\mathcal{G}}_1 \begin{bmatrix} -\sin \mathcal{G}_1 & -\cos \mathcal{G}_1 \\ \cos \mathcal{G}_1 & -\sin \mathcal{G}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \mathcal{G}_2 & -\sin \mathcal{G}_2 \\ \sin \mathcal{G}_2 & \cos \mathcal{G}_2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} +$$

$$+ \dot{\mathcal{G}}_2 \begin{bmatrix} \cos \mathcal{G}_1 & -\sin \mathcal{G}_1 \\ \sin \mathcal{G}_1 & \cos \mathcal{G}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin \mathcal{G}_2 & -\cos \mathcal{G}_2 \\ \cos \mathcal{G}_2 & -\sin \mathcal{G}_2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{s}}_2^{QP}$$

$$\dot{\mathbf{r}}^P = \dot{\mathcal{G}}_1 \begin{bmatrix} -\sin 30 & -\cos 30 \\ \cos 30 & -\sin 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\mathcal{G}}_1 \begin{bmatrix} -\sin 30 & -\cos 30 \\ \cos 30 & -\sin 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 30 & -\sin 30 \\ \sin 30 & \cos 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{0,6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{0,6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} +$$

$$+ \dot{\mathcal{G}}_2 \begin{bmatrix} \cos 30 & -\sin 30 \\ \sin 30 & \cos 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin 30 & -\cos 30 \\ \cos 30 & -\sin 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{0,6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{0,6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{r}}^P = 10 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} + 10 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{10}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{r}}^P = 10 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} + 10 \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \end{bmatrix} + \frac{10}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{r}}^P = 10 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} + 10 \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{3}{20} & \frac{3\sqrt{3}}{20} \end{bmatrix} + \frac{10}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{3}{20} & \frac{3\sqrt{3}}{20} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{r}}^P = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3\sqrt{6}}{4} & \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ \frac{5\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{4} & \frac{3\sqrt{6}}{4} \end{bmatrix}, \text{ m/s}$$

$$\dot{\mathbf{r}}^P = \begin{bmatrix} -9,5 \\ 2,46 \end{bmatrix}, \text{ m/s}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}^P = -9,5\bar{i} + 2,46\bar{j}, \text{ m/s}$$

Uvrštavajući zadane vrijednosti u jednadžbu 3 dobijemo ubrzanje točke P .

$$\ddot{\mathbf{r}}^P = \ddot{\mathcal{G}}_1 \left[\mathbf{B}_1(\mathcal{G}_1) \bar{\mathbf{s}}_1^Q + \mathbf{B}_1(\mathcal{G}_1) \cdot \mathbf{A}_{12}(\mathcal{G}_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} \right] + \ddot{\mathcal{G}}_2 \mathbf{A}_1(\mathcal{G}_1) \cdot \mathbf{B}_{12}(\mathcal{G}_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} - \dot{\mathcal{G}}_1^2 \cdot \mathbf{r}^P - \dot{\mathcal{G}}_2^2 \mathbf{A}_1(\mathcal{G}_1) \mathbf{A}_{12}(\mathcal{G}_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} + 2\dot{\mathcal{G}}_1 \dot{\mathcal{G}}_2 \mathbf{B}_1(\mathcal{G}_1) \mathbf{B}_{12}(\mathcal{G}_2) \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}^P &= \ddot{\mathcal{G}}_1 \left[\begin{bmatrix} -\sin \mathcal{G}_1 & -\cos \mathcal{G}_1 \\ \cos \mathcal{G}_1 & -\sin \mathcal{G}_1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{s}}_1^Q + \begin{bmatrix} -\sin \mathcal{G}_1 & -\cos \mathcal{G}_1 \\ \cos \mathcal{G}_1 & -\sin \mathcal{G}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \mathcal{G}_2 & -\sin \mathcal{G}_2 \\ \sin \mathcal{G}_2 & \cos \mathcal{G}_2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} \right] + \\ &+ \ddot{\mathcal{G}}_2 \begin{bmatrix} \cos \mathcal{G}_1 & -\sin \mathcal{G}_1 \\ \sin \mathcal{G}_1 & \cos \mathcal{G}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin \mathcal{G}_2 & -\cos \mathcal{G}_2 \\ \cos \mathcal{G}_2 & -\sin \mathcal{G}_2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} - \dot{\mathcal{G}}_1^2 \cdot \mathbf{r}^P - \\ &- \dot{\mathcal{G}}_2^2 \begin{bmatrix} \cos \mathcal{G}_1 & -\sin \mathcal{G}_1 \\ \sin \mathcal{G}_1 & \cos \mathcal{G}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \mathcal{G}_2 & -\sin \mathcal{G}_2 \\ \sin \mathcal{G}_2 & \cos \mathcal{G}_2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} + \\ &+ 2\dot{\mathcal{G}}_1 \dot{\mathcal{G}}_2 \begin{bmatrix} -\sin \mathcal{G}_1 & -\cos \mathcal{G}_1 \\ \cos \mathcal{G}_1 & -\sin \mathcal{G}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \mathcal{G}_2 & -\cos \mathcal{G}_2 \\ \cos \mathcal{G}_2 & -\sin \mathcal{G}_2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{s}}_2^{QP} \\ \\ \ddot{\mathbf{r}}^P &= \ddot{\mathcal{G}}_1 \left[\begin{bmatrix} -\sin 30 & -\cos 30 \\ \cos 30 & -\sin 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin 30 & -\cos 30 \\ \cos 30 & -\sin 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 30 & -\sin 30 \\ \sin 30 & \cos 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{0,6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & \frac{2}{2} \\ \frac{0,6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & \frac{2}{2} \end{bmatrix} \right] + \\ &+ \ddot{\mathcal{G}}_2 \begin{bmatrix} \cos 30 & -\sin 30 \\ \sin 30 & \cos 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin 30 & -\cos 30 \\ \cos 30 & -\sin 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{0,6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & \frac{2}{2} \\ \frac{0,6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & \frac{2}{2} \end{bmatrix} - \dot{\mathcal{G}}_1^2 \cdot \begin{bmatrix} 0,15 + 0,1\sqrt{3} \\ 0,4 + 0,15\sqrt{3} \end{bmatrix} - \\ &- \dot{\mathcal{G}}_2^2 \begin{bmatrix} \cos 30 & -\sin 30 \\ \sin 30 & \cos 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 30 & -\sin 30 \\ \sin 30 & \cos 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{0,6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & \frac{2}{2} \\ \frac{0,6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & \frac{2}{2} \end{bmatrix} + \\ &+ 2\dot{\mathcal{G}}_1 \dot{\mathcal{G}}_2 \begin{bmatrix} -\sin 30 & -\cos 30 \\ \cos 30 & -\sin 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin 30 & -\cos 30 \\ \cos 30 & -\sin 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{0,6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & \frac{2}{2} \\ \frac{0,6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & \frac{2}{2} \end{bmatrix} \\ \\ \ddot{\mathbf{r}}^P &= \ddot{\mathcal{G}}_1 \left[\begin{bmatrix} -\sin 30 & -\cos 30 \\ \cos 30 & -\sin 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin 30 & -\cos 30 \\ \cos 30 & -\sin 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 30 & -\sin 30 \\ \sin 30 & \cos 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \end{bmatrix} \right] + \\ &+ \ddot{\mathcal{G}}_2 \begin{bmatrix} \cos 30 & -\sin 30 \\ \sin 30 & \cos 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin 30 & -\cos 30 \\ \cos 30 & -\sin 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \end{bmatrix} - \dot{\mathcal{G}}_1^2 \cdot \begin{bmatrix} 0,15 + 0,1\sqrt{3} \\ 0,4 + 0,15\sqrt{3} \end{bmatrix} - \\ &- \dot{\mathcal{G}}_2^2 \begin{bmatrix} \cos 30 & -\sin 30 \\ \sin 30 & \cos 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 30 & -\sin 30 \\ \sin 30 & \cos 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \end{bmatrix} + \\ &+ 2\dot{\mathcal{G}}_1 \dot{\mathcal{G}}_2 \begin{bmatrix} -\sin 30 & -\cos 30 \\ \cos 30 & -\sin 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin 30 & -\cos 30 \\ \cos 30 & -\sin 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}^P = 60 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{100}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \end{bmatrix} - 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 0,15+0,1\sqrt{3} \\ 0,4+0,15\sqrt{3} \end{bmatrix} -$$

$$- \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \end{bmatrix} + 2 \cdot 10 \cdot \frac{10}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}^P = 60 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \end{bmatrix} + \frac{100}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \end{bmatrix} -$$

$$- 100 \cdot \begin{bmatrix} 0,15+0,1\sqrt{3} \\ 0,4+0,15\sqrt{3} \end{bmatrix} - 50 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \end{bmatrix} + \frac{200}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}^P = 60 \begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{3}}{20} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{\sqrt{3}}{10} \end{bmatrix} + \frac{100}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{3}}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{3}{20} & -\frac{3\sqrt{3}}{20} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15+10\sqrt{3} \\ 40+15\sqrt{3} \end{bmatrix} - 50 \begin{bmatrix} \frac{3}{20} & -\frac{3\sqrt{3}}{20} \\ \frac{3\sqrt{3}}{20} & \frac{3}{20} \end{bmatrix} + \frac{200}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{3}{20} & \frac{3\sqrt{3}}{20} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{20} & -\frac{3}{20} \end{bmatrix}$$

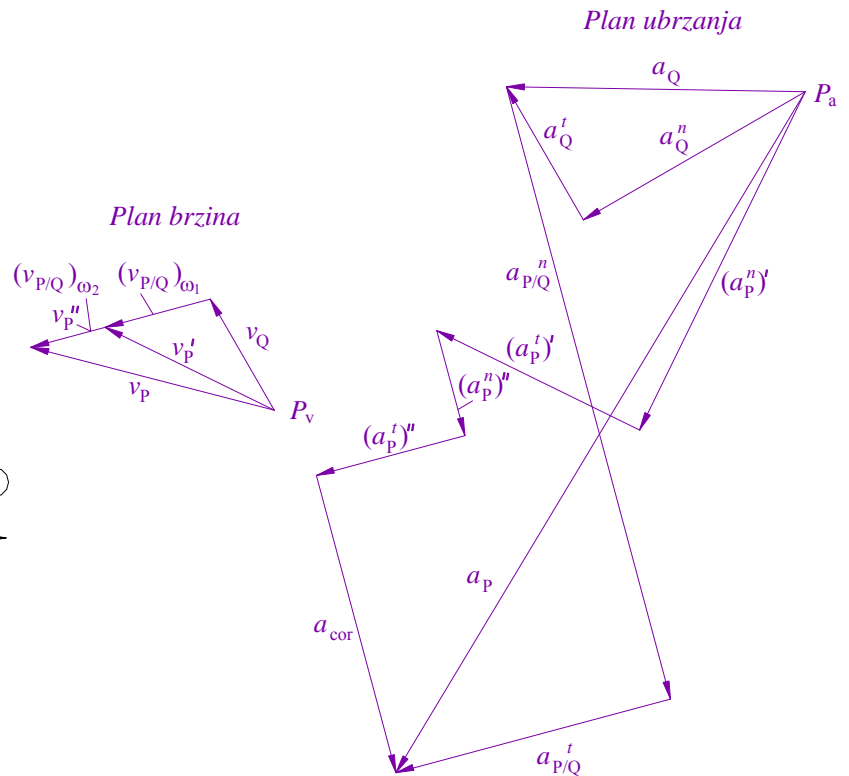
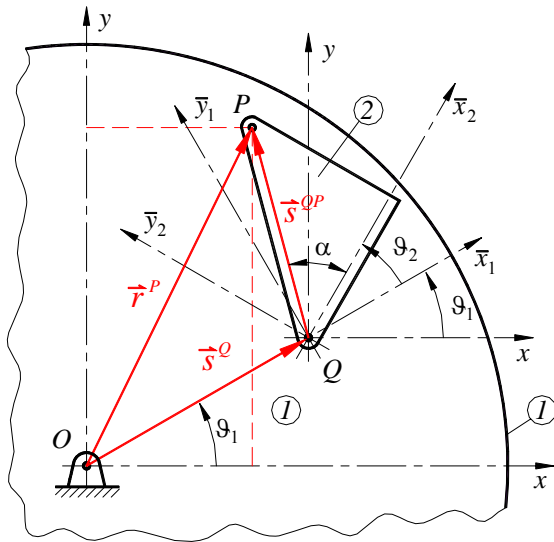
$$\ddot{\mathbf{r}}^P = \begin{bmatrix} -9\sqrt{3}-24 \\ 9-6\sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{15\sqrt{6}}{2} & -\frac{15\sqrt{2}}{2} \\ \frac{15\sqrt{2}}{2} & -\frac{15\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15+10\sqrt{3} \\ 40+15\sqrt{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{15}{2} & -\frac{15\sqrt{3}}{2} \\ \frac{15\sqrt{3}}{2} & \frac{15}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15\sqrt{2}+15\sqrt{6} \\ -15\sqrt{6}-15\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}^P = \begin{bmatrix} -9\sqrt{3}-24 - \frac{15\sqrt{6}}{2} - \frac{15\sqrt{2}}{2} - 15 - 10\sqrt{3} - \frac{15}{2} + \frac{15\sqrt{3}}{2} - 15\sqrt{2} + 15\sqrt{6} \\ 9-6\sqrt{3} + \frac{15\sqrt{2}}{2} - \frac{15\sqrt{6}}{2} - 40 - 15\sqrt{3} - \frac{15\sqrt{3}}{2} - \frac{15}{2} - 15\sqrt{6} - 15\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}^P = \begin{bmatrix} -79,88 \\ -132,80 \end{bmatrix}, \text{ m/s}^2$$

$$\ddot{\mathbf{r}}^P = -79,88\vec{i} - 132,80\vec{j}, \text{ m/s}^2$$

Grafičkim putem provjerimo rješenja:



Prijenosna brzina: $v_{p'} = \overline{OP} \cdot \dot{\theta}_1 = \vec{r}^P \cdot \dot{\theta}_1 = (\sqrt{0.323205^2 + 0.659808^2}) \cdot 10 = 7.3471 \text{ m/s}$

Relativna brzina: $v_{p''} = \overline{QP} \cdot \dot{\theta}_2 = \frac{0.6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{10}{\sqrt{2}} = 3 \text{ m/s}$

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{p'} + \vec{v}_{p''} \quad \mathbf{v}_p = \begin{bmatrix} -9.5 \\ 2.46 \end{bmatrix}, \text{ m/s}$$

Normalna komponenta prijenosne akceleracije: $a_{p'}^n = \frac{v_{p'}^2}{\overline{OP}} = \frac{7.347^2}{0.73471} = 73.469 \text{ m/s}^2$

Tang. komponenta prijenosne akceleracije: $a_{p'}^t = \overline{OP} \cdot \ddot{\theta}_1 = 0.73471 \cdot 60 = 44.0826 \text{ m/s}^2$

Normalna komponenta relativne akceleracije: $a_{p''}^n = \frac{v_{p''}^2}{\overline{QP}} = \frac{3^2 \cdot \sqrt{2}}{0.6} = 21.2132 \text{ m/s}^2$

Tang. komponenta relativne akceleracije: $a_{p''}^t = \overline{QP} \cdot \ddot{\theta}_2 = \frac{0.6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{100}{\sqrt{2}} = 30 \text{ m/s}^2$

Coriolisovo ubrzanje: $\vec{a}_{cor} = 2 \cdot (\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r)$

$$a_{cor} = 2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot v_r = 2 \cdot 10 \cdot 3 = 60 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_p = \vec{a}_{p'}^n + \vec{a}_{p'}^t + \vec{a}_{p''}^n + \vec{a}_{p''}^t + \vec{a}_{cor} \quad \mathbf{a}_p = \begin{bmatrix} -79.88 \\ -132.8 \end{bmatrix}, \text{ m/s}^2$$

Drugi način:

$$v_Q = \overline{OQ} \cdot \dot{\vartheta}_1 = 0.5 \cdot 10 = 5 \text{ m/s}$$

$$v_{P/Q} = \overline{QP} \cdot (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2) = \frac{0.6}{\sqrt{2}} \cdot \left(10 + \frac{10}{\sqrt{2}}\right) = 7.2426 \text{ m/s}$$

.....

$$\bar{a}_Q = \bar{a}_Q^n + \bar{a}_Q^t$$

$$a_Q^n = \frac{v_Q^2}{\overline{OQ}} = \frac{5^2}{0.5} = 50 \text{ m/s}^2$$

$$a_Q^t = \overline{OQ} \cdot \ddot{\vartheta}_1 = 0.5 \cdot 60 = 30 \text{ m/s}^2$$

$$\bar{a}_P = \bar{a}_Q + \bar{a}_{P/Q}^n + \bar{a}_{P/Q}^t$$

$$a_{P/Q}^n = \frac{v_{P/Q}^2}{\overline{QP}} = \frac{7.2426^2 \sqrt{2}}{0.6} = 123.638 \text{ m/s}^2$$

$$a_{P/Q}^t = \overline{QP} \cdot (\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) = \frac{0.6}{\sqrt{2}} \cdot \left(60 + \frac{100}{\sqrt{2}}\right) = 55.456 \text{ m/s}^2$$

Rješenje:

$$\mathbf{v}_p = \begin{bmatrix} -9.5 \\ 2.46 \end{bmatrix}, \text{ m/s}, \quad \mathbf{a}_p = \begin{bmatrix} -79.88 \\ -132.8 \end{bmatrix}, \text{ m/s}^2$$

Brzine :

$$\begin{aligned}
& 10 \left\{ \left\{ -\sin\left[\frac{\pi}{6}\right], -\cos\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\}, \left\{ \cos\left[\frac{\pi}{6}\right], -\sin\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\} \right\} \cdot \{0.5, 0\} + \\
& 10 \left\{ \left\{ -\sin\left[\frac{\pi}{6}\right], -\cos\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\}, \left\{ \cos\left[\frac{\pi}{6}\right], -\sin\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\} \right\} \cdot \\
& \quad \left\{ \left\{ \cos\left[\frac{\pi}{6}\right], -\sin\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\}, \left\{ \sin\left[\frac{\pi}{6}\right], \cos\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\} \right\} \cdot \{0.3, 0.3\} + \\
& \frac{10}{\sqrt{2}} \left\{ \left\{ \cos\left[\frac{\pi}{6}\right], -\sin\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\}, \left\{ \sin\left[\frac{\pi}{6}\right], \cos\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\} \right\} \cdot \\
& \quad \left\{ \left\{ -\sin\left[\frac{\pi}{6}\right], -\cos\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\}, \left\{ \cos\left[\frac{\pi}{6}\right], -\sin\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\} \right\} \cdot \{0.3, 0.3\} \\
& \{-9.49585, 2.45559\}
\end{aligned}$$

Ubrzanja :

$$\begin{aligned}
& 60 \left\{ \left\{ -\sin\left[\frac{\pi}{6}\right], -\cos\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\}, \left\{ \cos\left[\frac{\pi}{6}\right], -\sin\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\} \right\} \cdot \{0.5, 0\} + \\
& 60 \left\{ \left\{ -\sin\left[\frac{\pi}{6}\right], -\cos\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\}, \left\{ \cos\left[\frac{\pi}{6}\right], -\sin\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\} \right\} \cdot \\
& \quad \left\{ \left\{ \cos\left[\frac{\pi}{6}\right], -\sin\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\}, \left\{ \sin\left[\frac{\pi}{6}\right], \cos\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\} \right\} \cdot \{0.3, 0.3\} + \\
& \frac{100}{\sqrt{2}} \left\{ \left\{ \cos\left[\frac{\pi}{6}\right], -\sin\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\}, \left\{ \sin\left[\frac{\pi}{6}\right], \cos\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\} \right\} \cdot \\
& \quad \left\{ \left\{ -\sin\left[\frac{\pi}{6}\right], -\cos\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\}, \left\{ \cos\left[\frac{\pi}{6}\right], -\sin\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\} \right\} \cdot \{0.3, 0.3\} - 100 \\
& \{0.15 + 0.1\sqrt{3}, 0.4 + 0.15\sqrt{3}\} - \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 \left\{ \left\{ \cos\left[\frac{\pi}{6}\right], -\sin\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\}, \left\{ \sin\left[\frac{\pi}{6}\right], \cos\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\} \right\} \cdot \\
& \quad \left\{ \left\{ \cos\left[\frac{\pi}{6}\right], -\sin\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\}, \left\{ \sin\left[\frac{\pi}{6}\right], \cos\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\} \right\} \cdot \{0.3, 0.3\} + \\
& \frac{200}{\sqrt{2}} \left\{ \left\{ -\sin\left[\frac{\pi}{6}\right], -\cos\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\}, \left\{ \cos\left[\frac{\pi}{6}\right], -\sin\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\} \right\} \cdot \\
& \quad \left\{ \left\{ -\sin\left[\frac{\pi}{6}\right], -\cos\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\}, \left\{ \cos\left[\frac{\pi}{6}\right], -\sin\left[\frac{\pi}{6}\right] \right\} \right\} \cdot \{0.3, 0.3\} \\
& \{-79.8672, -132.799\}
\end{aligned}$$