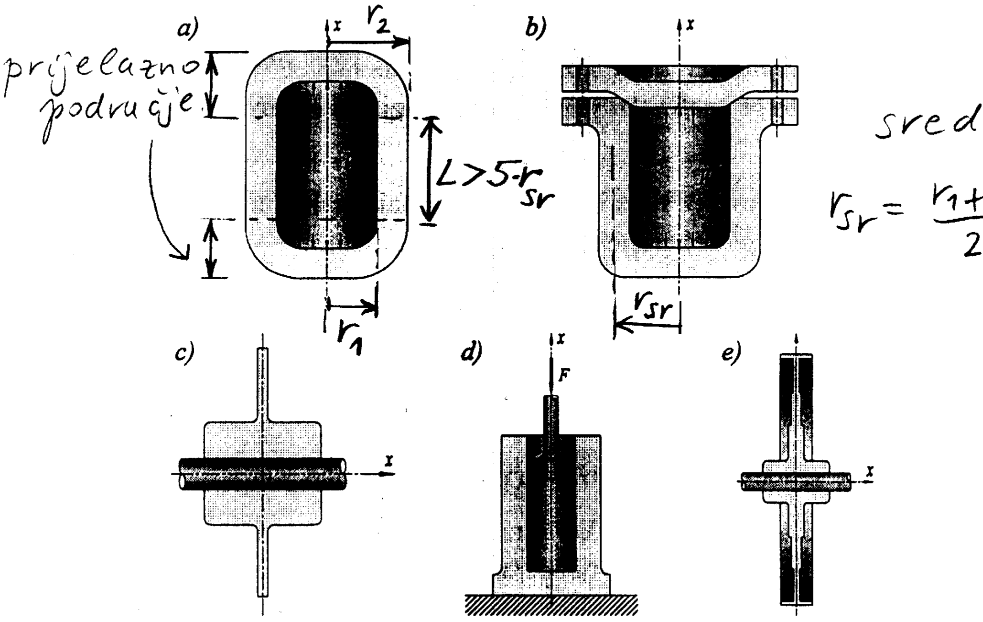
DEBELOSTJENE CIJEVI

1. Alfirević: Nauka o čvrstoći II, Golden marketing, tg. 1999.



srednji radijus:

$$r_{sr} = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

Osnosimetrična tijela s osi simetrije *x*: a) i b) debelostjena posuda, c) stezni spoj, d) cilindar preše, e) rotirajući disk

- klasifikacija: zatvorene i otvorene
- cijevi su u praksi opterećene obično:
  - unutarnjim tlakom
  - vanjskim tlakom
  - unutarnjim i vanjskim tlakom

  } radijalno opterećenje

- kriterij:

$$t = r_2 - r_1 > \frac{1}{10} \cdot \frac{r_1 + r_2}{2}$$

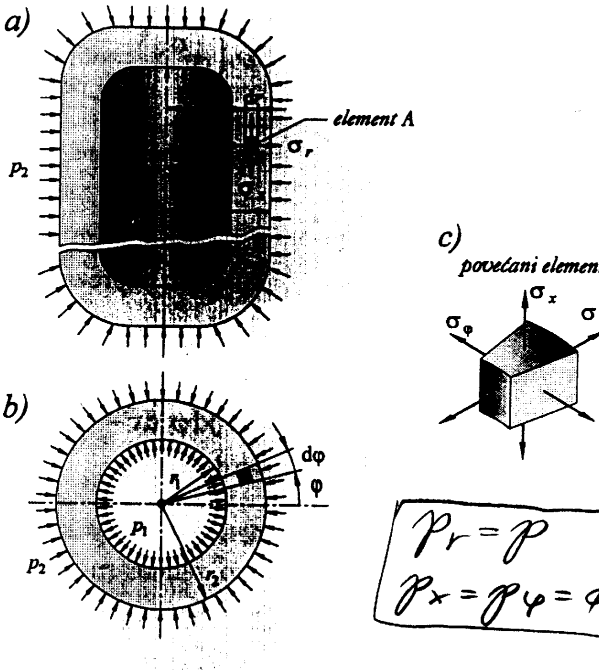
$$\boxed{t > \frac{r_{sr}}{10}}$$

Pretpostavke i ograničenja o deformiranju i raspodjeli naprezanja

Pretpostavke:

1. Cijev je osnosimetrična i osnosimetrično opterećena. ⇒ Naprezanje i deformacije

ne ovise o koordinatama φ i z već samo radijusa r.



$p_r = p$
$p_x = p_\varphi = 0$

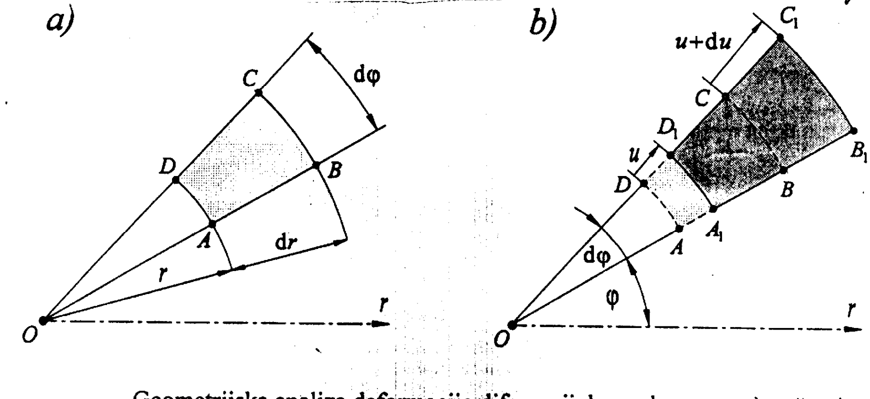
Debelostjena posuda opterećena unutarnjim tlakom p_1 i vanjskim tlakom p_2: a) uzdužni presjek, b) poprečni presjek, c) aksonometrijski prikaz diferencijalnog elementa s ucrtanim naprezanjima (I. Alfirević, NOČ II)

2. Ovisnost naprezanja i deformacija je linearan (vrijedi Hookeov zakon, $\sigma < \sigma_T$)

3. Naprezanje σ_x jednoliko je raspodijeljeno po poprečnom presjeku cijevi.

Geometrijska analiza

- sve se točke pomiču radijalno (pomak u)



Geometrijska analiza deformacije diferencijalnog elementa: a) početni nedeformirani oblik, b) usporedba deformiranog i nedeformiranog elementa

I. Alfirević: NOČ II

- radijalni pomak $u = u(r)$ je nepoznata f-ja

- radijalna deformacija:

$$\varepsilon_r = \frac{\overline{A_1B_1} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{(dr + du) - dr}{dr} = \frac{du}{dr}$$

- cirkularna deformacija:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\overset{\frown}{A_1D_1} - \overset{\frown}{AD}}{\overset{\frown}{AD}} = \frac{(r+u)\cancel{d\varphi} - r\cancel{d\varphi}}{r\cancel{d\varphi}} = \frac{u}{r} \quad (1)$$

Primjena Hookeova zakona

- vlada troosno stanje naprezanja:

σ_r - radijalno naprezanje

σ_φ - cirkularno -"-

σ_x - aksijalno -"-

- tangencijalna naprezanja su jednaka nuli ($\tau = \emptyset$) (iz uvjeta osne simetrije)

Hookeov zakon:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu(\sigma_\varphi + \sigma_x)\right] \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E}\left[\sigma_\varphi - \nu(\sigma_r + \sigma_x)\right] \\ \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi)\right] \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

σ_x se odreduje na temelju uvjeta ravnoteže pa ga smatramo poznatim.

$\Sigma F_x = \emptyset$, $\quad p_1 \cdot r_1^2 \pi - \sigma_x \cdot (r_2^2 - r_1^2)\pi = \emptyset$

$$\boxed{\sigma_x = p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}}$$

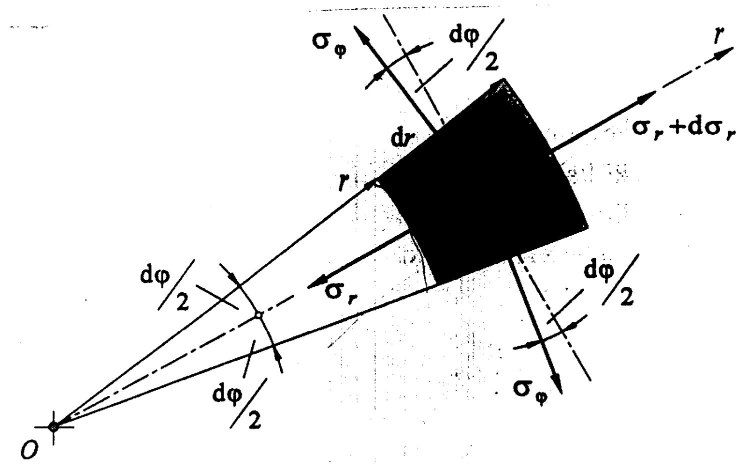
Iz (2):

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\varphi\right) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_\varphi + \nu\varepsilon_r\right) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

(1) $\Rightarrow$ (3)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Diferencijalna jednadžba ravnoteže elementa



Sile na diferencijalnom elementu debelostjene posude (I. Alfirević: NOČ II)

$\Sigma F_r = 0$, $-\sigma_r \cdot r \cdot \cancel{d\varphi}\,\cancel{dx} + (\sigma_r + d\sigma_r)(r+dr)\cancel{d\varphi}\cdot\cancel{dx} -$

$$-2\sigma_\varphi \cdot \sin\frac{d\varphi}{2} \cdot dr \cdot \cancel{dx} = 0 \qquad (5)$$

$$\sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$$

$$-\cancel{\sigma_r}\cdot r + \cancel{\sigma_r}\cdot r + d\sigma_r \cdot r + \sigma_r dr + \underbrace{d\sigma_r \cdot dr}_{\approx 0} - \sigma_\varphi \cdot dr = 0 \;/ : dr$$

$$\boxed{\sigma_r - \sigma_\varphi + r\cdot\frac{d\sigma_r}{dr} = 0} \qquad (6)$$

Ako (4) uvrstimo u (6) i zatim taj izraz sredimo, dobit ćemo diferencijalnu jednadžbu izraženu preko nepoznate f-je $u(r)$:

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}=0 \qquad (7)$$

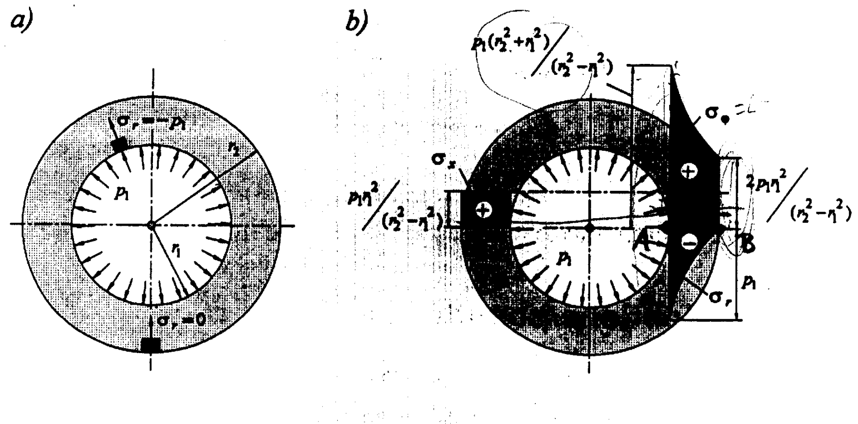
Izraz (7) može se preinačiti u obliku:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{du}{dr}+\frac{u}{r}\right]=0 \quad \text{ili} \quad \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}(u\cdot r)\right]=0 \qquad (8)$$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe je:

$$\boxed{u=C_1 r+\frac{C_2}{r}} \qquad (9)$$

Konstante integracije C_1 i C_2 određujemo iz rubnih uvjeta:

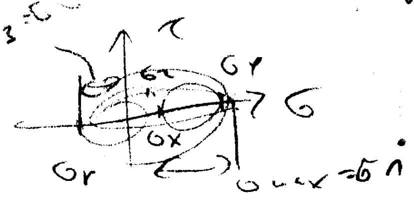


Debela cijev opterećena unutarnjim tlakom: a) geometrija i opterećenje, b) raspodjela naprezanja

I. Alfirević: Hoč II

a) Za cijev opterećenu unutarnjim tlakom p_1:

$$\sigma_r(r_1)=-p_1 \quad i \quad \sigma_r(r_2)=0 \qquad (10)$$



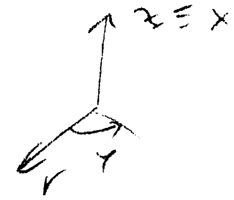
Budući je opće rješenje (9) dano preko pomaka, a rubni uvjeti preko naprezanja, potrebno je naprezanje σ_r također izraziti pomoću pomaka.

Iz (9):

$$\frac{u}{r} = C_1 + \frac{C_2}{r^2} \quad ; \quad \frac{du}{dr} = C_1 - \frac{C_2}{r^2}$$

Ako ove izraze uvrstimo u izraze (4) te uvrštavanjem rubnih uvjeta (10) dobivamo:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left[1 - \left(\frac{r_2}{r}\right)^2\right] \\ \sigma_\varphi &= \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left[1 + \left(\frac{r_2}{r}\right)^2\right] \end{aligned}} \qquad (11)$$



ZA TLAK IZNUTRA !!!

ZA ZATVORENU CIJEV: $\boxed{\sigma_z = p_1 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}}$

ZA OTVORENU CIJEV: $\sigma_z = 0$

<u>DIMENZIONIRANJE CIJEVI OPTEREĆENE UNUTARNJIM TLAKOM:</u>

U praksi je obično zadano: p_1, r_1, σ_{dop}

Traži se: $r_2 = ?$ ILI $t = r_2 - r_1 = ?$

I) Po teoriji τ_{max} (III teorija čvrstoće):

$$\sigma_{ekv} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{dop}$$

Iz dijagrama raspodjele naprezanja slijedi da je kritična točka na unutarnjem rubu cijevi ($r = r_1$):

$$\sigma_1 = \sigma_\varphi \; ; \; \sigma_2 = \sigma_x \; ; \; \sigma_3 = \sigma_r$$

$$\sigma_{ekv} = \sigma_\varphi - \sigma_r \leq \sigma_{dop}$$

$$p_1 \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + p_1 \leq \sigma_{dop} \Rightarrow$$

$$\boxed{r_2 \geq r_1 \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{dop}}{\sigma_{dop} - 2 p_1}}}$$

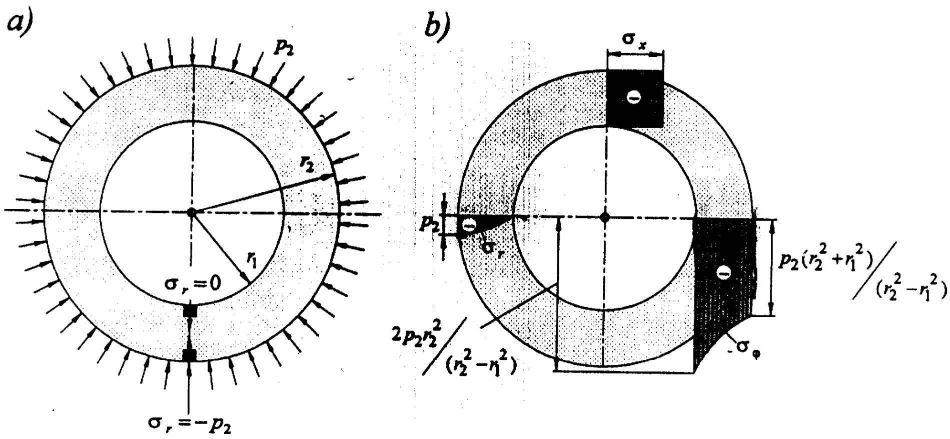
II Po HMH-teoriji (IV teorija čvrstoće):

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{r_2 \geq r_1 \sqrt{\frac{\sigma_{dop}}{\sigma_{dop} - \sqrt{3} p_1}}}$$

b) Cijev podvrgnuta samo djelovanju vanjskog tlaka p_2:



Debelostjena posuda opterećenja vanjskim tlakom p_2: a) geometrija i rubni uvjeti, b) raspodjela naprezanja

(I. Alfirević: NOČ II)

$\sigma_r(r_1) = \phi \quad ; \quad \sigma_r(r_2) = -p_2$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_r &= -p_2 \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\left[1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^2\right], \\ \sigma_\varphi &= -p_2 \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\left[1 + \left(\frac{r_1}{r}\right)^2\right] \\ \sigma_z &= -p_2 \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \end{aligned}}$$

- neracionalne su cijevi za $\frac{r_2}{r_1} > 2$
- za postizanje većeg dopuštenog opterećenja p_{dop}, upotrebljavaju se sastavljene cijevi.