

ANALIZA GEOMETRIJSKI NELINEARNIH VIŠESLOJNIH GREDA

Leo Škec & Gordan Jelenić

Sažetak: U radu je predstavljena formulacija konačnog elementa za geometrijski nelinearnu višeslojnu gredu bez klizanja i razmicanja među slojevima. Broj slojeva (n) je proizvoljan, a čvorni stupnjevi slobode su horizontalna i vertikalna komponenta pomaka na referentnoj osi kompozitne grede te kutovi zaokreta poprečnog presjeka svih slojeva (ukupno $2 + n$ stupnjeva slobode po čvoru). Kinematičke jednadžbe izvedene su u geometrijski egzaktnom obliku, konstitutivne jednadžbe su linearne, a ravnotežne jednadžbe izvedene su iz principa virtualnog rada. Sustav jednadžbi je nelinearan po nepoznatim funkcijama (pomak na referentnoj osi i kutovi zaokreta svih slojeva) te se rješenja dobivaju numerički. Računski primjeri pokazuju da je predstavljeni model, u usporedbi s postojećim geometrijski nelinearnim modelima za sendvič grede te ravninskim konačnim elementima i analitičkim rješenjem iz teorije elastičnosti, vrlo učinkovit za modeliranje visokih greda kod kojih je naglašeno vitoperenje poprečnog presjeka.

Ključne riječi: višeslojne grede, geometrijski nelinearna analiza, metoda konačnih elementa, krivljenje poprečnog presjeka

1 UVOD

Istraživanje i primjena slojevitih nosača u brojnim granama inženjerstva u značajnom je porastu u posljednjih nekoliko desetljeća i vrlo je aktualna tema u svijetu tehničke mehanike i računalnog modeliranja nosača [1; 2; 4; 7; 8]. Razni gredni modeli za analizu slojevitih nosača obuhvaćaju dvoslojne, troslojne (sendvič) i višeslojne nosače, a veza između slojeva može biti kruta ili omogućavati klizanje (i razmicanje) među slojevima. Analiza takvih greda može biti linearna, što omogućava analitičko rješenje problema, ili geometrijski i/ili materijalno nelinearna što dovodi do potrebe za numeričkim rješenjima. U ovom radu predstavljen je model za statičku analizu geometrijski nelinearnih višeslojnih greda, pri čemu je broj slojeva neograničen, a kontakt među slojevima omogućava samo nezavisno rotiranje jednog sloja u odnosu na drugi, dok su klizanje i razmicanje među slojevima isključeni. Iz same kinematike takve grede moguće je na vrlo jednostavan način zapisati pomak svakog sloja preko pomaka nekog referentnog sloja i kutova zaokreta odgovarajućih slojeva čime se broj nepoznatih funkcija problema reducira na pomake referentnog sloja te kutove zaokreta poprečnog presjeka svih slojeva.

2 DEFINICIJA PROBLEMA

Kompozitna greda koju promatramo je ravna, duljine L i sastavljena je od n slojeva, od kojih svaki sloj (i) može imati zasebne materijalne i geometrijske karakteristike poprečnog

presjeka. Čitav problem smješten je u ravninu čije su prostorne osi definirane baznim vektorima e_1 i e_2 . Položaj kompozitne grede u prostornom koordinatnom sustavu definiran je baznim vektorima

$$\mathbf{t}_{0j} = \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \mathbf{e}_j, \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

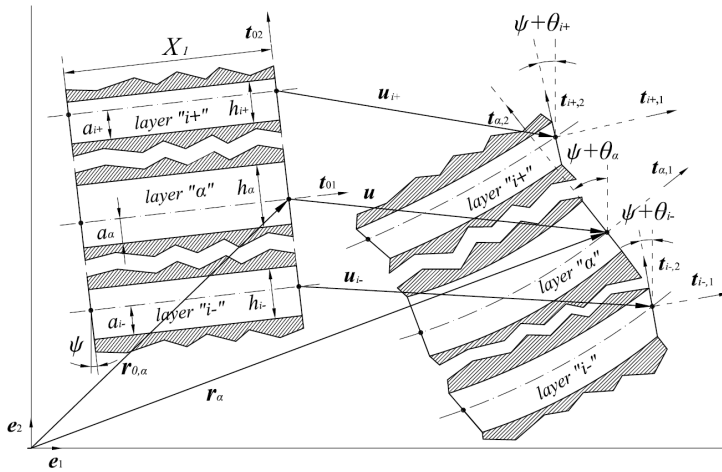
u nedeformiranom stanju, gdje je j oznaka osi, a ψ je nagib u odnosu na horizontalnu os definiranu baznim vektorom \mathbf{t}_{01} . U deformiranom stanju položaj nekog sloja i kompozitne grede definiran je baznim vektorima

$$\mathbf{t}_{i,j} = \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} \cos(\psi + \theta_i) & -\sin(\psi + \theta_i) \\ \sin(\psi + \theta_i) & \cos(\psi + \theta_i) \end{bmatrix} \mathbf{e}_j, \quad (2)$$

gdje je θ_i kut zaokreta poprečnog presjeka sloja i .

2.1 Vezne jednadžbe

Na sl. 1 prikazana je kompozitna greda u deformiranom i nedeformiranom stanju.



Sl. 1. Nedeformirano i deformirano stanje višeslojne kompozitne grede

Oznakom α obilježen je referentni sloj, a oznakom $i+$ odnosno $i-$ proizvoljno odabrani sloj koji se nalazi iznad ili ispod sloja α u kompozitnoj gredi. Visina svakog sloja nosi oznaku h_i , a udaljenost referentne osi sloja i od donjeg ruba sloja oznaku a_i . Ta udaljenost može se zadavati proizvoljno, što znači da i referentna os svakog sloja, na kojoj se mjere pomaci i zadaju opterećenja, može imati proizvoljan položaj te biti smještena čak i izvan samog sloja. Prema sl. 1 moguće je definirati pomak bilo kojeg sloja \mathbf{u}_i na kompozitnoj gredi pomoću pomaka referentnog sloja $\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{u}$ i odgovarajućih kutova zaokreta poprečnog presjeka. Ako još pri tome uvedemo oznake $\xi = \max(i; \alpha)$ i $\zeta = \min(i; \alpha)$, dolazimo do slijedećeg izraza

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u} + d_{i,\zeta}(\mathbf{t}_{\zeta,2} - \mathbf{t}_{0,2}) + d_{i,\xi}(\mathbf{t}_{\xi,2} - \mathbf{t}_{0,2}) + \sum_{s=\zeta+1}^{\xi-1} d_{i,s}(\mathbf{t}_{s,2} - \mathbf{t}_{0,2}), \quad (3)$$

gdje je

$$d_{i,\zeta} = \text{sgn}(i - \alpha)(h_\zeta - a_\zeta), \quad d_{i,\xi} = \text{sgn}(i - \alpha)a_\xi \text{ and } d_{i,s} = \text{sgn}(i - \alpha)h_s. \quad (4)$$

2.2 Kinematičke jednadžbe

Kinematičke jednadžbe zapisane su prema Reissnerovoj grednoj teoriji [3] za svaki sloj kao

$$\gamma_i = \begin{Bmatrix} \epsilon_i \\ \gamma_i \end{Bmatrix} = \mathbf{\Lambda}_i^\top \mathbf{r}'_i - \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{\Lambda}_i^\top (\mathbf{t}_{01} + \mathbf{u}'_i) - \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \kappa_i = \theta'_i, \quad (5)$$

gdje su ϵ_i i γ_i uzdužna i posmčna deformacija na referentnoj osi i -tog sloja, dok je κ_i zakrivljenost. Deriviranje po X_1 prikazano je oznakom $(\bullet)'$. U izrazima (5) su deformacije svakog sloja izražene preko funkcija \mathbf{u}_i i θ_i , koje se korištenjem izraza (3) mogu reducirati na osnovne nepoznate funkcije \mathbf{u} i θ_j ($j \in [\zeta, \dots, \xi]$). Treba naglasiti da su osnovne nepoznanice funkcije samo uzdužne materijalne koordinate X_1 (vidi sl. 1).

2.3 Konstitutivne jednadžbe

Ako usvojimo linearno elastično ponašanje materijala, tada je konstitutivni zakon za svaki sloj

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}_i \\ M_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_i \begin{Bmatrix} \gamma_i \\ \kappa_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_i A_i & 0 & -E_i S_i \\ 0 & G_i k_i A_i & 0 \\ -E_i S_i & 0 & E_i I_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_i \\ \gamma_i \\ \kappa_i \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

gdje su N_i i M_i rezultante naprezanja i moment rezultanti naprezanja, a \mathbf{C}_i je konstitutivna matrica za sloj i . A_i , S_i i I_i su površina poprečnog presjeka, statički moment i moment površine 2. reda, dok su E_i , G_i i k_i modul elastičnosti, modul posmika i korekcijski koeficijent za posmičnu površinu sloja i . Izraz (6) se korištenjem izraza (5) i (3) također može izraziti samo preko osnovnih nepoznanica \mathbf{u} i θ_j ($j \in [\zeta, \dots, \xi]$).

2.4 Ravnotežne jednadžbe - princip virtualnog rada

Za statički problem virtualni rad za čitavu kompozitnu gredu dobiva se kao zbroj virtualnih radova unutrašnjih i vanjskih sila po svim slojevima kao

$$G \equiv G_i - G_e = \sum_{j=1}^n \int_0^L (\bar{\gamma}_j \cdot \mathbf{N}_j + \bar{\kappa}_j M_j - \bar{\mathbf{u}}_j \cdot \mathbf{f}_j - \bar{\theta}_j w_j) dX_1 - \quad (7)$$

$$- (\bar{\mathbf{u}}_{j,0} \cdot \mathbf{F}_{j,0} + \bar{\theta}_{j,0} W_{j,0} + \bar{\mathbf{u}}_{j,L} \cdot \mathbf{F}_{j,L} + \bar{\theta}_{j,L} W_{j,L}),$$

gdje \mathbf{f}_j i w_j predstavljaju raspodjeljene sile i momente po sloju j , dok su $\mathbf{F}_{j,k}$ i $W_{j,k}$ koncentrirane sile i momenti na krajevima sloja ($k = 0$ ili L). Korištenjem veznih, kinematičkih i konstitutivnih jednadžbi, izraz (7) može se zapisati kao

$$G \equiv \sum_{i=1}^n \left[\int_0^L \bar{\mathbf{p}}_f^\top \mathbf{B}_i^\top \left(\mathbf{D}_i^\top \mathbf{L}_i^\top \mathbf{C}_i \begin{Bmatrix} \gamma_i \\ \kappa_i \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i \\ w_i \end{Bmatrix} \right) dX_1 - \bar{\mathbf{p}}_{f,0}^\top \mathbf{B}_{i,0}^\top \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{i,0} \\ W_{i,0} \end{Bmatrix} - \bar{\mathbf{p}}_{f,L}^\top \mathbf{B}_{i,L}^\top \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{i,L} \\ W_{i,L} \end{Bmatrix} \right] = 0, \quad (8)$$

gdje je

$$\bar{\mathbf{p}}_f^\top = \left\langle \bar{\mathbf{u}}^\top \quad \bar{\theta}_1 \quad \bar{\theta}_2 \quad \dots \quad \bar{\theta}_{n-1} \quad \bar{\theta}_n \right\rangle = \left\langle \bar{\mathbf{u}}_i^\top \quad \bar{\theta}_i \right\rangle \mathbf{B}_i, \quad (9)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -d_{i,\zeta} \mathbf{t}_{\zeta,i} & \dots & -d_{i,\xi} \mathbf{t}_{\xi,1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 & \dots & 0 & \delta_{i\zeta} & \dots & \delta_{i\xi} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$L_i = \begin{bmatrix} \Lambda_i^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix}, D_i = \begin{bmatrix} \frac{d}{dX_1} I & -\hat{\mathbf{t}}_3 (t_{01} + \mathbf{u}'_i) \\ \mathbf{0}^\top & \frac{d}{dX_1} \end{bmatrix}, \text{ a } \delta_{ij} \text{ je Kroneckerov simbol.}$$

3 POSTUPAK RJEŠAVANJA

Predstavljene jednačbe su nelinearne po osnovnim nepoznatim funkcijama te ih je nemoguće riješiti analitički. Stoga, virtualne nepoznate funkcije $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta}_i, i \in [1, \dots, n])$ interpoliramo između N čvornih vrijednosti kao

$$\bar{\mathbf{p}}_f = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}(X_1) \\ \bar{\theta}_1(X_1) \\ \vdots \\ \bar{\theta}_n(X_1) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^N \Psi_j(X_1) \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_j \\ \bar{\theta}_{1,j} \\ \vdots \\ \bar{\theta}_{n,j} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^N \Psi_j(X_1) \bar{\mathbf{p}}_j, \quad (11)$$

gdje je $\Psi_j(X_1)$ matrica interpolacijskih funkcija, a $\bar{\mathbf{p}}_j$ je vektor koji sadrži vrijednosti nepoznatih funkcija u nekom čvoru j . Koristeći interpolaciju (11) za proizvoljne vrijednosti čvornih virtualnih nepoznatih funkcija $\bar{\mathbf{p}}_j$ izraz (8) postaje

$$G \equiv \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{p}}_j^\top \mathbf{g}_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g}_j = \mathbf{0}, \quad (12)$$

gdje je

$$\mathbf{g}_j = \sum_{i=1}^n \left[\int_0^L \Psi_j^\top \mathbf{B}_i^\top \left(\mathbf{D}_i^\top \mathbf{L}_i^\top \mathbf{C}_i \left\{ \begin{matrix} \gamma_i \\ \kappa_i \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{w}_i \end{matrix} \right\} \right) dX_1 - \left(\delta_{j1} \mathbf{B}_{i,0}^\top \left\{ \begin{matrix} \mathbf{F}_{i,0} \\ \mathbf{W}_{i,0} \end{matrix} \right\} + \delta_{jN} \mathbf{B}_{i,L}^\top \left\{ \begin{matrix} \mathbf{F}_{i,L} \\ \mathbf{W}_{i,L} \end{matrix} \right\} \right) \right] \quad (13)$$

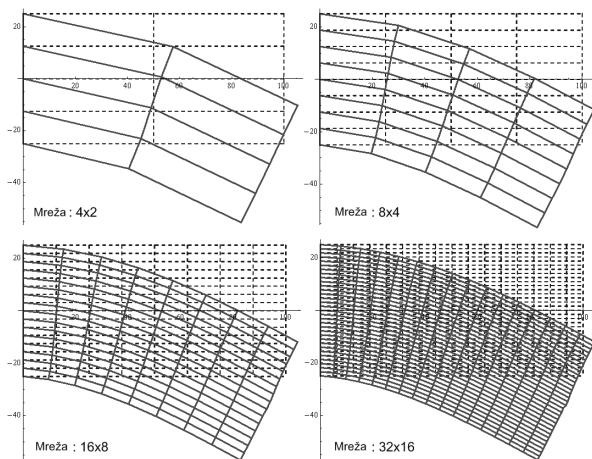
čvorni vektor neuravnoteženih sila (rezidual). Jednačba (12) je nelinearna po osnovnim nepoznatim funkcijama pa se problem rješava numerički, Newton-Raphsonovim postupkom uz odgovarajuće aproksimiranje nepoznatih funkcija \mathbf{p}_f .

4 NUMERIČKI PRIMJERI

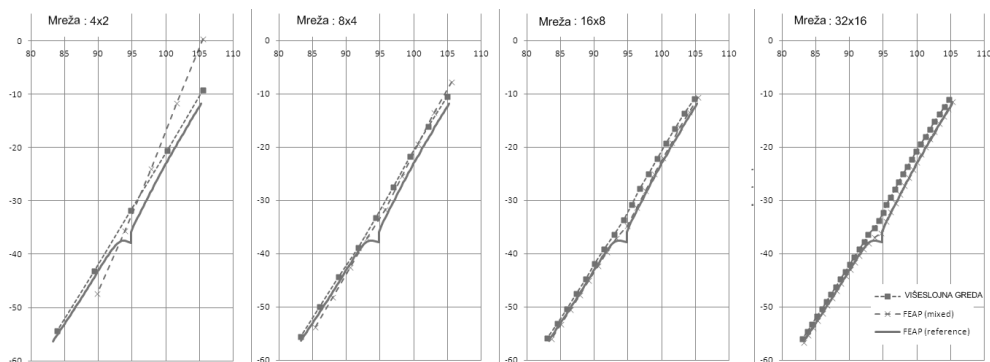
Osim za rješavanje problema nelinearnih jednoslojnih i višeslojnih greda s krutom vezom među slojevima [8], model višeslojne grede predstavljen u ovom radu može se efikasno koristiti i za modeliranje ravninskih greda, pri čemu se greda po visini diskretizira na n slojeva, a po duljini na N konačnih elemenata. Budući da svaki sloj može slobodno rotirati u odnosu na susjedni, ovakav model omogućava aproksimaciju krivljenja poprečnog presjeka koja će biti točnija što je broj slojeva veći. Za linearnu analizu, predstavljeni je model uspoređen s rješenjem iz teorije elastičnosti [5] te s poznatim konačnim elementima za ravninsko stanje naprezanja. Rezultati pokazuju da sa znatno manje stupnjeva slobode model za višeslojnu gredu s linearnom interpolacijom među čvorovima daje izvrsne rezultate su usporedbi s konačnim elementima za ravninsko stanje naprezanja (vidi Tab. 1). I u nelinearnoj analizi (vidi sl. 2 za velike pomake) uočena je brza konvergencija rješenja već pri vrlo rijetkim mrežama te točnost usporediva s konačnim elementima za ravninsko stanje naprezanja uz upotrebu znatnog manjeg broja stupnjeva slobode (vidi sl. 3).

Tab. 1. Usporedba rezultata za pomake osi konzolne grede na slobodnog kraju opterećenom koncentriranom silom (analitička rješenja [5] za $\nu = 0$ i $\nu = 0.25$ su $v = -3.8$ i $v = -3.95$)

Mreža $n \times N$	Višeslojna greda			2D "displacement-based" elementi			2D "enhanced-strain" elementi		
	s.s.	$\nu = 0$	$\nu = 0.25$	s.s.	$\nu = 0$	$\nu = 0.25$	s.s.	$\nu = 0$	$\nu = 0.25$
4×2	18	-3.5500	-3.6875	30	-2.7471	-2.8961	30	-3.5506	-3.4673
8×4	50	-3.7375	-3.8844	90	-3.5035	-3.5244	90	-3.7368	-3.6842
16×8	162	-3.7844	-3.9336	306	-3.7310	-3.6984	306	-3.7840	-3.7342
32×16	578	-3.7961	-3.9459	1122	-3.7837	-3.7383	1122	-3.7960	-3.7461



Sl. 2. Deformirani oblik višeslojne konzolne grede pod djelovanjem koncentrirane sile za slobodnom kraju za slučaj velikih pomaka za različite gustoće mreže



Sl. 3. Usporedba deformiranog oblika poprečnog presjeka za nelinearnu analizu (veliki pomaci) za različite gustoće mreže

5 ZAKLJUČAK

U radu je predstavljen model za geometrijski nelinearnu višeslojnu gredu bez mogućnosti klizanja i razmicanja među slojevima. Budući da je kod slojevitih nosača upravo po-

pustljivost na kontaktu jedna od praktično najzanimljivijih veličina, ovdje je pozornost više usmjerena ka modeliranju homogenih ravninskih greda pomoću višeslojne gredne teorije. Iako su gredna teorija i teorija elastičnosti dvije odvojene teorije, primjeri su pokazali da kako u linearnoj, tako i u nelinearnoj analizi model za višeslojnu gredu itekako dobro parira konačnim elementima za ravninsko stanje naprezanja te se uspješno može koristiti kao alternativa prilikom modeliranja ravninskih greda. Detaljniji prikaz predstavljene teorije s više računskih primjera dan je u [6].

Zahvala

Rezultati prikazani u ovom radu dio su projekta br.114-0000000-3025: "Improved accuracy in non-linear beam elements with finite 3D rotations" financijski poduprtog od strane Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske.

Literatura

- [1] Girhammar, U.A., Pan, D.H., "Exact static analysis of partially composite beams and beam-columns," *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 49, 2007, pp. 239–255.
- [2] Kroflić, A., Saje, M., Planinc, I., "Non-linear analysis of two-layer beams with inter-layer slip and uplift," *Comput. Struct.*, vol. 89, no. 23-24, 2011, pp. 2414–2424.
- [3] Reissner, E., "On one-dimensional finite-strain beam theory; the plane problem," *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)*, vol. 23, no. 5, 1972, pp. 795–804.
- [4] Schnabl, S., Saje, M., Turk, G., Planinc, I., "Analytical Solution of Two-Layer Beam Taking into account Interlayer Slip and Shear Deformation," *J. Struct. Eng., ASCE*, vol. 133, no. 6, 2007, pp. 886–894.
- [5] Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1951.
- [6] Škec, L., Jelenić, G., "Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection," poslano u *Acta Mechanica*, 2013.
- [7] Škec, L., Schnabl, S., Planinc, I., Jelenić, G., "Analytical modelling of multilayer beams with compliant interfaces," *Struct. Eng. Mech.*, vol. 44, no. 4, 2012, pp. 465–485.
- [8] Vu-Quoc, L., Ebcioğlu, I.K., "General Multilayer Geometrically-Exact Beams and 1-D Plates with Piecewise Linear Section Deformation," *J. Appl. Math. Mech. (ZAMM)*, vol. 76, no. 7, 1996, pp. 391–409.

Autori

Leo Škec, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, tel. +385 51 265 956, fax: +385 51 265 998, mail: leo.skec@gradri.hr
Gordan Jelenić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, tel. +385 51 265 955, fax: +385 51 265 998, mail: gordan.jelenic@gradri.hr