

TEORIJA KONSTRUKCIJA

PRIMJERI DINAMIČKE ANALIZE ELEMENATA KONSTRUKCIJE

Sveučilište u Zagrebu

Fakultet strojarstva i brodogradnje

Zagreb, 2002.



MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGRABIENSIS
UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Rajko Grubišić

TEORIJA KONSTRUKCIJA

Primjeri dinamičke analize elemenata konstrukcije



Zagreb, 2002

Autor: dr.sc. Rajko Grubišić, redoviti profesor Fakulteta strojarstva i brodogradnje
Sveučilišta u Zagrebu

Recenzenti: dr.sc. Ivo Senjanović, redoviti profesor Fakulteta strojarstva i brodogradnje
Sveučilišta u Zagrebu

dr.sc. Milenko Stegić, redoviti profesor Fakulteta strojarstva i brodogradnje
Sveučilišta u Zagrebu

dr.sc. Željko Lozina, redoviti profesor Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i
brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu

Izdavač: Fakultet strojarstva i brodogradnje, Ivana Lučića 5, Zagreb

Glavni urednik: prof. dr.sc. Tomislav Filetin

Odluka Senata Sveučilišta u Zagrebu br. 02-2022/3-2001 od 12. veljače 2002.
Sveučilišni udžbenik

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i sveučilišna knjižnica - Zagreb

UDK 621.8(075.8)(076)

GRUBIŠIĆ, Rajko

Teorija konstrukcija : primjeri
dinamičke analize elemenata konstrukcije /
Rajko Grubišić. - Zagreb : Fakultet
strojarstva i brodogradnje, 2002. -
(Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu =
Manualia Universitatis studiorum
Zagrabiensis)

Bibliografija.

ISBN 953-6313-43-X

I. Konstrukcijski elementi -- Strojarstvo -
- Udžbenik

420402088

Crteži i prijelom na računalu: Mario Šimunec

Copyright © Fakultet strojarstva i brodogradnje

Tisak: Krinen, Zagreb

Naklada: 200

SADRŽAJ

UVOD	5
POPIS OZNAKA.....	9
PRVI DIO.....	13
1. SUSTAVI S JEDNIM STUPNJEM SLOBODE GIBANJA	13
1.1. SLOBODNE VIBRACIJE	13
<i>1.1.1 Slobodne vibracije bez prigušenja</i>	<i>13</i>
<i>1.1.2. Harmonijsko gibanje i njegove osnovne značajke</i>	<i>14</i>
<i>1.1.3. Slobodne vibracije s prigušenjem</i>	<i>17</i>
<i>1.1.4 Primjeri.....</i>	<i>20</i>
Primjer 1.1.....	20
Primjer 1.2.....	20
Primjer 1.3.....	21
Primjer 1.4.....	21
Primjer 1.5.....	23
Primjer 1.6.....	23
Primjer 1.7.....	24
Primjer 1.8.....	26
Primjer 1.9.....	27
Primjer 1.10.....	28
Primjer 1.11.....	29
Primjer 1.12.....	29
1.2. PRISILNE VIBRACIJE – HARMONIJSKA SILA UZBUDE.....	30
<i>1.2.1. Neposredna sila uzbude</i>	<i>31</i>
<i>1.2.2. Centrifugalna uzbuda</i>	<i>34</i>
<i>1.2.3. Uzbuda podloge</i>	<i>35</i>
<i>1.2.4. Prenosivost vibracija</i>	<i>38</i>
<i>1.2.5. Princip rada instrumenata za mjerenje vibracija</i>	<i>38</i>
<i>1.2.6. Primjeri.....</i>	<i>40</i>
Primjer 1.13.....	40
Primjer 1.14.....	44
Primjer 1.15.....	45
Primjer 1.16.....	48
Primjer 1.17.....	49
Primjer 1.18.....	50
Primjer 1.19.....	52
Primjer 1.20.....	54
Primjer 1.21.....	55

1.3. PRISILNE VIBRACIJE – PERIODSKA SILA UZBUDE.....	56
1.3.1. Sila i odziv u trigonometrijskom obliku	57
1.3.2. Sila i odziv u kompleksno – eksponencijalnom obliku	57
1.3.3. Harmonijska analiza periodskih vibracija.....	58
1.3.4. Harmonijska analiza izmjerenih periodskih veličina.....	60
1.3.5. Frekvencijski spektar periodske funkcije	61
1.3.6. Primjeri.....	62
Primjer 1.22.....	62
Primjer 1.23.....	63
Primjer 1.24.....	64
Primjer 1.25.....	66
1.4. PRISILNE VIBRACIJE – IMPULSNA SILA UZBUDE	68
1.4.1. Približan postupak određivanja odziva uslijed kratkotrajne impulsne sile.....	69
1.4.2. Primjeri.....	70
Primjer 1.26.....	70
1.5. PRISILNE VIBRACIJE – NEPERIODSKA SILA UZBUDE	71
1.5.1. Analiza odziva u frekvencijskom području.....	72
DRUGI DIO	75
2. SUSTAVI S DVA STUPNJA SLOBODE GIBANJA	75
2.1. SLOBODNE VIBRACIJE	75
2.1.1. Svojstva prirodnih oblika.....	77
2.2. PRISILNE VIBRACIJE	78
2.2.1. Metoda superpozicije prirodnih oblika vibriranja.....	79
2.3. VIBRACIJE FLEKSIJSKIH SUSTAVA	80
2.3.1. Utjecajni koeficijenti.....	80
2.3.2. Analiza vibracija.....	81
2.4. VITLAJUĆE VIBRACIJE OSOVINE BRODSKOG VIJKA	83
2.5. LAGRANGEOVE JEDNADŽBE	85
2.6. PRIMJERI.....	86
Primjer 2.1.....	86
Primjer 2.2.....	88
Primjer 2.3.....	92
Primjer 2.4.....	94
Primjer 2.5.....	95
Primjer 2.6.....	97
Primjer 2.7.....	99
Primjer 2.8.....	101
Primjer 2.9.....	102
Primjer 2.10.....	105

TREĆI DIO.....	109
3. SUSTAVI S VIŠE STUPNJEVA SLOBODE GIBANJA I KONTINUIRANI SUSTAVI.....	109
3.1. METODA RAYLEIGHEVOG KVOCIJENTA.....	109
3.1.1. <i>Sustavi s više povezanih linearnih članova.....</i>	<i>110</i>
3.1.2 <i>Sustavi s više stupnjeva slobode gibanja</i>	<i>111</i>
3.1.3. <i>Sustavi s raspodijeljenom masom i krutosti.....</i>	<i>112</i>
3.2. PRIMJERI.....	113
Primjer 3.1.....	113
Primjer 3.2.....	114
Primjer 3.3.....	116
Primjer 3.4.....	117
Primjer 3.5.....	119
Primjer 3.6.....	120
LITERATURA	123

Uvod

Iako se tu ne mogu povući neke čvrste granice, uobičajeno je vibracije definirati kao takav oblik vremenske promjene neke fizikalne veličine, kod koje će ova barem jednom doživjeti uspon i pad svoje vrijednosti i neće se u promatranom vremenskom intervalu mijenjati monotonno. Vibracijske veličine mogu biti translatorski i kutni pomaci, sile, električni napon, jakost magnetskog polja ili druge fizikalne veličine, koje su na opisan način vremenski promjenjive. Najčešći i najprepoznatljiviji prikaz vibracijske veličine je u ovisnosti o vremenu, $f = f(t)$, tj. prikaz u vremenskom području. Osim ovog postoje još i drugi načini prikazivanja, kao npr. u frekvencijskom području.

Da bi se vibracije mogle jednostavnije matematički opisati, potrebno ih je podijeliti u određene skupine. U tu svrhu postoje, ovisno o izabranom kriteriju, različita načela podjele. Pritom je važno istaći, da se podjela vibracijskih sustava prije svega odnosi na modele stvarnih sustava. Prijelaz od stvarnog sustava na vibracijski model, tzv. modeliranje, od temeljne je važnosti za rješenje ovog tehničkog problema. Razvoj matematičkog modela definiran je složenosti problema, izborom metode rješavanja i upotrebljivošću dobivenih rezultata. Stoga je nužno s jedne strane, da vibracijski model bude što jednostavniji, a s druge strane, da se pomoću njega mogu dobiti rezultati zadovoljavajuće točnosti.

U inženjerskoj praksi tri su vrste podjele vibracija i vibracijskih sustava uobičajene: prema broju stupnjeva slobode gibanja, prema karakteru diferencijalnih jednadžbi i prema načinu postanka vibracija.

Pod pojmom broja stupnjeva slobode gibanja podrazumijeva se broj nezavisnih koordinata koje su potrebne za cjelovit opis gibanja vibracijskog sustava. Prema njemu razlikuju se sustavi s konačnim i beskonačnim brojem stupnjeva slobode gibanja. Mehanički sustavi s konačnim brojem stupnjeva slobode gibanja sastoje se od konačnog broja krutih masa međusobno povezanih s elastičnim elementima bez mase. Tu se ističu sustavi s jednim stupnjem slobode gibanja i to zato jer su najjednostavniji, te se pomoću njih mnoge značajke vibracija mogu objasniti na najjednostavniji i najpregledniji način, i jer se nerijetko stvarni vibracijski sustavi mogu svesti na model s jednim stupnjem slobode gibanja. Mehanički sustavi s kontinuirano raspodijeljenom masom jesu sustavi s beskonačnim brojem stupnjeva slobode gibanja. Najčešći inženjerski primjeri ovakvih sustava su štapovi, grede, užad, okvirni nosači, ploče i ljuske.

Prema karakteru diferencijalnih jednadžbi koje opisuju vibracije (i propisuju metodu rješavanja problema), razlikuju se linearni i nelinearni sustavi vibriranja. Iako se u stvarnosti pojava vibracija može opisati samo pomoću nelinearnih jednadžbi, uz određene pretpostavke moguće je ove jednadžbe linearizirati. Sustavi koji se mogu svesti na linearne jednadžbe, označavaju se kao linearni. Rješenje linearnih diferencijalnih jednadžbi bitno je jednostavnije od rješenja nelinearnih jednadžbi. Glavna prednost se sastoji u tome, da se ukupno rješenje može jednostavnom superpozicijom sastaviti iz niza partikularnih rješenja. S druge strane, analiza nelinearnih sustava, uz rijetke izuzetke, moguća je jedino primjenom približnih ili numeričkih metoda.

Obzirom na uzrok nastanka vibracija, postoji podjela na slobodne i prisilne vibracije. Ukoliko se neki vibracijski sustav u trenutku $t = t_0$ izvana pobudi na vibriranje i nakon toga prepusti vibriranju s prirodnom frekvencijom nakon iztitavanja početne uzbuđene, tada se govori o slobodnim vibracijama tog sustava. Iste se matematički opisuju pomoću homogenih diferencijalnih jednadžbi. Slobodne vibracije mogu biti bez i s prigušenjem, ovisno o tome da

li će tijekom vibriranja doći do rasipanja energije vibriranja ili ne. U pravilu je zanemarenje prigušenja pretpostavka koja dovodi do pojednostavljenja matematičkog modela. U slučaju prisilnih vibracija, sustav vibrira s frekvencijom koja mu je izvana nametnuta, s tzv. frekvencijom uzbude. Matematički se opisuju pomoću nehomogenih diferencijalnih jednadžbi, pri čemu vanjska uzbuda, tj. funkcija smetnje, može biti deterministička ili stohastička funkcija vremena. U prvom slučaju razlikujemo harmonijske, periodske i neperiodske vibracije, a u drugom slučaju radi se o slučajnim vibracijama.

Ovaj udžbenik je vezan uz predmet *Teorija konstrukcija* što ga autor predaje na III godini studija brodogradnje u Zagrebu, odnosno za dio predmeta koji obuhvaća dinamičku analizu elemenata konstrukcije. Zamišljen je kao nastavak predmeta *Mehanika III* (II godina studija) i kao priprema za predmet *Vibracije broda* (IV godina studija). Naime, dok se u kolegiju *Mehanika III* predaju samo najelementarnije osnove teorije vibracija na razini sustava s jednim stupnjem slobode gibanja i neposredne harmonijske uzbude, dotle se u kolegiju *Vibracije broda* predaju vibracije složenih kontinuiranih sustava s beskonačno mnogo stupnjeva slobode gibanja i s raznim tipovima uzbude, od harmonijske, periodske do impulsne i neperiodske. Očigledno je, da između ova dva kolegija postoji prostor koji je trebalo premostiti i popuniti upravo sadržajem ovog udžbenika.

U ovoj knjizi razmatrane su isključivo linearne i determinističke vibracije diskretnih sustava (koncentrirane mase). Kontinuirani sustavi zastupljeni su samo prikazom približnog postupka za određivanje njihove najniže prirodne frekvencije.

Sa željom da se knjiga didaktički što više približi onima kojima je i namijenjena, studentima i mladim inženjerima koji tek započinju svoj stručni uzlet, u **Prvom dijelu** težište analize je stavljeno na analizu sustava s jednim stupnjem slobode gibanja, ali za sve moguće vrste sila uzbude.

Prvo je prikazana analiza harmonijskih vibracija. Objašnjeni su svi osnovni pojmovi harmonijskog gibanja, opisane su slobodne vibracije bez i sa prigušenjem, te su analizirane prisilne vibracije za nekoliko vrsti harmonijskih sila uzbuda koje se najčešće javljaju u strojarскоj praksi. Uveden je pojam kompleksne frekvencijske funkcije odziva $H(\lambda)$ kao uvod u opću analizu odziva kod dinamičkih procesa. Opisan je princip rada instrumenata za mjerenje vibracija.

Nadalje, za slučaj periodske sile uzbude prikazana je mogućnost izražavanja iste u obliku reda svojih harmonijskih komponenti, te određivanje odziva kao superpozicije harmonijskih komponenti odziva. Opisana je harmonijska analiza izmjerenih periodskih vibracija (ne poznavajući njihov izvor, tj. periodsku silu uzbude), uvedeni su pojmovi harmonika vibriranja i frekvencijskog spektra.

Zatim su opisane vibracije uslijed djelovanja impulsne sile uzbude. Dane su osnovne značajke ovog tipa uzbude, te je istaknuta ovisnost načina vibriranja o odnosu između vremena trajanja impulsa i perioda vibrirajućeg sustava. Prikazan je približan postupak određivanja odziva u slučaju kratkotrajnog djelovanja impulsne sile.

Konačno je u Prvom dijelu razmotren slučaj vibracija uslijed neperiodske sile uzbude. Prikazan je postupak analize neperiodskih vibracija u vremenskom i frekvencijskom području. U prvom slučaju je neperiodska sila uzbude prikazana kao beskonačan niz diferencijalnih impulsa, te je vremenska funkcija određena integriranjem diferencijalnih impulsnih odziva. U drugom slučaju je primijenjen princip superpozicije sile uzbude kao i u slučaju periodske sile uzbude. Međutim, zbog neperiodičnosti sile uzbude (period je beskonačan) prelazi se od Fourierovog reda na Fourierov integral, iz čega proističe tzv. par Fourierove transformacije koji predstavlja osnovu tehnike poznate pod nazivom brza analiza Fourierove transformacije.

U **Drugom dijelu** knjige prikazana je analiza slobodnih i prisilnih harmonijskih vibracija sustava s dva stupnja slobode gibanja. Uvedeni su pojmovi (vlastite vrijednosti i

oblici) i metode proračuna (metode superpozicije prirodnih oblika vibriranja) koji se redovito koriste i kod analize vibracija kontinuiranih sustava. Posebna je važnost dana analizi vibracija fleksijskih sustava kao uvod u analizu vibracija grede. Kao alternativa primjene uvjeta dinamičke ravnoteže za postavljanje diferencijalnih jednadžbi gibanja sustava, prikazana je metoda postavljanja Lagrangeovih jednadžbi.

Treći dio knjige posvećen je približnom određivanju prve (osnovne) prirodne frekvencije sustava s mnogo stupnjeva slobode gibanja kao i kontinuiranih sustava. U tu svrhu je prikazana metoda Rayleighevog kvocijenta.

Čitava knjiga je koncipirana na način da je za svaku temu prvo razvijena i razrađena teorijska osnova, a nakon toga slijede pomno odabrani i teorijskoj osnovi prilagođeni riješeni numerički primjeri. Tu bih želio posebno istaknuti pomoć i suradnju mog višegodišnjeg suradnika gospodina Maria Šimunca, bivšeg studenta našeg Fakulteta i inženjera brodogradnje, koji je prilikom obrade rukopisa knjige na elektroničkom računalu pomno pročitao čitav tekst, a posebno numeričke primjere, te pravodobno upozorio na propuste i greške. Na kraju knjige se nalazi pregled literature koja je ili neposredno poslužila za pisanje iste ili se preporuča njenim korisnicima koji imaju želje da se intenzivnije uhvate u koštac s teorijom vibracija. Pošto smo već kod završnih riječi ovog uvoda, želio bih se ujedno zahvaliti i recenzentima knjige, gospodi prof. dr. sc. Ivi Senjanoviću, prof. dr. sc. Milenku Stegiću i prof. dr. sc. Željenu Lozini na mnogim korisnim upozorenjima i sugestijama koje su dovele tekst u spremnost za tiskanje.

Autor

Popis oznaka

PRVI DIO – Sustavi s jednim stupnjem slobode gibanja

c	- koeficijent prigušenja viskozno – prigušnog elementa, $\frac{Ns}{m}$
c_{kr}	- koeficijent kritičnog prigušenja, $\frac{Ns}{m}$
$F(t)$	- sila uzbude, N
F_0	- amplituda harmonijske sile uzbude, N
F_{an}, F_{bn}	- koeficijent periodske sile uzbude razvijene u Fourierov red, N
F_{PR}	- sila prenesena na podlogu, N
f	- frekvencija periodskih vibracija, Hz
$H(\lambda)$	- kompleksna frekvencijska funkcija odziva uslijed harmonijske sile uzbude
$H(\lambda_n)$	- kompleksna frekvencijska funkcija uslijed n-tog harmonika periodske sile uzbude
PR	- faktor prenosivosti vibracija
k	- krutost elastičnog elementa, $\frac{N}{m}$
m	- masa, kg
t	- vrijeme, s
t_1	- vrijeme djelovanja impulsne sile uzbude, s
$\tilde{t}$	- vrijeme vibriranja nakon prestanka djelovanja impulsne sile uzbude, s
T	- period harmonijskih vibracija, s
T_F	- period periodske sile uzbude, s
$x(t)$	- vibracijski pomak, m
$\dot{x}(t)$	- brzina vibracija, $\frac{m}{s}$
$\ddot{x}(t)$	- ubrzanje vibracija, $\frac{m}{s^2}$
$x(\tilde{t})$	- vibracijski pomak nakon prestanka djelovanja impulsne sile uzbude, m
X	- amplituda harmonijskih vibracija, m
$\bar{X}$	- kompleksna amplituda harmonijskih vibracija prikazanih u kompleksnom obliku
X_k	- amplituda k-tog harmonika periodskih vibracija
$\bar{z}(t)$	- fazor harmonijskih vibracija prikazanih u kompleksnoj ravnini, m
α	- faktor dinamičnosti kod djelovanja neposredne harmonijske sile uzbude
α_{cf}	- faktor dinamičnosti kod djelovanja centrifugalne uzbude
α_x	- faktor dinamičnosti apsolutnog gibanja kod djelovanja uzbude podloge
α_r	- faktor dinamičnosti relativnog gibanja kod djelovanja uzbude podloge

$\beta = \frac{\lambda}{\omega}$	- omjer frekvencije uzbude i prirodne frekvencije
δ	- logaritamski dekrement
ε	- kut faznog pomaka vibracijskog pomaka prema sili uzbude, rad
φ	- nulti fazni kut kod harmonijskih vibracija, rad
λ	- frekvencija harmonijske sile uzbude $\left(= \frac{2\pi}{T} \right)$, Hz
λ_1	- frekvencija periodske sile uzbude $\left(= \frac{2\pi}{T_F} \right)$, Hz
λ_n	- frekvencija n-tog harmonika periodske sile uzbude $(= n\lambda_1)$, Hz
ω	- kružna frekvencija harmonijskog gibanja, $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
ω_k	- kružna frekvencija k-tog harmonika periodskih vibracija, $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
ω_{pr}	- kružna frekvencija periodskih vibracija, $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$\psi(t)$	- fazni kut kod harmonijskih vibracija, rad
ξ	- bezdimenzijski koeficijent prigušenja

DRUGI DIO – Sustavi s dva stupnja slobode gibanja

$[\mathbf{D}]$	- dinamička matrica
k_1, k_2	- krutosti elastičnih elemenata vibracijskog sustava, $\frac{\text{N}}{\text{m}}$
$\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$	- poopćene krutosti, $\frac{\text{N}}{\text{m}}$
$[\mathbf{k}]$	- matrica krutosti
m_1, m_2	- mase vibracijskog sustava, kg
$\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$	- poopćene mase, kg
$[\mathbf{m}]$	- matrica masa
$P(\boldsymbol{\Omega})$	- frekvencijska jednadžba
$q_1(t), q_2(t)$	- poopćene koordinate, m
Q_1, Q_2	- amplitude poopćenih koordinata, m
$U(q_1, \dots, q_n)$	- kinetička energija vibracijskog sustava, Nm
$V(q_1, \dots, q_n)$	- potencijalna energija vibracijskog sustava, Nm
x_1, x_2	- mase vibracijskog sustava, m
$\ddot{x}_1, \ddot{x}_2$	- ubrzanja vibracijskog sustava, $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
X_1, X_2	- amplitude vibriranja vibracijskog sustava, m
α_{ij}	- utjecajni koeficijenti, $\frac{\text{m}}{\text{N}}$
$\{\Phi_1\}, \{\Phi_2\}$	- prirodni oblici vibriranja vibracijskog sustava
ω_1, ω_2	- prirodne kružne frekvencije vibracijskog sustava, $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
Ω_1, Ω_2	- prirodne vrijednosti vibracijskog sustava, $\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2$

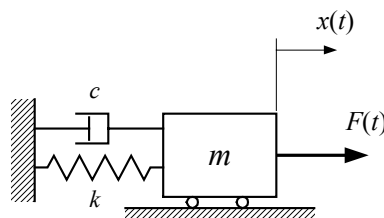
TREĆI DIO – Sustavi s s više stupnjeva slobode gibanja i kontinuirani sustavi

EA	- osna krutost štapa, N
EI	- krutost na savijanje grede, Nm^2
E_k	- kinetička energija, Nm
E_p	- potencijalna energija, Nm
GI_p	- krutost na uvijanje vratila, Nm^2
U	- ukupna energija konzervativnog vibracijskog sustava, Nm
W_i	- amplitude pretpostavljenog osnovnog oblika vibriranja kod fleksijskih vibracija, m
$\varphi(x)$	- funkcija pretpostavljenog osnovnog oblika vibriranja kod kontinuiranih sustava

PRVI DIO

1. Sustavi s jednim stupnjem slobode gibanja

Sustavi s jednim stupnjem slobode gibanja vrlo su pogodni, da se na jednostavan način prikažu i opišu vibracije uslijed najjednostavnijeg do najsloženijeg oblika opterećenja. Takav sustav shematski je prikazan na slici 1.1.



Slika 1.1. Sustav s jednim stupnjem slobode gibanja

Njegove osnovne sastavnice su masa m , elastični element krutosti k i viskozno – prigušni element s prigušenjem c . Masa je opterećena vremenski promjenjivom uzbudnom silom $F(t)$.

Jednadžba gibanja sustava na slici 1.1. glasi

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (1.1)$$

gdje su redom: $m\ddot{x}$ - inercijska sila, $c\dot{x}$ - sila prigušenja i kx – povratna (elastična sila).

1.1. Slobodne vibracije

U slučaju kada je u jednadžbi (1.1) sila $F(t) = 0$ govorimo o slobodnim vibracijama. Ovisno o tome da li je koeficijent prigušenja c jednak ili različit od nule, razlikujemo slobodne vibracije bez ili s prigušenjem.

1.1.1 Slobodne vibracije bez prigušenja

U slučaju slobodnih vibracija bez prigušenja jednadžba (1.1) glasi

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.2)$$

Definiranjem prirodne kružne frekvencije

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (1.3)$$

jednadžba (1.2) poprima oblik

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1.4)$$

Jednadžba (1.4) je linearna diferencijalna jednadžba 2. reda sa sljedećim općim rješenjem

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

odnosno

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi), \quad X = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{B}{A} \quad (1.5)$$

gdje su A i B konstante integracije, koje se određuju iz zadanih uvjeta $x(0)$ i $\dot{x}(0)$. Stoga rješenje (1.5) poprima konačan oblik

$$x(t) = \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin \omega t + x(0) \cos \omega t \quad (1.6)$$

Funkcija (1.6) opisuje harmonijske vibracije sustava na slici 1.1 s prirodnom frekvencijom i učinkom koji je induciran s početnim uvjetima. U realnim vibracijskim sustavima s prigušenjem, gibanje (1.6) je **prolaznog karaktera**, jer će prigušenje prouzročiti njegovo isčezavanje. Stoga se vibracije opisane funkcijom (1.6) često nazivaju **prolazne vibracije**.

1.1.2. Harmonijsko gibanje i njegove osnovne značajke

Osnovni način opisa harmonijskog gibanja u vremenskom području glasi

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi) = X \sin \psi(t) \quad (1.7)$$

U izrazu (1.7) X je amplituda, $\psi(t)$ – fazni kut kao linearna funkcija vremena, φ – nulti fazni kut (za $t = 0$) i ω – kružna frekvencija.

Nakon isteka vremena T i njegovih višekratnika nT gibanje se ponavlja,

$$x(t + nT) = x(t) \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

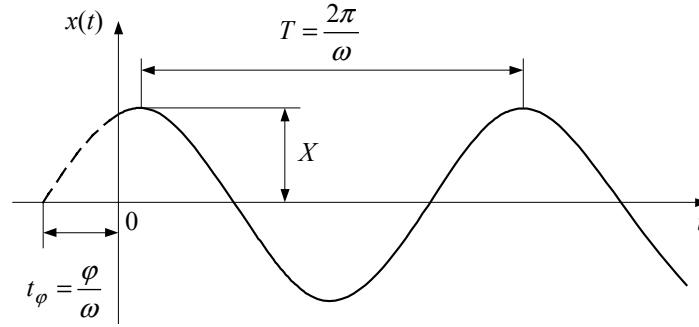
Vrijeme T naziva se period harmonijskog gibanja i ono je povezano s frekvencijom ω na način

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Recipročna vrijednost perioda T naziva se frekvencija f harmonijskog gibanja,

$$f = \frac{1}{T}$$

Na slici 1.2 prikazano je harmonijsko gibanje $x(t)$ s navedenim značajkama.



Slika 1.2. Prikaz harmonijskog gibanja u vremenskom području

Osim u obliku izraza (1.7) postoji i drugi način opisa harmonijskih gibanja u vremenskom području koji glasi

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (1.8)$$

Između parametara u izrazima (1.7) i (1.8) postoji sljedeća veza

$$X = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{C_1}{C_2}$$

Harmonijsko gibanje se može, osim u realnom obliku (1.7) ili (1.8), prikazati i u kompleksnom obliku. Pritom je funkcija $x(t)$ imaginarni dio fazora $\bar{z}(t)$ koji rotira kutnom brzinom ω u kompleksnoj ravnini,

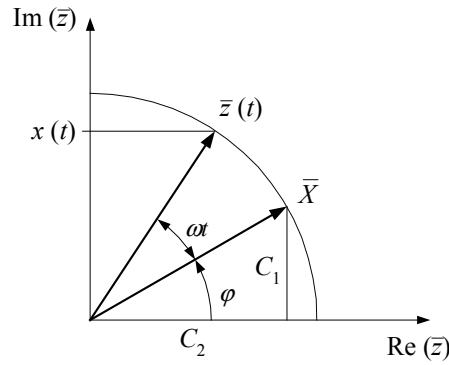
$$\bar{z}(t) = X \cdot e^{i(\omega t + \varphi)} = X [\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)] = \bar{X} \cdot e^{i\omega t} \quad (1.9)$$

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im}(\bar{z}(t)) \quad (1.10)$$

Veličina $\bar{X}$ naziva se kompleksnom amplitudom

$$\bar{X} = X \cdot e^{i\varphi}, \quad |\bar{X}| = X, \quad \text{za } t = 0 \quad \bar{X} = \bar{z}(0)$$

Fazor $\bar{z}(t)$ sa svojim značajkama prikazan je na slici 1.3.



Slika 1.3. Harmonijsko gibanje u kompleksnom obliku

Superpozicija dviju harmonijskih gibanja različitih amplituda i nultih faznih pomaka, ali iste frekvencije daje kao rezultantu opet harmonijsko gibanje iste frekvencije kao i harmonijske komponente. Dakle,

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi) = X_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + X_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

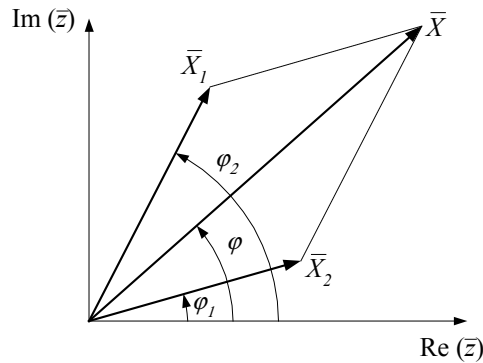
Pritom vrijedi

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ \varphi &= \arctg \frac{X_1 \sin \varphi_1 + X_2 \sin \varphi_2}{X_1 \cos \varphi_1 + X_2 \cos \varphi_2} \end{aligned} \quad (1.11)$$

U kompleksnom obliku ta superpozicija ima sljedeći izgled

$$\bar{z} = (\bar{X}_1 + \bar{X}_2)e^{i\omega t} = \bar{X}e^{i\omega t}$$

i prikazana je na slici 1.4.



Slika 1.4. Superpozicija dvaju harmonijskih gibanja iste frekvencije

U slučaju kada je $\varphi_1 = \varphi_2$, tada se komponente vibracija nazivaju sinkronim vibracijama, a amplituda njihove rezultante iznosi $X = X_1 + X_2$.

1.1.3. Slobodne vibracije s prigušenjem

U slučaju slobodnih vibracija s prigušenjem razmatrati će se samo viskozno prigušenje, gdje je viskozna sila prigušenja razmjerna brzini,

$$F = c\dot{x} \quad c - \text{koeficijent prigušenja}$$

te stoga jednačba (1.1) poprima oblik

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1.12)$$

Rješenje ove homogene diferencijalne jednačbe u općem obliku glasi

$$x = e^{-\xi\omega t} \left(Ae^{i\sqrt{1-\xi^2}\omega t} + Be^{-i\sqrt{1-\xi^2}\omega t} \right) \quad (1.13)$$

Veličina ξ naziva se bezdimenzijski koeficijent prigušenja i predstavlja omjer stvarnog i kritičnog prigušenja

$$\xi = \frac{c}{c_{kr}} \quad (1.14)$$

gdje je koeficijent kritičnog prigušenja

$$c_{kr} = 2\sqrt{km} = 2m\omega \quad (1.15)$$

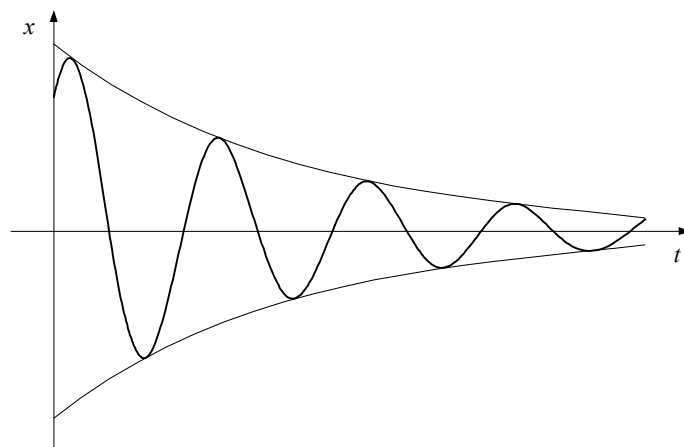
Način gibanja opisan jednačbom (1.13) ovisi o iznosu veličine ξ . Tu se razlikuju tri slučaja.

1) Vibracije s podkritičnim prigušenjem ($\xi < 1$)

Rješenje jednačbe (1.12) glasi

$$x = e^{-\xi\omega_0 t} \left(C_1 \sin\sqrt{1-\xi^2}\omega t + C_2 \cos\sqrt{1-\xi^2}\omega t \right) \quad (1.16)$$

i ono opisuje vibracije s podkritičnim prigušenjem prema slici 1.5.



Slika 1.5. Vibracije s podkritičnim prigušenjem

Usporedbom rješenja (1.16) i (1.5) (za neprigušene vibracije) uočljiva je **kružna frekvencija prigušenih vibracija** u obliku

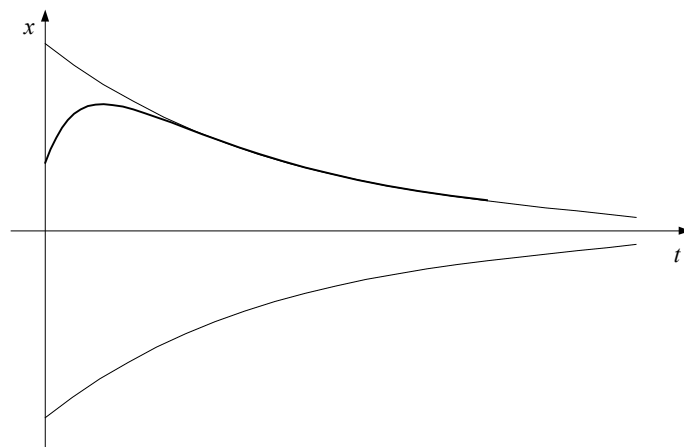
$$\omega_{pr} = \omega \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (1.17)$$

2) Vibracije s nadkritičnim prigušenjem ($\zeta > 1$)

Rješenje jednadžbe (1.12) sada glasi

$$x = Ae^{\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega t} + Be^{\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega t} \quad (1.18)$$

Ovo gibanje je grafički prikazano na slici 1.6. i ono nema oscilatorni karakter.



Slika 1.6. Vibracije s nadkritičnim prigušenjem

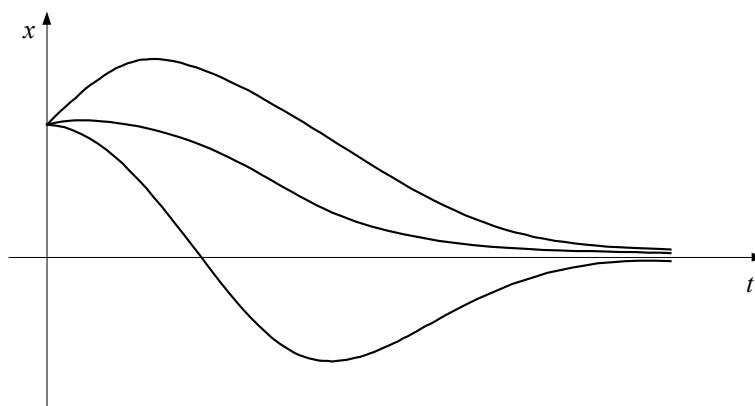
3) Vibracije s kritičnim prigušenjem ($\xi = 1$)

Rješenje jednadžbe (1.12) glasi

$$x = C_1 e^{-\omega t} + C_2 t e^{-\omega t} \quad (1.19)$$

i ono je definirano iznosom konstanti C_1 i C_2 koje ovise o početnim uvjetima $x(0)$ i $\dot{x}(0)$.

Na slici 1.7 prikazana su tri oblika odziva s istim početnim pomakom $x(0)$ i s različitim vrijednostima početne brzine $\dot{x}(0)$.



Slika 1.7. Vibracije s kritičnim prigušenjem

Prikladan način ocjene prigušenja u nekom sustavu je intenzitet smanjenja slobodnih vibracija. Što je jače prigušenje, to će intenzitet smanjenja vibriranja biti veći. U tu svrhu uvodi se pojam **logaritamski dekrement**, koji se definira kao prirodni logaritam omjera dviju uzastopnih amplituda, kako slijedi

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (1.20)$$

1.1.4 Primjeri**PRIMJER 1.1**

Zadane su harmonijske vibracije s amplitudom vibriranja X i periodom T . Odrediti amplitudu brzine i ubrzanja vibracija.

Zadano: $X = 0,002 \text{ m}$, $T = 0,15 \text{ s}$

Vremenska funkcija harmonijskih vibracija glasi

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi)$$

U tom slučaju su brzina i ubrzanje

$$\dot{x}(t) = X\omega \cos(\omega t + \varphi) = \dot{X} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = -X\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

Amplituda brzine vibracija,

$$\dot{X} = X\omega = X \frac{2\pi}{T} = 0,084 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Amplituda ubrzanja vibracija,

$$\ddot{X} = X\omega^2 = X \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = 3,51 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

PRIMJER 1.2

Mjerenjem je ustanovljeno da neka konstrukcija vibrira harmonijski s frekvencijom f i s maksimalnim ubrzanjem $\ddot{X}$. Odrediti amplitudu vibriranja.

Zadano: $f = 82 \text{ Hz}$, $\ddot{X} = 50 \text{ g}$, $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Obzirom da je

$$\ddot{X} = X\omega^2 = X \cdot (2\pi f)^2$$

proizlazi da je amplituda vibriranja

$$X = \frac{\ddot{X}}{(2\pi f)^2} = 0,0018 \text{ m}$$

PRIMJER 1.3

Harmonijske vibracije imaju frekvenciju f i amplitudu brzine $\dot{X}$. Odrediti amplitudu i period vibriranja te amplitudu ubrzanja.

Zadano: $f = 10 \text{ Hz}$, $\dot{X} = 4,57 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Obzirom da je

$$\dot{X} = X\omega = X \cdot 2\pi f$$

proizlazi da je amplituda vibriranja

$$X = \frac{\dot{X}}{2\pi f} = 0,073 \text{ m}$$

a period vibriranja

$$T = \frac{1}{f} = 0,1 \text{ s}$$

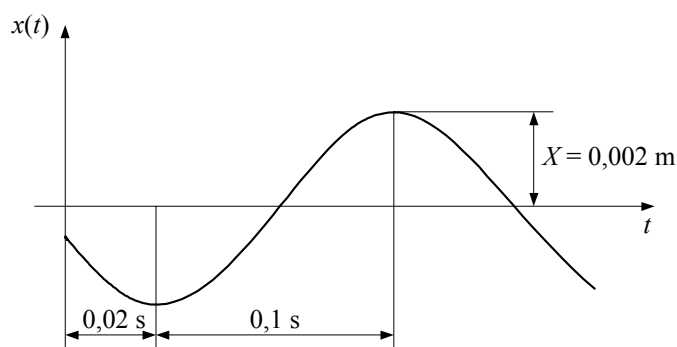
Amplituda ubrzanja vibracija glasi

$$\ddot{X} = X \cdot (2\pi f)^2 = 287 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

PRIMJER 1.4

Na slici 1.8 prikazane su harmonijske vibracije u vremenskom području. Odrediti:

- amplitudu, nulti fazni pomak vibriranja i kružnu frekvenciju vibriranja iz formule (1.1)
- konstante C_1 i C_2 iz formule (1.8)
- sliku vibriranja u kompleksnoj ravnini



Slika 1.8. Primjer 1.4

- a) Iz slike je vidljivo da je
- amplituda vibriranja $X = 0,002 \text{ m}$
 - period vibriranja $T = 2 \cdot 0,1 = 0,2 \text{ s}$
 - nulti vremenski fazni pomak $t_\varphi = \frac{3}{4}T - 0,02 = 0,13 \text{ s}$

Iz toga slijedi da je

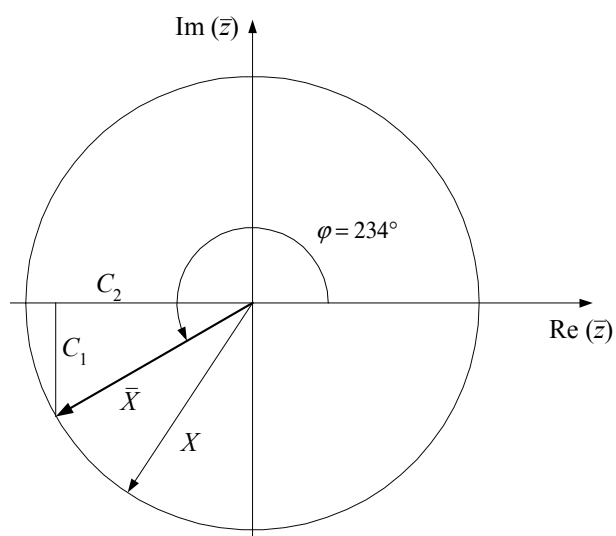
- kružna frekvencija $\omega = \frac{2\pi}{T} = 31,42 \text{ s}^{-1}$
- nulti fazni kut $\varphi = t_\varphi \cdot \omega = 4,08 \text{ rad} = 234^\circ$

- b) Konstante C_1 i C_2 iznose

$$C_1 = X \sin \varphi = -0,0016 \text{ m}$$

$$C_2 = X \cos \varphi = -0,0012 \text{ m}$$

- c) Prikaz vibracija iz slike 1.5 u kompleksnoj ravnini dan je na slici 1.9.

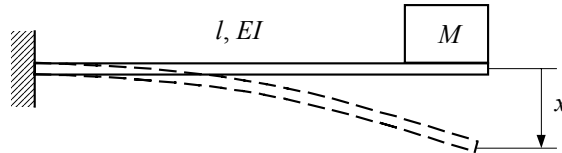


Slika 1.9. Primjer 1.4

PRIMJER 1.5

Odrediti prirodnu frekvenciju sustava s masom M na kraju konzole, krutosti na savijanje EI i zanemarive mase, prema slici 1.10.

Zadano: M, l, EI



Slika 1.10. Primjer 1.5

Sustav na slici 1.10 može se zamijeniti ekvivalentnim sustavom opisanim jednadžbom (1.2), s time, da je potrebno odrediti krutost k sustava. Ona se određuje na osnovi izraza za progib w na kraju konzole uslijed djelovanja sile F na istom mjestu:

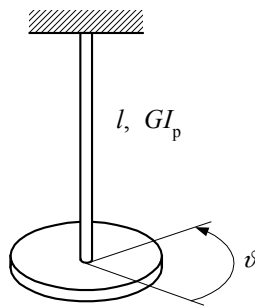
$$w = \frac{Fl^3}{3EI} = \frac{F}{k} \quad \text{što daje} \quad k = \frac{3EI}{l^3}$$

$$\text{Prirodna frekvencija glasi: } f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI}{Ml^3}}$$

PRIMJER 1.6

Disk polarnog momenta inercije mase J ovješten je na čeličnom vratilu promjera d poprečnog presjeka i duljine l prema slici 1.11. Ako se disku narine početni kutni pomak i pusti da slobodno oscilira, isti učini 15 oscilacija u vremenu 30 s. Odrediti promjer vratila.

Zadano: $J = 1 \text{ kgm}^2, l = 1 \text{ m}, G = 0,8 \cdot 10^8 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$



Slika 1.11. Primjer 1.6

Primjenom uvjeta dinamičke ravnoteže proizlazi momentna jednačba

$$J\ddot{\vartheta} + k\vartheta = 0$$

Ova jednačba je analogna jednačbi (1.2), tako da se za prirodnu frekvenciju može pisati

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{J}}$$

što daje izraz za krutost k ,

$$k = J(2\pi f)^2$$

gdje je

$$f = \frac{15}{30} = 0,5 \text{ Hz}$$

Krutost na uvijanje na kraju vratila glasi

$$k = \frac{GI_p}{l}$$

gdje je $I_p = \frac{d^4 \pi}{32}$ polarni moment tromosti kružnog presjeka vratila.

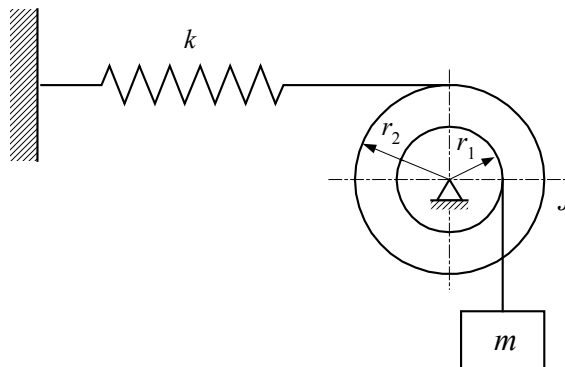
Izjednačavanjem gornja dva izraza za k slijedi formula za promjer vratila

$$d = \sqrt[4]{\frac{128\pi J f^2}{G}} = 0,0059 \text{ m}$$

PRIMJER 1.7

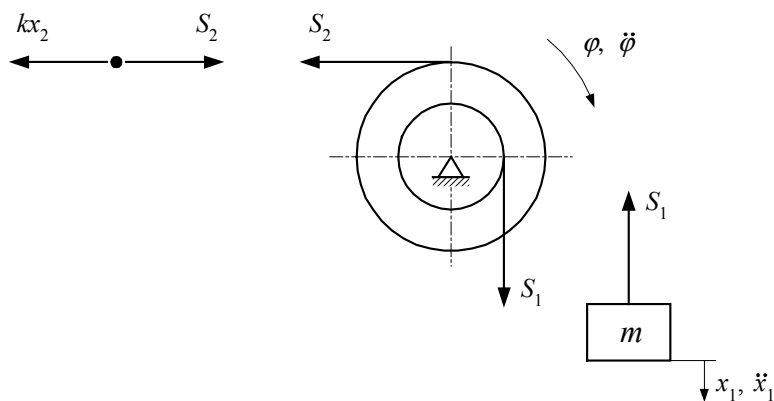
Teret mase m visi na nepomičnoj koloturi momenta inercije mase J obzirom na os rotacije, koja je posredstvom opruge krutosti k vezana za zid prema slici 1.12. Odrediti prirodnu frekvenciju prikazanog sustava.

Zadano: r_1 , r_2 , k , m , J



Slika 1.12. Primjer 1.7

Ako se sustavu dade pomak x_1 prema slici 1.13, tada se primjenom uvjeta dinamičke ravnoteže može odrediti potrebna diferencijalna jednadžba gibanja.



Slika 1.13. Primjer 1.7

Teret:	$-S_1 = m\ddot{x}_1$
Kolotura:	$S_1 r_1 - S_2 r_2 = J\ddot{\varphi}$
Opruga:	$S_2 = kx_2$
Kinematski odnosi:	$x_1 = r_1 \varphi, \quad \ddot{x}_1 = r_1 \ddot{\varphi}, \quad x_2 = r_2 \varphi$

Objedinjavanjem gornjih jednadžbi i kinematskih odnosa slijedi

$$(J + mr_1^2)\ddot{\varphi} + kr_2^2 \varphi = 0$$

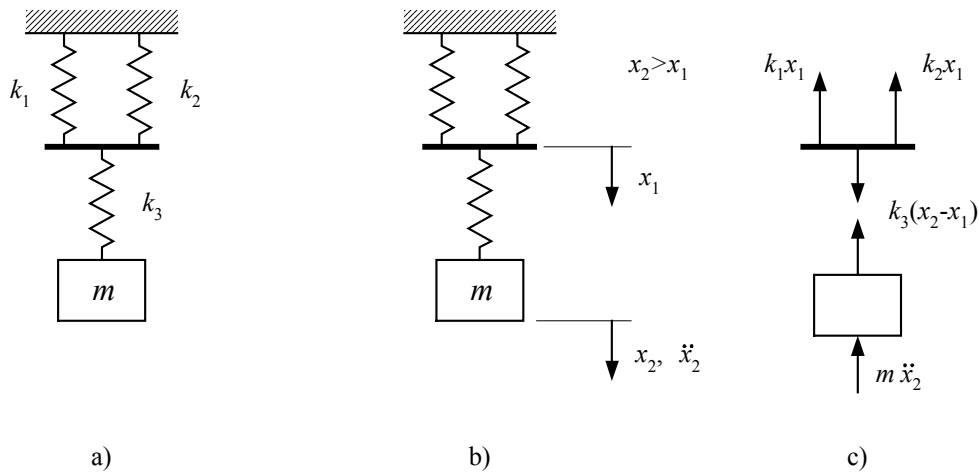
te je prirodna frekvencija sustava

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kr_2^2}{J + mr_1^2}}$$

PRIMJER 1.8

Za vibrirajući sustav prema slici 1.14a odrediti njegovu ekvivalentnu krutost.

Zadano: k_1 , k_2 , k_3



Slika 1.14. Primjer 1.8

Ekvivalentna krutost zadanog sustava može se odrediti, ako se postavi diferencijalna jednačba gibanja u obliku (1.4). U tu svrhu se sustavu dađu pomaci x_1 i x_2 prema slici 1.14b, te se prema slici 1.14c postave odgovarajuće jednačbe dinamičke ravnoteže sila

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_2 + k_3(x_2 - x_1) &= 0 \\ k_3(x_2 - x_1) &= (k_1 + k_2)x_1 \end{aligned}$$

Odatle slijedi,

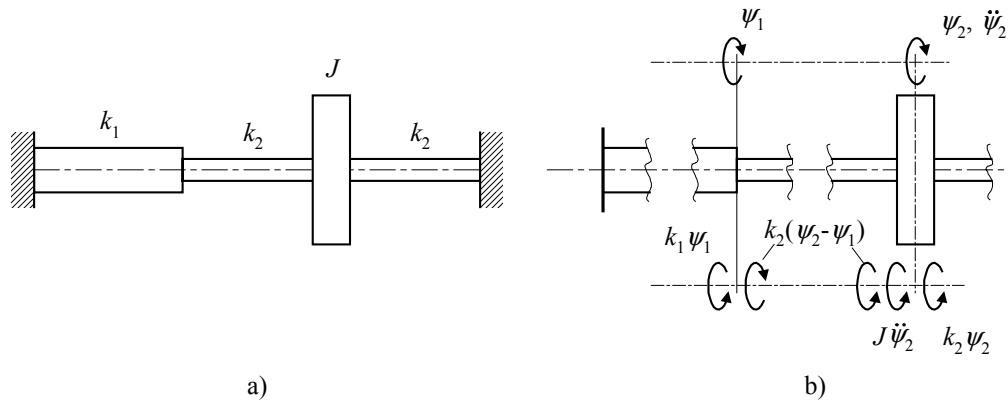
$$m\ddot{x}_2 + \frac{(k_1 + k_2)k_3}{k_1 + k_2 + k_3}x_2 = 0$$

te ekvivalentna krutost sustava iznosi $k_{ekv} = \frac{(k_1 + k_2)k_3}{k_1 + k_2 + k_3}$

PRIMJER 1.9

Odrediti ekvivalentnu krutost torzijskih vibracija osovinog voda prema slici 1.15a, te izračunati njegovu prirodnu kružnu frekvenciju.

Zadano: k_1 , k_2 , J (moment inercije mase zamašnjaka obzirom na os rotacije)



Slika 1.15. Primjer 1.9

Zadani problem se rješava postavljanjem diferencijalne jednadžbe torzijskih vibracija. Prema slici 1.15b proizlazi

$$\begin{aligned} J\ddot{\psi}_2 + k_2\psi_2 + k_2(\psi_2 - \psi_1) &= 0 \\ k_2(\psi_2 - \psi_1) - k_1\psi_1 &= 0 \end{aligned}$$

što daje

$$\psi_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \psi_2$$

te diferencijalna jednadžba glasi

$$J\ddot{\psi}_2 + \frac{2k_1k_2 + k_2^2}{k_1 + k_2} \psi_2 = 0$$

Ekvivalentna krutost,

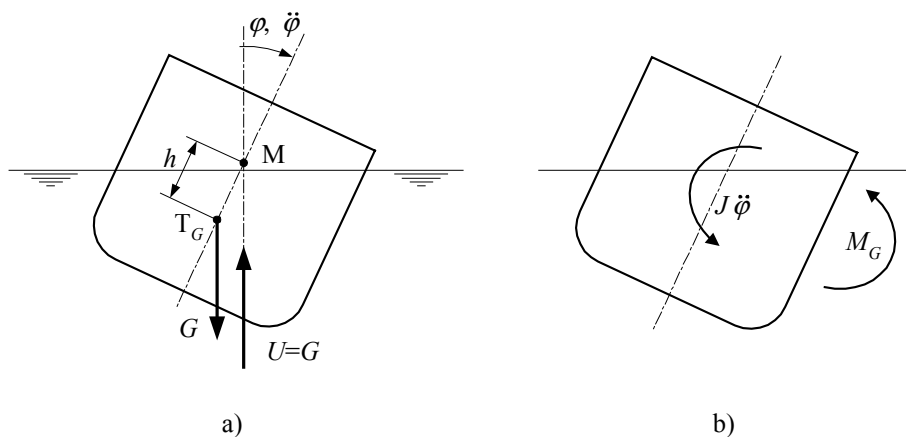
$$k_{ef} = \frac{(2k_1 + k_2)k_2}{k_1 + k_2}$$

Prirodna kružna frekvencija,

$$\omega = \sqrt{\frac{(2k_1 + k_2)k_2}{J(k_1 + k_2)}}$$

PRIMJER 1.10

Odrediti period T njihanja broda, ako je poznata njegova metacentarska visina h , težina broda G i moment inercije J mase broda s obzirom na os njihanja prema slici 1.16a.



Slika 1.16. Primjer 1.10

Vibracijske značajke njihanja broda ovise o položaju metacentra M u odnosu na težište mase broda T_G . Metacentar M leži u sjecištu pravca djelovanja uzgona U i osi simetrije broda. Njegov položaj je određen udaljenošću h od težišta mase broda, koja se naziva metacentarska visina, vidi sliku 1.16a.

Nagibanjem broda za kut φ , uzgon U i težina broda G stvaraju povratni moment M_G prema slici 1.16b. Diferencijalna jednadžba njihanja broda glasi

$$J\ddot{\varphi} + M_G = 0$$

gdje je

$$M_G = Gh \sin \varphi$$

Za male vrijednosti φ vrijedi $\sin \varphi \approx \varphi$, te se dobiva

$$J\ddot{\varphi} + Gh\varphi = 0$$

Prirodna frekvencija njihanja,

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Gh}{J}}$$

Period njihanja,

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Gh}}$$

PRIMJER 1.11

Za vibrirajući sustav mase m , krutosti k i viskoznog prigušenja c odrediti logaritamski dekrement i omjer dviju uzastopnih amplituda.

Zadano: $m = 5 \text{ kg}$, $k = 6000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $c = 24 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$

Prirodna frekvencija neprigušenih vibracija sustava iznosi

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{6000}{5}} = 34,64 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Koeficijent kritičnog prigušenja prema izrazu (1.15) iznosi

$$c_{kr} = 2m\omega = 2 \cdot 5 \cdot 34,64 = 346,4 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$$

Bezdimenzijski faktor prigušenja prema izrazu (1.14) iznosi

$$\xi = \frac{c}{c_{kr}} = \frac{24}{346,4} = 0,069$$

Logaritamski dekrement prema izrazu (1.20) iznosi

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi \cdot 0,069}{\sqrt{1-0,069^2}} = 0,435$$

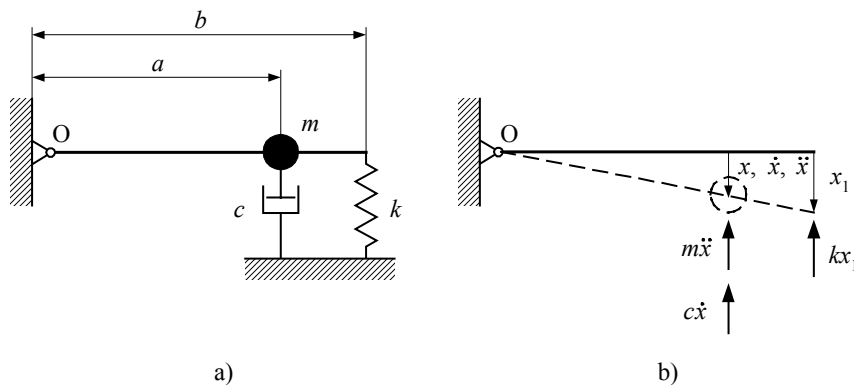
Omjer bilo kojih dviju uzastopnih amplituda iznosi

$$\frac{x_1}{x_2} = e^\delta = e^{0,435} = 1,545$$

PRIMJER 1.12

Za vibrirajući sustav prikazan na slici 1.17a odrediti frekvenciju prigušenih vibracija i koeficijent kritičnog prigušenja. Pretpostaviti krutu gredu zanemarive mase.

Zadano: a , b , m , k , c



Slika 1.17. Primjer 1.12

Ako se sustavu dadu pomaci x i x_1 prema slici 1.17b, tada se potrebna diferencijalna jednačba gibanja dobiva iz uvjeta dinamičke ravnoteže s obzirom na zglob O ,

$$m\ddot{x}a + c\dot{x}a + kx_1b = 0$$

gdje je

$$x_1 = \frac{b}{a}x$$

Prirodna frekvencija neprigušenih oscilacija slijedi iz jednačbe

$$\ddot{x} + \frac{b^2}{a^2} \frac{k}{m} x = 0, \quad \omega = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Koeficijent kritičnog prigušenja c_{kr} slijedi iz izraza (1.15)

$$c_{kr} = 2m\omega = 2\frac{b}{a}\sqrt{km}$$

Bezdimenzijski faktor prigušenja ξ prema izrazu (1.14) glasi

$$\xi = \frac{c}{c_{kr}} = \frac{ca}{2b\sqrt{km}}$$

Frekvencija prigušenih vibracija ω_{pr} prema izrazu (1.17) proizlazi

$$\omega_{pr} = \omega\sqrt{1-\xi^2} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1-\frac{c^2a^2}{4b^2km}}$$

$$\omega_{pr} = \sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

1.2. Prisilne vibracije – harmonijska sila uzbude

Prisilne vibracije nastupaju uslijed djelovanja vremenski promjenjive sile uzbude $F(t)$ i za sustav s jednim stupnjem slobode gibanja na slici 1.1 opisane su jednačbom 1.1. Odziv sustava se razlikuje ovisno o vremenskom karakteru sile $F(t)$. Ovdje će biti analizirane vibracije uslijed harmonijske, periodske, impulsne i neperiodske sile uzbude.

Harmonijska se uzbuda često susreće u inženjerskoj praksi, a najčešće potječe od neuravnoteženih rotirajućih masa, bilo da se radi o rotirajućim dijelovima strojeva, brodskom vijku ili slično. Može se iskazati u obliku neposredne sile uzbude, centrifugalne sile uzbude i dinamičkog pomaka podloge.

1.2.1. Neposredna sila uzbude

U općem obliku neposredna sila uzbude ima sljedeći oblik

$$F(t) = F_0 \cos \lambda t$$

gdje je F_0 – amplituda sile uzbude, a λ – frekvencija uzbude.
Jednostavnosti radi, najprije će se razmotriti neprigušeni sustav na slici 1.1.

a) Neprigušeni sustav ($c = 0$)

U tom slučaju jednadžba (1.1) poprima oblik

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \lambda t \quad (1.21)$$

Rješenje jednadžbe (1.21) sastoji se iz homogenog i partikularnog dijela. Homogeno rješenje jednako je odzivu slobodnih vibracija predstavljeno izrazom (1.6) te glasi

$$x_H(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

dok je partikularno rješenje definirano oblikom uzbudne sile, tj. može se pretpostaviti harmonijskim i u fazi sa silom $F(t)$,

$$x_p(t) = X \cos \lambda t$$

gdje je X amplituda koju treba odrediti.

Ako se $x_p(t)$ uvrsti u jednadžbu (1.21) dobiva se

$$X = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2}$$

gdje je $\beta = \frac{\lambda}{\omega}$

Opće rješenje jednadžbe (1.21) glasi

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \cos \lambda t$$

Za slučaj da je sustav započeo vibrirati iz stanja mirovanja ($t = 0, x = 0, \dot{x} = 0$), slijedi da je

$$A = 0, \quad B = -\frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2}$$

te se dobiva

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} (\cos \lambda t - \cos \omega t) \quad (1.22)$$

Odziv $x(t)$ sadrži nekoliko značajnih sastavnica kao što su:

- $\frac{F_0}{k} = x_{st}$ - statički pomak koji bi nastao pod djelovanjem amplitude sile F_0
- $\frac{1}{1-\beta^2} = \alpha$ - faktor dinamičnosti, koji daje učinak dinamičkog pojačanja harmonijske uzbudne sile,
- $\cos \lambda t$ - komponenta odziva s frekvencijom uzbude, tj. **stacionaran** odziv neposredno ovisan o uzbudi,
- $\cos \omega t$ - komponenta odziva s prirodnom frekvencijom sustava koji vibrira, tj. **prolazni** odziv uslijed učinka slobodnih vibracija induciranog s početnim uvjetima.

b) Sustav s prigušenjem ($c = 0$)

U ovom slučaju barate se s jednačinom

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \lambda t \quad (1.23)$$

Analogno neprigušenom sustavu i ovdje je ukupni odziv $x(t)$ zbroj prolaznog i stacionarnog dijela. Obzirom na ranije opisani učinak prigušenja na prolazni odziv, ovdje će se dalje razmatrati **samo stacionarni odziv**. U tom slučaju partikularno rješenje jednačine (1.23) zbog prigušenja, jer općenito odziv sustava s prigušenjem nije u fazi s uzbudom, ima dva člana, tj.

$$x(t) = x_p(t) = A \sin \lambda t + B \cos \lambda t$$

Ako se ovaj izraz uvrsti u jednačinu (1.23), te uvođenjem

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad c_{kr} = 2m\omega, \quad \xi = \frac{c}{c_{kr}}, \quad \beta = \frac{\lambda}{\omega}, \quad \frac{c\lambda}{k} = 2\xi\beta$$

slijedi

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \left[2\xi\beta \sin \lambda t + (1-\beta^2) \cos \lambda t \right] \quad (1.24)$$

odnosno

$$x = X \cos(\lambda t - \varepsilon) \quad (1.25)$$

gdje je

X – amplituda odziva,

$$X = \frac{F_0}{k} \alpha \quad (1.26)$$

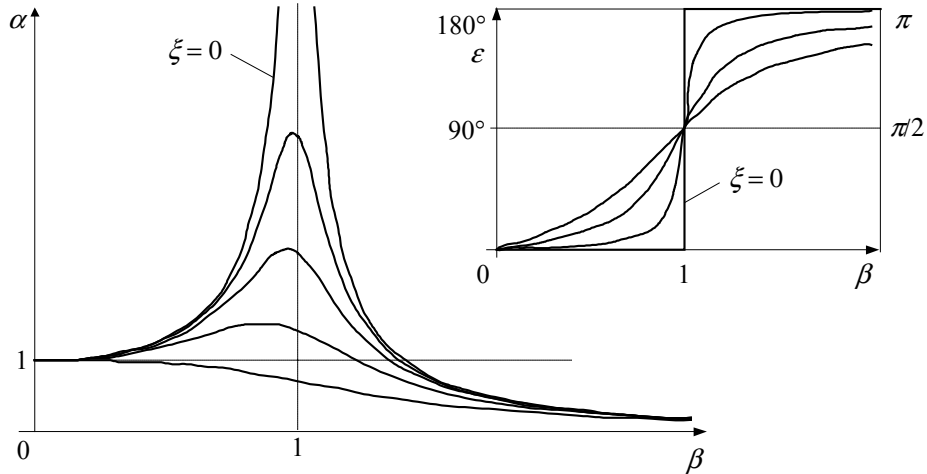
α – koeficijent dinamičnosti,

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (1.27)$$

ε – kut faznog pomaka odziva prema uzbuđi,

$$\varepsilon = \arctg \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2} \quad (1.28)$$

Veličine α i ε kao funkcije od β i ξ prikazane su na slici 1.18.



Slika 1.18. Veličine α i ε kod neposredne uzbuđne sile

Pojedine krivulje pokazuju veliki utjecaj faktora prigušenja na amplitudu i kut faznog pomaka u području frekvencija blizu $\beta = 1$. Slučaj kada je $\beta = 1$, tj. kada se frekvencija uzbuđe i prirodna frekvencija podudaraju ($\lambda = \omega$), naziva se **rezonancijom**.

Za kasniju analizu odziva uslijed periodske uzbuđe prikladno je prikazati odziv u slučaju ako je harmonijska uzbuđa dana u eksponencijalnom obliku,

$$F(t) = F_0 e^{i\lambda t}$$

Ako se ovaj izraz uvrsti u jednadžbu (1.23), stacionarni odziv poprima sljedeći oblik

$$x(t) = H(\lambda) F_0 e^{i\lambda t} = H(\lambda) F(t) \quad (1.29)$$

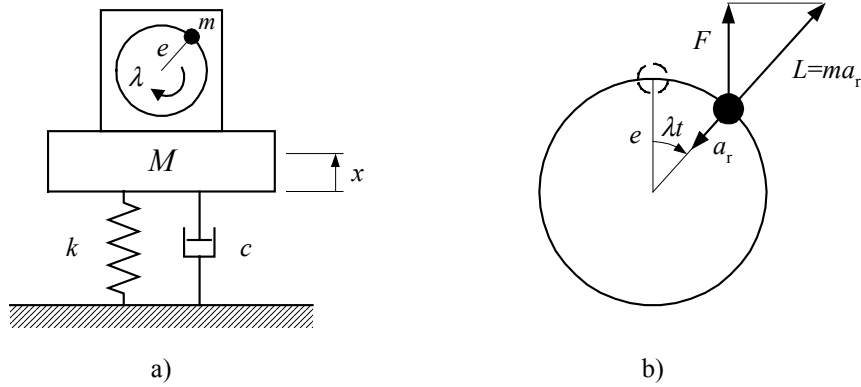
Funkcija $H(\lambda)$ naziva se **kompleksna frekvencijska funkcija odziva** i glasi

$$H(\lambda) = \frac{1}{k(1 - \beta^2 + i2\xi\beta)} \quad (1.30)$$

O njoj će još biti govora kasnije.

1.2.2. Centrifugalna uzbuda

Neuravnoteženost masa rotacijskih strojeva je čest izvor uzbude vibracija. Na slici 1.19a prikazan je vibracijski sustav s jednim stupnjem slobode gibanja, koji je pobuđen na vibriranje neuravnoteženom masom m ekscentriciteta e , koja rotira kutnom brzinom λ .



Slika 1.19. Centrifugalna uzbuda

Uzbudna sila je izvedena iz centrifugalne (inercijske) sile L , slika 1.19b, kako slijedi

$$L = ma_r = me\lambda^2$$

$$F = L \cos \lambda t = (me\lambda^2) \cos \lambda t$$

Odgovarajuća diferencijalna jednačba gibanja sustava glasi

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = (me\lambda^2) \cos \lambda t \quad (1.31)$$

Ova jednačba je po obliku identična jednačbi (1.23). Stoga se njeno partikularno rješenje može pisati u obliku

$$x = X \cos(\lambda t - \varepsilon)$$

Pritom je:

Amplituda vibriranja,

$$X = X_{st} \alpha_{cf}$$

$$X_{st} = \frac{m}{M} e$$

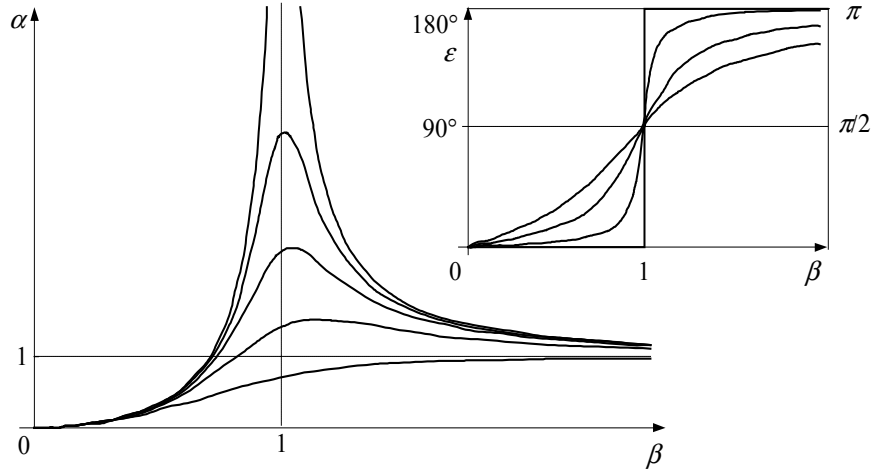
Koeficijent dinamičnosti,

$$\alpha_{cf} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (1.32)$$

Kut faznog pomaka,

$$\varepsilon = \arctg \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \quad (1.33)$$

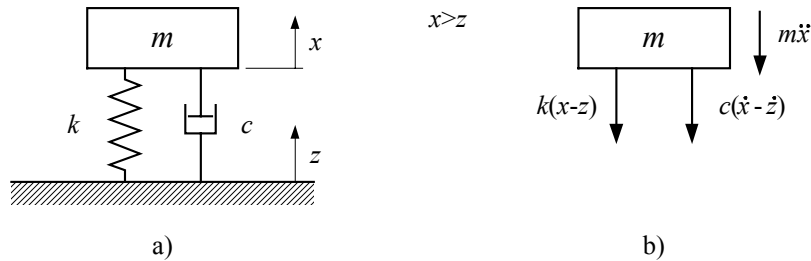
Veličine α_{cf} i ε prikazane su u frekvencijskom području na slici 1.20.



Slika 1.20. Veličine α_{cf} i ε kod centrifugalne uzbude

1.2.3. Uzbuda podloge

U mnogim slučajevima je dinamički sustav pobuđen na vibriranje gibanjem podloge, kao što je to prikazano na slici 1.21a.



Slika 1.21. Uzbuda podloge

Gibanje podloge je harmonijsko s kružnom frekvencijom λ , tj. $z = Z \cos \lambda t$, dok kod mase m razlikujemo apsolutno gibanje $x(t)$ obzirom na nepomični referentni sustav i relativno gibanje $r(t) = x(t) - z(t)$ obzirom na vibrirajuću podlogu.

Diferencijalna jednadžba gibanja ovakvog sustava proizlazi iz uvjeta dinamičke ravnoteže sila prema slici 1.21b, kako slijedi

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{z}) + k(x - z) = 0 \quad (1.34)$$

a) Apsolutno gibanje

Ako se u jednadžbi (1.34) prebace članovi s lijeve na desnu stranu, proizlazi

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kz + c\dot{z}$$

Ova jednadžba se može riješiti uvođenjem izraza za harmonijsko gibanje u kompleksnom obliku

$$\bar{x} = Xe^{i\lambda t} \quad \bar{z} = Ze^{i\lambda t}$$

te ista glasi

$$-\beta^2 \bar{x} + i2\xi\beta \bar{x} + \bar{x} = \bar{z} + i2\xi\beta \bar{z}$$

Rješenje ove jednadžbe ima oblik

$$\bar{x} = \frac{1 + i2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + i2\xi\beta} \bar{z}$$

U brojniku i nazivniku nalaze se kompleksni brojevi, koji se mogu prikazati u eksponencijalnom obliku,

$$\bar{x} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} Ze^{i(\lambda t + \vartheta - \varepsilon)}$$

Apsolutno gibanje u realnom obliku,

$$x = X \cos(\lambda t + \vartheta - \varepsilon)$$

Amplituda vibriranja,

$$X = Z\alpha_x$$

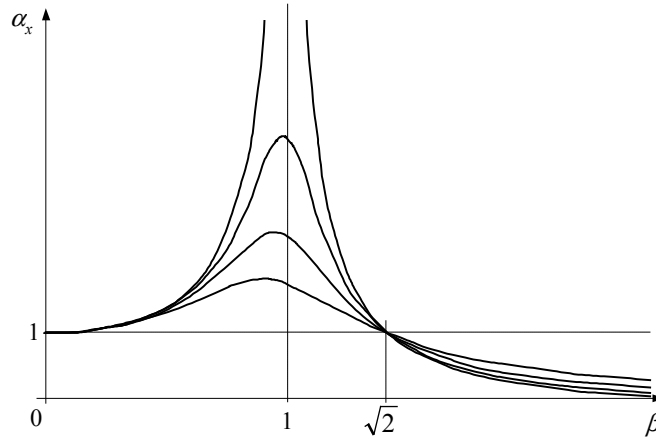
Koeficijent dinamičnosti,

$$\alpha_x = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (1.35)$$

Kut faznog pomaka,

$$\varphi = \varepsilon - \vartheta \quad \vartheta = \arctg 2\xi\beta \quad \varepsilon = \arctg \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2} \quad (1.36)$$

Veličina α_x prikazana je dijagramom na slici 1.22. Uočljivo je, da je $\alpha_x = 1$ za $\beta = \sqrt{2}$ bez obzira na veličinu prigušenja.

Slika 1.22. Veličine α_x i φ apsolutnog gibanja kod uzbude podloge

b) Relativno gibanje

Relativno gibanje glasi

$$r = x - z = Z\alpha_x \cos(\lambda t + \vartheta - \varepsilon) - Z \cos \lambda t$$

U kompleksnom obliku

$$r = Z(\alpha_x e^{i(\lambda t + \vartheta - \varepsilon)} - e^{i\lambda t}) = Z(\alpha_x e^{i\vartheta} - e^{i\varepsilon}) \cdot e^{i(\lambda t - \varepsilon)}$$

Realno rješenje,

$$r = Z(\alpha_x \cos \vartheta - \cos \varepsilon) \cos(\lambda t - \varepsilon)$$

Obzirom da je

$$\cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}} \quad \cos \varepsilon = \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

i koristeći za α_x izraz (1.35) tada proizlazi da zakon relativnog gibanja glasi

$$r = R \cos(\lambda t - \varepsilon)$$

Amplituda vibriranja,

$$R = Z\alpha_r$$

Koeficijent dinamičnosti,

$$\alpha_r = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (1.37)$$

Za veličine α_r i ε mogu se koristiti dijagrami ovih veličina za centrifugalnu uzbudu koji su prikazani na slici 1.20.

1.2.4. Prenosivost vibracija

Uzbudne sile inducirane radom strojeva ili uređaja često je nemoguće izbjeći, ali se njihovo djelovanje može smanjiti ugradnjom odgovarajućih elastičnih elemenata, tzv. izolatora.

Naime, u općem slučaju se djelovanje uzbudne sile $F \cos \lambda t$ prenosi s vibrirajuće mase na podlogu preko elastičnog elementa i prigušivača. Obzirom da su ove dvije sile međusobno pomaknute u fazi za 90° , amplituda sile prenesene na podlogu je njihova rezultanta

$$F_{PR} = \sqrt{(kX)^2 + (c\lambda X)^2} = kX \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$$

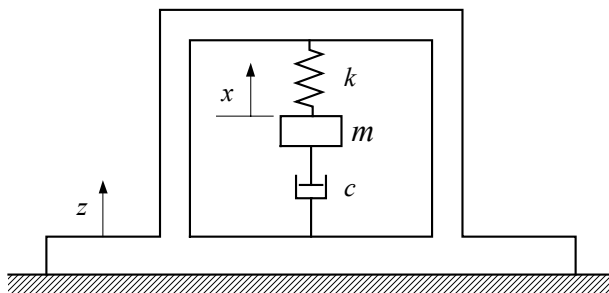
Ako se za amplitudu vibriranja X koristi izraz (1.26), tada se dobiva omjer

$$PR = \frac{F_{PR}}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (1.38)$$

Veličina **PR** naziva se **faktor prenosivosti** i identična je izrazu (1.35) za koeficijent dinamičnosti apsolutnog gibanja. Stoga se veličina **PR** također može prikazati kao funkcija od β prema dijagramu na slici 1.22. Ovaj dijagram pokazuje da je $PR < 1$ samo za slučaj $\beta > \sqrt{2}$. Drugim riječima, sila prenesena na podlogu će biti manja od uzbudne sile (uspješna izolacija) jedino u slučaju kada je $\beta > \sqrt{2}$. U tom području sustavi s manje prigušenja daju bolju izolaciju (manja vrijednost **PR**) od jače prigušenih sustava.

1.2.5. Princip rada instrumenata za mjerenje vibracija

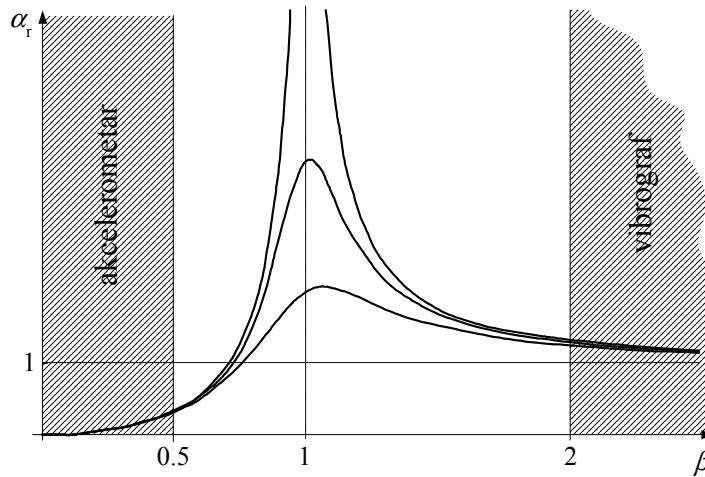
Instrument za mjerenje vibracija se u osnovi sastoji od seizmičke jedinice prikazane na slici 1.23.



Slika 1.23. Instrument za mjerenje vibracija

Pričvršćen je za podlogu koja je u stvarnosti vibrirajuće tijelo (stroj, konstrukcija) čije se vibracije žele izmjeriti. Mjerena konstrukcija vibrira frekvencijom λ i ima pomak z , a instrument ima prirodnu frekvenciju ω i apsolutni pomak x . Mjerenje se provodi u vanrezonancijskom području gdje je omjer $\beta = \frac{\lambda}{\omega}$ bitno različit od 1.

U tom području je utjecaj prigušenja zanemariv, dakle $\xi = 0$, stoga je prisustvo prigušnog elementa na slici 1.23 uvjetno. Instrumentom se mjere relativne vibracije $r = x - z$ vlastite mase u odnosu na vibracije mjerene konstrukcije. Ovisno o odnosu prirodne frekvencije instrumenta ω prema frekvenciji mjerene konstrukcije λ , razlikujemo dvije vrste instrumenata : **vibrograf i akcelerometar**, vidi sliku 1.24.



Slika 1.24. Područje rada mjernih instrumenata

a) Vibrograf

Ovaj instrument mjeri **amplitudu vibriranja** promatrane konstrukcije. Prema slici 1.24 treba biti ispunjen uvjet $\beta > 2$. Uz zanemarivo prigušenje ($\xi \approx 0$), relativni koeficijent dinamičnosti α_r poprima sljedeći oblik

$$\alpha_r = \frac{1}{\frac{1}{\beta^2} - 1}$$

Pritom je član $\frac{1}{\beta^2}$ u nazivniku zanemariv (zbog $\beta \gg 1$), te proizlazi da je $\alpha_r \approx 1$. U tom slučaju se izraz za amplitudu relativnog gibanja svodi na

$$R \approx Z$$

Dakle, instrumentom registrirani pomak R je ustvari amplituda vibriranja Z promatrane konstrukcije uz pogrešku $\frac{1}{\beta^2}$.

b) Akcelerometar

Ovaj instrument mjeri **akceleraciju vibriranja** mjerene konstrukcije. Prema slici 1.24 mora biti ispunjen uvjet $\beta < \frac{1}{2}$. Uz zanemarivo prigušenje ($\xi \approx 0$) izraz za amplitudu relativnog gibanja poprima oblik

$$R = \frac{\beta^2 Z}{1 - \beta^2}$$

odnosno,

$$Z = \frac{(1 - \beta^2) R \omega}{\lambda}$$

Ako su vibracije promatrane konstrukcije harmonijske, tada vrijedi $\ddot{Z} = -\lambda^2 Z$, što daje

$$\ddot{Z} = -\omega(1 - \beta^2) R$$

Obzirom da je član β^2 zanemariv ($\beta \ll 1$), dobiva se

$$\ddot{Z} = -\omega^2 R$$

Dakle, instrumentom registriran pomak **R** pomnožen s kvadratom prirodne frekvencije instrumenta ω je ustvari amplituda akceleracije vibriranja promatrane konstrukcije uz pogrešku β^2 .

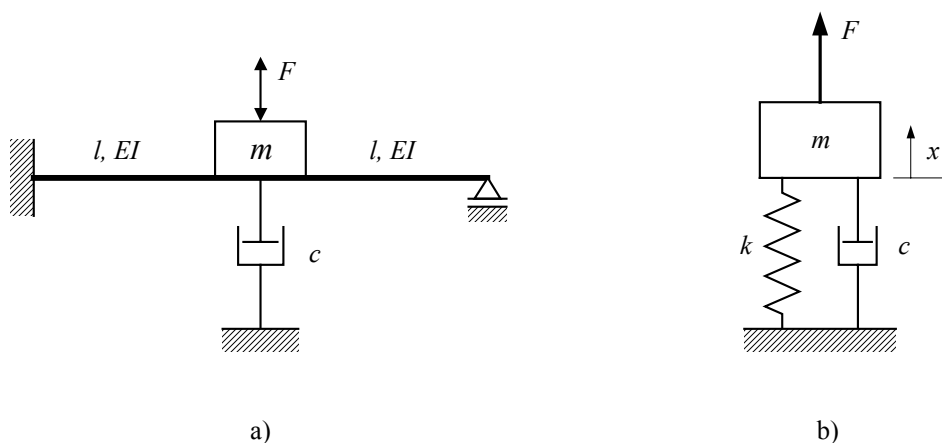
1.2.6. Primjeri**PRIMJER 1.13**

Stroj mase **m** pričvršćen na nosaču krutosti **EI** i zanemarive mase, proizvodi uzbudnu silu $F = F_0 \cos \lambda t$. U svrhu prigušenja vibracija ugrađen je viskozni prigušivač koeficijenta prigušivanja **c** prema slici 1.25a.

Odrediti:

- krivulju koeficijenta dinamičnosti $\alpha(\beta)$ i kuta faznog pomaka $\varepsilon(\beta)$ za slučaj bez i s prigušenjem
- amplitudu vibriranja stroja i kut faznog pomaka za slučaj najvećeg koeficijenta dinamičnosti α kao i za slučaj rezonancije ($\beta = 1$),
- frekvenciju λ uzbudne sile za slučaj vibriranja pod b)

Zadano: $G = 5 \text{ kN}$ (težina stroja), $l = 4 \text{ m}$, $EI = 118 \text{ kNm}^2$, $F_0 = 0,5 \text{ kN}$, $c = 1,43 \frac{\text{kNs}}{\text{m}}$



Slika 1.25. Primjer 1.13

Zadani sustav se može zamijeniti ekvivalentnim sustavom s jednim stupnjem slobode prema slici 1.25b. U tom slučaju koeficijent dinamičnosti α i kut faznog pomaka ε prema izrazima (1.27) i (1.28) glase

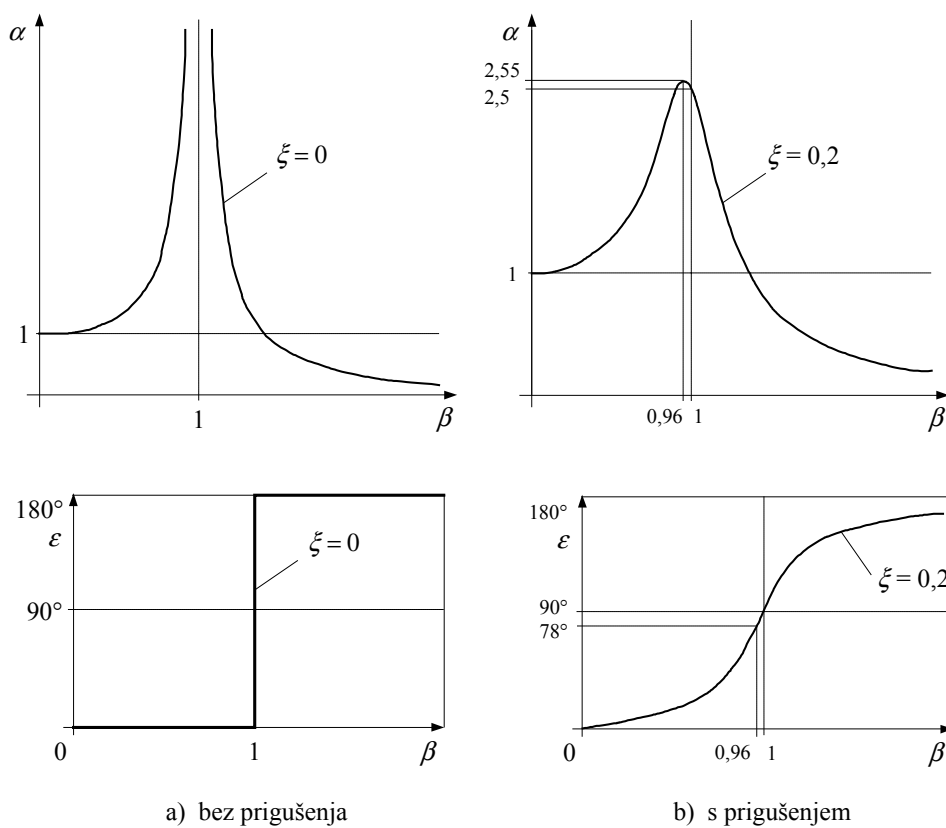
S prigušenjem ($\xi \neq 0$)

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad \varepsilon = \arctg \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}$$

Bez prigušenja ($\xi = 0$)

$$\alpha = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad \begin{aligned} \varepsilon &= 0^\circ && (\text{za } \beta < 1) \\ \varepsilon &= \text{neodređeno} && (\text{za } \beta = 1) \\ \varepsilon &= 180^\circ && (\text{za } \beta > 1) \end{aligned}$$

Za oba slučaja α i ε su prikazani dijagramima na slici 1.26.



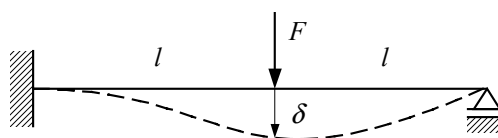
Slika 1.26. Primjer 1.13

Osnovne značajke ekvivalentnog sustava na slici 1.25b su kako slijedi:

Krutost k ,

$$k = \frac{F}{\delta}, \quad \delta = \frac{7Fl^3}{96EI}$$

$$k = \frac{96EI}{7l^3} = 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$



Prigušenje ξ ,

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} = 0,2$$

Prirodna frekvencija ω ,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Najveći koeficijent dinamičnosti $\alpha_{\max}$ određuje se iz uvjeta minimalnog nazivnika u izrazu za α ,

$$f(\beta) = (1 - \beta^2)^2 + 4\xi^2 \beta^2$$

$$\frac{df}{d\beta} = 0 \quad \text{što daje} \quad \beta_{\max} = \sqrt{1 - 2\xi^2} = 0,96$$

$$\alpha_{\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - 2\xi^2}} = 2,55$$

Amplituda vibriranja za $\alpha_{\max}$,

$$X_{\max} = X_{st} \alpha_{\max} = \frac{F_0}{k} \alpha_{\max} = 0,051 \text{ m}$$

Kut faznog pomaka za $\beta_{\max}$,

$$\varepsilon_{\max} = \arctg \frac{2\xi\beta_{\max}}{1 - \beta_{\max}^2} = \arctg \frac{1}{\xi} \sqrt{1 - 2\xi^2} = 78,2^\circ$$

Koeficijent dinamičnosti α u rezonanciji ($\beta = 1$),

$$a_{\text{rez}} = \frac{1}{2\xi} = 2,5$$

Amplituda vibriranja u rezonanciji,

$$X_{\text{rez}} = X_{st} a_{\text{rez}} = 0,05 \text{ m}$$

Kut faznog pomaka u rezonanciji,

$$\varepsilon = 90^\circ$$

Uočljivo je da se u slučaju neposredne uzbudne sile najveća vrijednost koeficijenta dinamičnosti nalazi nešto lijevo od rezonantnog pravca $\beta = 1$, vidi sliku 1.26b. Ova ekscentričnost se povećava s povećanjem prigušenja (veći ξ).

U stvarnosti su ova odstupanja zanemarivo mala, te se u praksi, jednostavnosti radi, operira s **rezonantnim vrijednostima**.

Frekvencija uzbude za $X_{\max}$,

$$\beta_{\max} = \frac{\lambda_{\max}}{\omega} \quad \lambda_{\max} = \omega \beta_{\max} = 6,7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Za usporedbu

$$\lambda_{\text{rez}} = \omega = 7,0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

PRIMJER 1.14

Teret određene mase, ovješ na opruzi krutosti k , vibrira u mediju s viskoznom prigušenjem. Kod slobodnog vibriranja tereta izmjeren je period vibriranja T i omjer vrijednosti dviju uzasopnih amplituda vibriranja $\frac{X_1}{X_2}$. Odrediti amplitudu i kut faznog pomaka vibriranja tereta za slučaj neposrednog djelovanja uzbudne sile $F = F_0 \cos \lambda t$.

$$\text{Zadano: } k = 525 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad T = 1,8 \text{ s}, \quad \frac{X_1}{X_2} = 4, \quad F_0 = 2 \text{ N}, \quad \lambda = 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Prije svega, za zadani sustav treba odrediti neke osnovne značajke vibriranja :

Prirodna frekvencija ω ,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 3,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Koeficijent prigušenja ξ ,

Koristimo se izrazom (1.20) za logaritamski dekrement

$$\delta = \ln \frac{X_1}{X_2} = 1,39 = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Odatle slijedi

$$\xi = \delta \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}} = 0,22$$

Omjer frekvencija β ,

$$\beta = \frac{\lambda}{\omega} = 0,86 \quad \text{podrezonancijsko područje}$$

Koeficijent dinamičnosti α ,

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = 2,17$$

Amplituda vibriranja X (prema izrazu (1.26)),

$$X = \frac{F_0\alpha}{k} = 0,0083 \text{ m}$$

Kut faznog pomaka ε (prema izrazu (1.24)),

$$\varepsilon = \arctg \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} = \arctg 1,45 = 55,5^\circ$$

PRIMJER 1.15

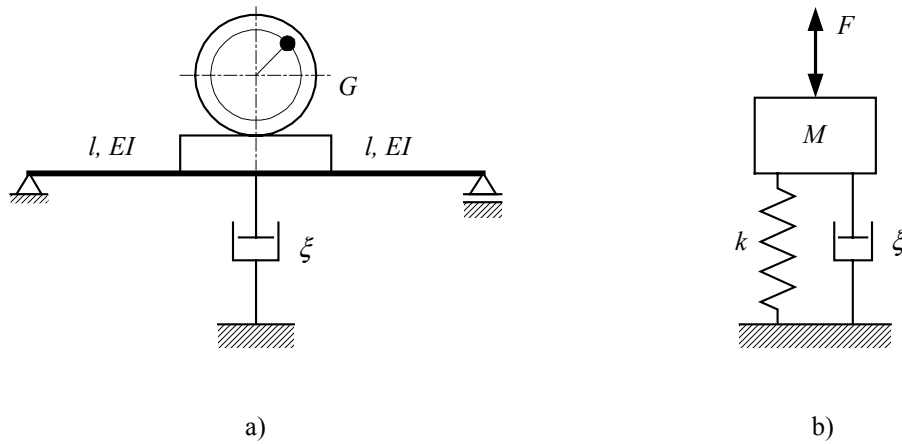
Ventilator težine G postavljen je na zglobno oslonjenoj elastičnoj gredi krutosti EI bez težine. U svrhu prigušivanja vibracija ugrađen je viskozni prigušivač koeficijenta prigušivanja ξ prema slici 1.27a.

Definirati krivulju koeficijenta dinamičnosti $\alpha(\beta)$ sa svim karakterističnim točkama, te odrediti amplitudu i kut faznog pomaka vibriranja ventilatora za zadanu uzbuđu.

Zadano: $G = 1,5 \text{ kN}$, $n = 1440 \frac{\text{0}}{\text{min}}$ (broj okretaja ventilatora),

$l = 4,5 \text{ m}$, $e = 0,1 \frac{G}{k}$ (ekscentricitet rotirajuće mase),

$m = \frac{1}{10} M$ (rotirajuća masa), $\xi = 0,1$, $EI = 3614 \text{ kNm}^2$



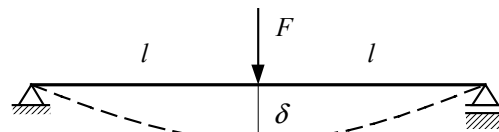
Slika 1.27. Primjer 1.15

Zadani sustav na slici 1.27a može se zamijeniti ekvivalentnim sustavom na slici 1.27b.

Osnovne značajke tog sustava jesu:

Krutost k ,

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{6EI}{l^3} = 238 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$



Prirodna frekvencija ω ,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 125 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Frekvencija uzbude λ ,

$$\lambda = \frac{n\pi}{30} = 151 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Omjer frekvencija β ,

$$\beta = \frac{\lambda}{\omega} = 1,22 \quad \text{nadrezonantno područje}$$

Sada se mogu odrediti karakteristične točke na krivulji $\alpha(\beta)$. To su radna točka ($\beta=1,22$), rezonantna točka ($\beta=1$) i točka maksimuma ($\beta_{\max}$). Krivulja $\alpha(\beta)$ matematički je opisana izrazom (1.32),

$$\alpha = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right)^2 + \left(2\frac{\xi}{\beta}\right)^2}}$$

Radna točka ($\beta=1,22$),

$$\alpha_{\text{rad}} = 2,75$$

Rezonantna točka ($\beta=1$),

$$\alpha_{\text{rez}} = \frac{1}{2\xi} = 5$$

Točka maksimuma definirana je s odgovarajućom vrijednosti $\beta_{\max}$ koja se dobiva iz uvjeta minimalnog nazivnika u izrazu za α ,

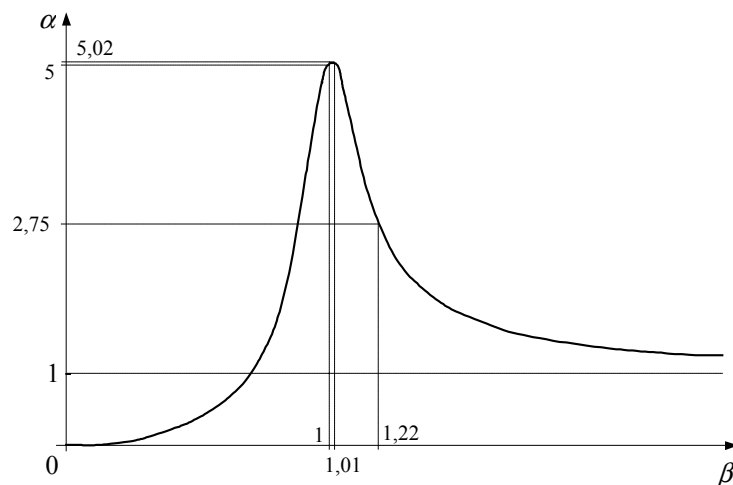
$$f(\beta) = \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right)^2 + \left(2\frac{\xi}{\beta}\right)^2$$

$$\frac{df}{d\beta} = 0 \rightarrow \beta_{\max} = \sqrt{\frac{1}{1-2\xi^2}} = 1,01$$

Točka maksimuma ($\beta=1,01$),

$$a_{\max} = 5,02$$

Krivulja $\alpha(\beta)$ s karakterističnim točkama prikazana je na slici 1.28.



Slika 1.28. Primjer 1.15

Amplituda vibriranja za zadanu uzбудu ($\alpha = 2,75$) prema izrazu (1.32),

$$X = \frac{me\alpha}{M} = 0,02 \text{ mm}$$

Kut faznog pomaka ventilatora u odnosu na uzбудu ($\beta = 1,22$) prema izrazu (1.33),

$$\varepsilon = \arctg \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2} = 137,5^\circ$$

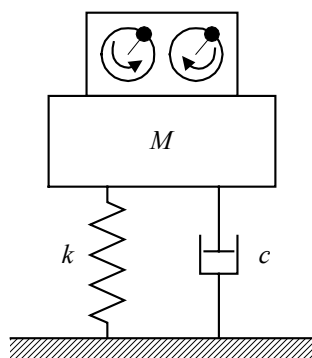
PRIMJER 1.16

U svrhu određivanja vibracijskih značajki konstrukcije mase M , na istu je pričvršćen uzbudivač vibracija s dvije suprotno rotirajuće mase prema slici 1.29. Ustanovljeno je, da su kod broja okretaja n_1 uzbudivača njegove ekscentrične mase u gornjem vršnom položaju u trenutku kada konstrukcija prolazi kroz položaj statičke ravnoteže i da je kod tog broja okretaja amplituda vibriranja X_1 .

Ako je zadan moment ekscentričnosti $m \cdot e$ za pojedinu masu uzbudivača, odrediti sljedeće:

- prirodnu frekvenciju konstrukcije ω
- koeficijent prigušenja ξ
- amplitudu vibriranja X_2 i kut faznog pomaka ε_2 kod broja okretaja n_2 uzbudivača

Zadano: $M = 181,4 \text{ kg}$, $n_1 = 900 \frac{\text{0}}{\text{min}}$, $X_1 = 21,6 \text{ mm}$, $m \cdot e = 0,0921 \text{ kgm}$, $n_2 = 1200 \frac{\text{0}}{\text{min}}$



Slika 1.29. Primjer 1.16

Obzirom da je kod broja okretaja n_1 uzbudna sila najveća (gornji vršni položaj), a pomak vibrirajuće konstrukcije jednak nuli (statički ravnotežni položaj), ove dvije veličine imaju pomak u fazi za kut od 90° . Pogledom na sliku 1.18 proizlazi, da $\varepsilon = 90^\circ$ odgovara rezonanciji, tj. $\beta_1 = 1$. To znači, da je u tom trenutku $\omega = \lambda_1$. Stoga, **prirodna frekvencija** konstrukcije glasi

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{n_1 \pi}{30 \cdot 2\pi} = 15 \text{ Hz}$$

U slučaju rezonancije ($\beta = 1$) izraz (1.32) za amplitudu vibriranja poprima oblik

$$X = \frac{X_{st}}{2\xi}$$

Odatle proizlazi koeficijent prigušenja ξ

$$\xi = \frac{X_{st}}{2X_1} = \frac{m \cdot e}{2MX_1} = 0,0118$$

Poznavajući sada osnovne značajke vibracijske konstrukcije, moguće je primjenom izraza (1.32) i (1.33) odrediti tražene značajke vibriranja i za broj okretaja n_2 uzbudivača. Slijedi

Omjer frekvencija β_2 ,

$$\beta_2 = \frac{n_2}{n_1} = 1,33$$

Amplituda vibriranja X_2 ,

$$X_2 = X_{st} \frac{\beta_2^2}{\sqrt{(1 - \beta_2^2)^2 + (2\xi\beta_2)^2}} = 1,49 \text{ mm}$$

Kut faznog pomaka ε_2 ,

$$\varepsilon_2 = \arctg \frac{2\xi\beta_2}{1 - \beta_2^2} = 177,7^\circ$$

PRIMJER 1.17

Homogeni disk težine G učvršćen je na čeličnoj osovine bez težine promjera d i duljine $2l$ na sredini njenog raspona između ležajeva. Odrediti najnižu kritičnu brzinu osovine. Pretpostaviti, da je osovina slobodno oslonjena u ležajevima.

Zadano: $l = 0,61 \text{ m}$, $d = 0,032 \text{ m}$, $G = 45 \text{ N}$, $E = 2,1 \cdot 10^8 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$

Pod **najnižom kritičnom brzinom osovine** se podrazumijeva njena kutna brzina rotacije koja odgovara najnižoj prirodnoj frekvenciji fleksionih vibracija osovine,

$$\omega_{kr} = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

U gornjem izrazu masa m predstavljena je masom diska,

$$m = \frac{G}{g} = 4,5 \text{ kg}$$

a krutost k je određena progibom osovine u sredini (vidi Primjer 1.15),

$$k = \frac{6EI}{l^3} = \frac{6Ed^4\pi}{64l^3} = 267,96 \text{ Nm}$$

Prema tome, najniža kritična brzina osovine glasi

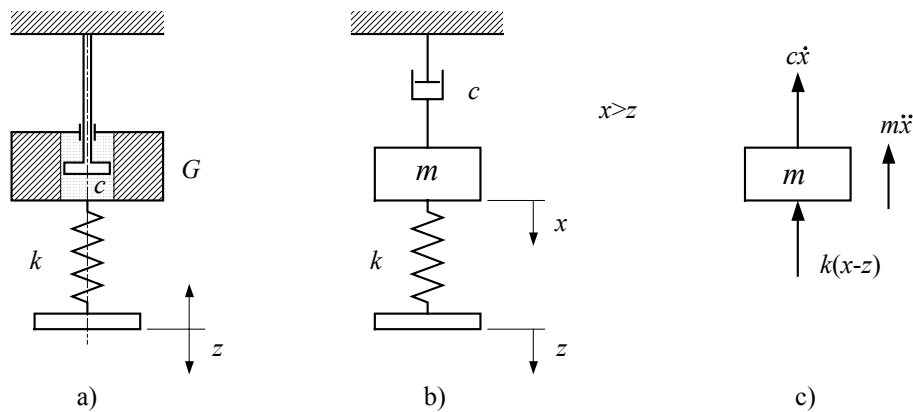
$$n_{kr} = \omega \frac{30}{\pi} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{30}{\pi} = 759 \frac{\text{o}}{\text{min}}$$

PRIMJER 1.18

Cilindar težine G vezan je preko opruge krutosti k za pomičnu podlogu koja vrši harmonijsko gibanje $z = Z \cos \lambda t$ prema slici 1.30a. U cilindru se može gibati klip koji je vezan za nepomičnu podlogu. Između klipa i stijenke cilindra javlja se viskozno prigušenje. Odrediti:

- zakon apsolutnog i relativnog gibanja cilindra, $x(t)$ i $r(t)$, i pripadne fazne pomake u odnosu na vibriranje pomične podloge
- koeficijent prigušenja c u cilindru kod amplitude apsolutnog vibriranja X

Zadano: $G = 100 \text{ N}$, $k = 1000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $Z = 0,022 \text{ m}$, $\lambda = 15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $X = 0,015 \text{ m}$



Slika 1.30. Primjer 1.18

Vibrirajući sustav na slici 1.30a može se zamijeniti ekvivalentnim sustavom na slici 1.30b. Postavljanjem uvjeta dinamičke ravnoteže sila prema slici 1.30c,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(x - z) = 0$$

dobiva se odgovarajuća jednadžba gibanja

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kz$$

Rješenje gornje jednadžbe jest ujedno i **zakon apsolutnog gibanja cilindra**. Obzirom da je ova jednadžba po obliku jednaka jednadžbi (1.23), rješenje glasi

$$x = X \cos(\lambda t - \varepsilon)$$

Amplituda vibriranja X ,

$$X = Z\alpha_x$$

Koeficijent dinamičnosti α_x ,

$$\alpha_x = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

Kut faznog pomaka ε_x ,

$$\varepsilon_x = \arctg \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

Za α_x i ε_x mogu se koristiti dijagrami na slici 1.18 za slučaj neposredne uzbudne sile.

Zakon relativnog gibanja dobiva se iz izraza

$$r = x - z = \alpha_x Z \cos(\lambda t - \varepsilon_x) - Z \cos \lambda t$$

U kompleksnom obliku

$$\bar{r} = Z(\alpha_x e^{i(\lambda t - \varepsilon_x)} - e^{i\lambda t}) = Z e^{i(\lambda t - \varepsilon_x)} (\alpha_x - e^{i\varepsilon_x})$$

Iz kompleksnog oblika može se izdvojiti realna komponenta

$$r = Z \cos(\lambda t - \varepsilon_x) (\alpha_x - \cos \varepsilon_x)$$

Obzirom da je $\cos \varepsilon_x = \alpha_x (1 - \beta^2)$, dobiva se

$$r = R \cos(\lambda t - \varepsilon_x)$$

Amplituda vibriranja R ,

$$R = Z \alpha_r$$

Koeficijent dinamičnosti α_r ,

$$\alpha_r = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

Kut faznog pomaka ε_r ,

$$\varepsilon_r = \arctg \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

Napomena:

u slučaju kada se vibracije podloge prenose na vibrirajuću masu putem elastičnog elementa (opruga), tada su kutevi faznog pomaka apsolutnog i relativnog gibanja te mase identični, s time da se uzbuđa podloge kod apsolutnog gibanja iskazuje kao neposredno djelujuća uzbudna sila, a kod relativnog gibanja kao centrifugalna uzbuđa.

Faktor prigušenja ξ može se izraziti preko amplitude X ,

$$\xi = \frac{\sqrt{\frac{Z}{X} - (1-\beta^2)^2}}{2\beta}$$

Prirodna frekvencija cilindra ω ,

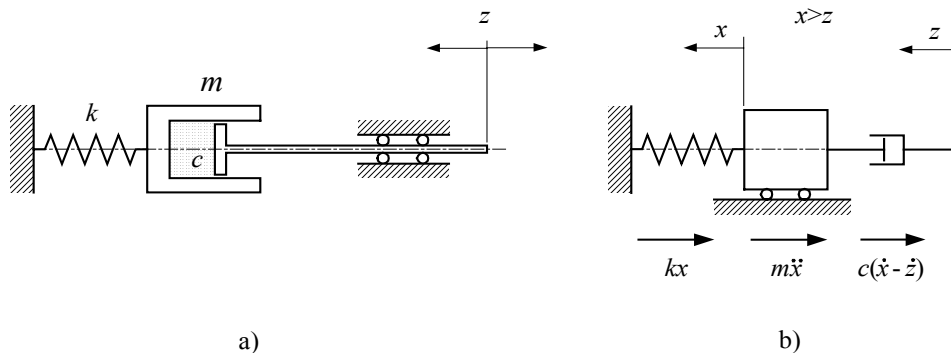
$$\omega = \sqrt{k \frac{g}{G}} = 9,9 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{te je} \quad \beta = \frac{\lambda}{\omega} = 1,51$$

Proizlazi, da je bezdimenzijski faktor prigušenja ξ ,

$$\xi = 0,226 \quad \text{odnosno koeficijent prigušenja} \quad c = 2k\xi = 452 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$$

PRIMJER 1.19

Cilindar mase m , vezan oprugom krutosti k za nepomičnu podlogu, pobuđen je na vibriranje uslijed viskoznog trenja prilikom harmonijskog gibanja klipa po zakonu $z = Z \cos \lambda t$ prema slici 1.31a. Odrediti apsolutno i relativno gibanje cilindra s odgovarajućim kutevima faznog pomaka u odnosu na gibanje klipa.

Zadano: m, k, c, Z, λ 

Slika 1.31. Primjer 1.19

Vibrirajući sustav na slici 1.31a može se zamijeniti ekvivalentnim sustavom na slici 1.31b. Postavljanjem uvjeta dinamičke ravnoteže sila,

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{z}) + kx = 0$$

proizlazi odgovarajuća jednadžba gibanja

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{z}$$

Rješenje ove jednadžbe $x(t)$ je ujedno i **zakon apsolutnog gibanja cilindra**. Gibanje podloge $z(t)$ i cilindra $x(t)$ su harmonijska gibanja koja se mogu prikazati u kompleksnom obliku

$$\bar{z} = Ze^{i\lambda t} \quad \bar{x} = Xe^{i\lambda t}$$

Uvrštenjem ovih izraza u gornju jednadžbu slijedi

$$\bar{x} = \frac{i2\xi\beta}{(1-\beta^2) + i2\xi\beta} \bar{z} = Z \frac{2\xi\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} e^{i\left(\lambda t + \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)}$$

Odatle se dobiva realni oblik **apsolutnog gibanja cilindra**

$$x = X \cos(\lambda t - \varphi)$$

Amplituda vibriranja X ,

$$X = Z\alpha_x$$

Koeficijent dinamičnosti α_x ,

$$\alpha_x = \frac{2\xi\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

Kut faznog pomaka φ ,

$$\varphi = \varepsilon - \frac{\pi}{2}$$

Zakon relativnog gibanja cilindra se određuje iz

$$r = x - z = \alpha_x Z \cos\left(\lambda t + \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) - Z \cos \lambda t$$

U kompleksnom obliku

$$\bar{r} = Z \left(\alpha_x e^{i\left(\lambda t + \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)} - e^{i\lambda t} \right) = Z e^{i(\lambda t - \varepsilon)} \left(\alpha_x e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\varepsilon} \right)$$

U realnom obliku

$$r = Z \cos(\lambda t - \varepsilon) \left(\alpha_x \cos \frac{\pi}{2} - \cos \varepsilon \right)$$

Obzirom da je

$$\cos \varepsilon = \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

slijedi realni oblik **relativnog gibanja cilindra**

$$r = R \cos(\lambda t - \varepsilon)$$

Amplituda vibriranja R ,

$$R = Z\alpha_r$$

Koeficijent dinamičnosti α_r ,

$$\alpha_r = \frac{\beta^2 - 1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

Kut faznog pomaka ε ,

$$\varepsilon = \arctg \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}$$

PRIMJER 1.20

Stroj mase m leži na elastičnim osloncima ukupne krutosti k i ima neuravnoteženi rotacijski element koji stvara uzbudnu silu amplitude F_0 kod broja okretaja n . Uz pretpostavku prigušenja ξ odrediti:

- amplitudu vibriranja X
- koeficijent prenosivosti PR
- prenesenu silu F_{PR}

Zadano: $m = 100 \text{ kg}$, $k = 700 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$, $F_0 = 350 \text{ N}$, $n = 3000 \frac{\text{o}}{\text{min}}$, $\xi = 0,2$

Frekvencija uzbude f ,

$$f = \frac{n}{60} = 50 \text{ Hz}$$

Prirodna frekvencija f_0 ,

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 13,32 \text{ Hz}$$

Omjer frekvencija β ,

$$\beta = \frac{f}{f_0} = 3,75 \quad \text{ispunjen uvjet za uspješnu izolaciju}$$

Amplituda vibriranja X ,

$$X = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = 0,038 \text{ mm}$$

Koeficijent prenosivosti PR ,

$$PR = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = 0,137$$

Prenesena sila na podlogu F_{PR} ,

$$F_{PR} = F_0 \cdot PR = 47,9 \text{ N}$$

PRIMJER 1.21

Rotor turbine mase M učvršćen je na čeličnoj osovinu promjera d na polovici raspona l između ležaja. Rotor ima neuravnoteženost mase $m \cdot e$. Odrediti silu prenesenu na ležajeve u slučaju broja okretaja osovine n . Kolika bi bila prenesena sila u slučaju da osovina ima promjer d_1 ? Pretpostaviti zglobno oslonjenu osovinu na mjestu ležaja.

Zadano: $M = 13,6 \text{ kg}$, $d = 0,0254 \text{ m}$, $l = 0,255 \text{ m}$, $m \cdot e = 0,002879 \text{ kgm}$, $n = 6000 \frac{\text{o}}{\text{min}}$,

$$E = 2,1 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad d_1 = 0,01905 \text{ m}$$

Frekvencija uzbude f ,

$$f = \frac{n}{60} = 100 \text{ Hz}$$

Krutost osovine k ,

$$k = \frac{48EI}{l^3} = \frac{48Ed^4\pi}{64l^3} = 12267374 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Prirodna frekvencija f_0 ,

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 151,23 \text{ Hz}$$

Omjer frekvencija β ,

$$\beta = \frac{f}{f_0} = 0,66 \quad \text{nepovoljno za izolaciju}$$

Nema prigušenja ($\xi = 0$), te koeficijent prenosivosti PR glasi

$$PR = \frac{1}{1 - \beta^2} = 1,77$$

Prenesena sila na ležaje F_{PR} ,

$$F_{PR} = PRme\lambda^2 = 2010 \text{ N}$$

U slučaju promjera osovine d_1 mijenja se krutost k osovine,

$$k_1 = 388095 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

te se mijenjaju i ostali parametri,

$$(f_0)_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{M}} = 26,9 \text{ Hz}$$

$$\beta_1 = \frac{f}{(f_0)_1} = 3,7 \quad \text{povoljno za izolaciju (veće od } \sqrt{2} \text{)}$$

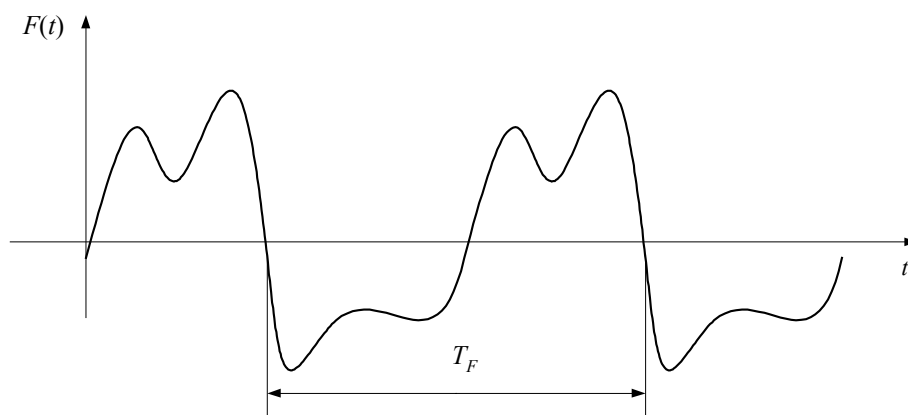
$$PR = \frac{1}{\beta^2 - 1} = 0,37$$

$$F_{PR} = 420 \text{ N}$$

Zaključak: u slučaju osovine manjeg promjera (d_1) prenesena sila na ležaje je znatno manja što znači da je promjenom krutosti osovine učinak izolacije vibracija na ležaje bitno poboljšan.

1.3. Prisilne vibracije – *periodska sila uzbude*

Pod periodskim vibracijama se u općem slučaju podrazumijevaju neharmonijske vibracije koje se periodski ponavljaju, a nastaju uslijed periodske sile uzbude $F(t)$, slika 1.32.



Slika 1.32. Periodska uzbuda

Izrazi za odziv uslijed harmonijske uzbude mogu se koristiti za određivanje odziva uslijed proizvoljne periodske uzbude. U tu se svrhu periodska uzbuda samo treba izraziti u obliku Fourierovog reda; odziv uslijed svakog člana reda je odziv uslijed harmonijske uzbude, a po načelu superpozicije ukupni odziv je zbroj odziva uslijed svakog člana reda posebno.

1.3.1 Sila i odziv u trigonometrijskom obliku

Funkcija uzbude $F(t)$ prema slici 1.32 može se izraziti u obliku Fourierovog reda,

$$F(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_{an} \cos \frac{2\pi n}{T_F} t + \sum_{n=1}^{\infty} F_{bn} \sin \frac{2\pi n}{T_F} t \quad (1.39)$$

gdje je T_F – period uzbude, a koeficijenti reda glase

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T_F} \int_0^{T_F} F(t) dt \\ F_{an} &= \frac{2}{T_F} \int_0^{T_F} F(t) \cos \frac{2\pi n}{T_F} t dt \\ F_{bn} &= \frac{2}{T_F} \int_0^{T_F} F(t) \sin \frac{2\pi n}{T_F} t dt \end{aligned} \quad (1.39a)$$

Stacionarni odziv **neprigušenog** sustava u skladu s jednadžbom (1.22), glasi

$$x(t) = \frac{1}{k} \left[F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \beta_n^2} (F_{an} \cos \lambda_n t + F_{bn} \sin \lambda_n t) \right] \quad (1.40)$$

dok odziv sustava s **prigušenjem** u skladu s jednadžbom (1.24) ima oblik

$$x(t) = \frac{1}{k} \left\{ F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \left(\left[F_{an} 2\xi\beta_n + F_{bn} (1 - \beta_n^2) \right] \sin \lambda_n t + \left[F_{an} (1 - \beta_n^2) - F_{bn} 2\xi\beta_n \right] \cos \lambda_n t \right) \right\} \quad (1.41.)$$

gdje je $\beta_n = \frac{\lambda_n}{\omega}$, $\lambda_n = n\lambda_1$, $\lambda_1 = \frac{2\pi}{T_F}$

1.3.2. Sila i odziv u kompleksno – eksponencijalnom obliku

Periodska se uzbuda može takođe prikazati u **kompleksno – eksponencijalnom obliku**

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{i\lambda_n t} \\ F_n &= \frac{1}{T_F} \int_0^{T_F} F(t) e^{-i\lambda_n t} dt \end{aligned} \quad (1.42)$$

U gornjoj sumi Σ za svaki pozitivni n recimo $n = m$ postoji i odgovarajući $n = -m$. To znači da za svaki indeks m u sumi Σ postoji par kompleksnih članova sume $e^{i\lambda_n t}$ i $e^{-i\lambda_n t}$ čiji se imaginarni dijelovi međusobno poništavaju. To i mora tako biti, jer je $F(t)$ realna funkcija uzbude.

Sada se i odziv može prikazati u eksponencijalnom obliku, ako se poslužimo izrazom (1.29) i načelom superpozicije,

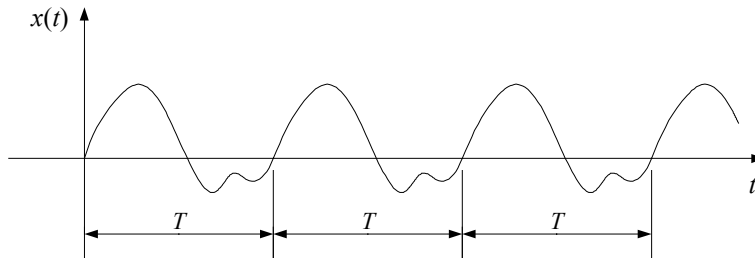
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(\lambda_n) F_n e^{i\lambda_n t} \quad (1.43)$$

gdje **kompleksna frekvencijska funkcija odziva** $H(\lambda_n)$ u skladu s izrazom (1.30) sada glasi

$$H(\lambda_n) = \frac{1}{k(1 - \beta_n^2 + i2\xi\beta_n)} \quad (1.44)$$

1.3.3. Harmonijska analiza periodskih vibracija

Kao što smo vidjeli iz izraza (1.40) ili (1.41), periodske vibracije $x(t)$ mogu se prikazati u obliku konstante i beskonačnog reda harmonijskih funkcija. Pritom su konstanta i koeficijenti reda funkcije periodske uzbuđene $F(t)$, a frekvencije pojedinih članova reda višekratnici osnovne frekvencije uzbuđene $\frac{2\pi}{T_F}$. Međutim, u mnogim slučajevima (npr. mjerenja) poznata je funkcija odziva $x(t)$ periodskih vibracija nekog sustava i njena frekvencija $\omega = \frac{2\pi}{T}$, slika 1.33, a da prethodno nije određena funkcija uzbuđene $F(t)$. Tada se funkcija $x(t)$ također razlaže na svoje sastavne harmonijske komponente, te se takav postupak naziva **harmonijskom analizom**.



Slika 1.33. Odziv periodskih vibracija

Dakle, poznata funkcija odziva $x(t)$ može se razviti u red oblika

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) \quad (1.45)$$

$$\omega_k = k\omega, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Red (1.45) se naziva **Fourierov red**. Za praktičnu primjenu je pogodniji oblik

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) \quad (1.46)$$

gdje je

$$X_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k} \quad (1.47)$$

Fourierovi koeficijenti a_k i b_k mogu se odrediti na osnovu izraza

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos \omega_k t dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin \omega_k t dt \end{aligned} \quad (1.48)$$

Konstanta a_0 se obično označava kao **srednja vrijednost vibracija**.

Član reda

$$x_1(t) = X_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

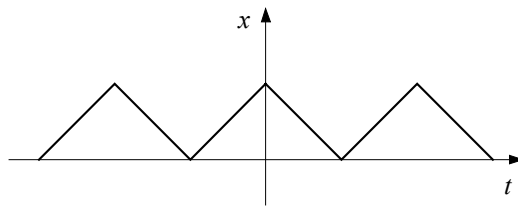
predstavlja **vibracije prvog reda**, tj. prvi harmonik vibriranja.

Članovi reda

$$x_k(t) = X_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)$$

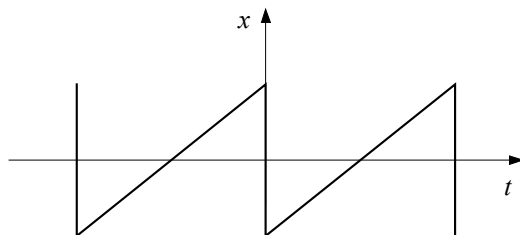
predstavljaju **vibracije viših redova**, tj. k -te harmonike vibriranja.

Ako je periodska funkcija $x(t)$ **simetrična**, kao na primjer niže prikazana,



tada u izrazu (1.46) otpadaju članovi s antisimetričnom funkcijom sinus, odnosno $b_k = 0$.

Ako je periodska funkcija $x(t)$ **antisimetrična**, kao na primjer niže prikazana,



tada u izrazu (1.46) otpadaju članovi sa simetričnom funkcijom cosinus, odnosno $a_k = 0$.

U praksi se periodske funkcije $x(t)$ ne razvijaju u beskonačne redove (1.46), već se odabire određeni broj članova reda $x_n(t)$ koji će u dovoljno dobrom približenju modelirati zadanu periodsku funkciju $x(t)$.

1.3.4. Harmonijska analiza izmjerenih periodskih veličina

U praksi se često javljaju periodske, neharmonijske sile ili pomaci, koji se ne mogu definirati matematički, već se određuju mjerenjem. U tom slučaju je periodska funkcija koja opisuje navedene pojave dana u obliku digitalnog zapisa, gdje su na raspolaganju nizovi diskretnih brojčanih vrijednosti, obično u tabličnom obliku. Sada, za određivanje Fourierovih koeficijenata više nije moguće provesti integraciju prema izrazima (1.48), već se provodi približna harmonijska analiza, gdje se beskonačni Fourierov red zamjenjuje s konačnim trigonometrijskim polinomom

$$x_n = a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{2k\pi}{T} t + b_k \sin \frac{2k\pi}{T} t \right) \quad (1.49)$$

Za određivanje Fourierovih koeficijenata potrebno je promatrati vrijednosti funkcije x u m ekvidistantnih vremenskih odsječaka t_i , gdje je

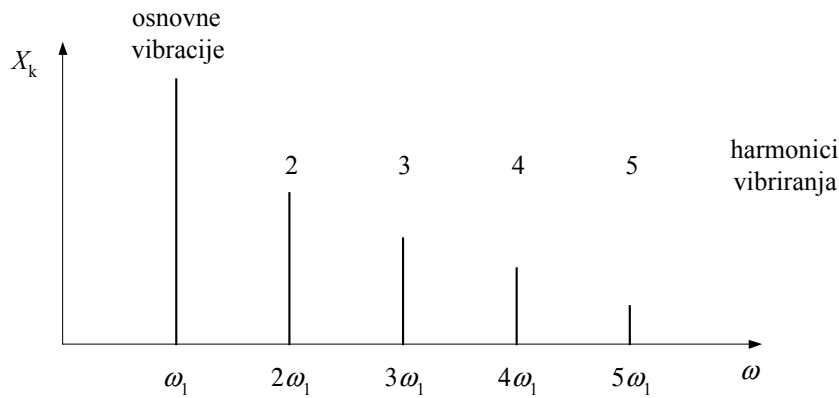
$$t_i = \frac{(i-1)T}{m-1}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad m \geq 2n+1$$

U tom slučaju se izrazi (1.48) zamjenjuju s

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x(t_i) \\ a_k &= \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m x(t_i) \cos k \frac{i-1}{m-1} 2\pi, \quad k = 1, 2, \dots, n \\ b_k &= \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m x(t_i) \sin k \frac{i-1}{m-1} 2\pi, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1.50)$$

1.3.5. Frekvencijski spektar periodske funkcije

Amplitude X_k u izrazu za Fourierov red (1.45) mogu se prikazati u ovisnosti o kružnoj frekvenciji ω ili frekvenciji f . U tom slučaju se kaže, da su periodske vibracije prikazane u frekventnom području, slika 1.34, a dobiveni dijagram se naziva **spektar amplituda** periodskih vibracija $x(t)$.



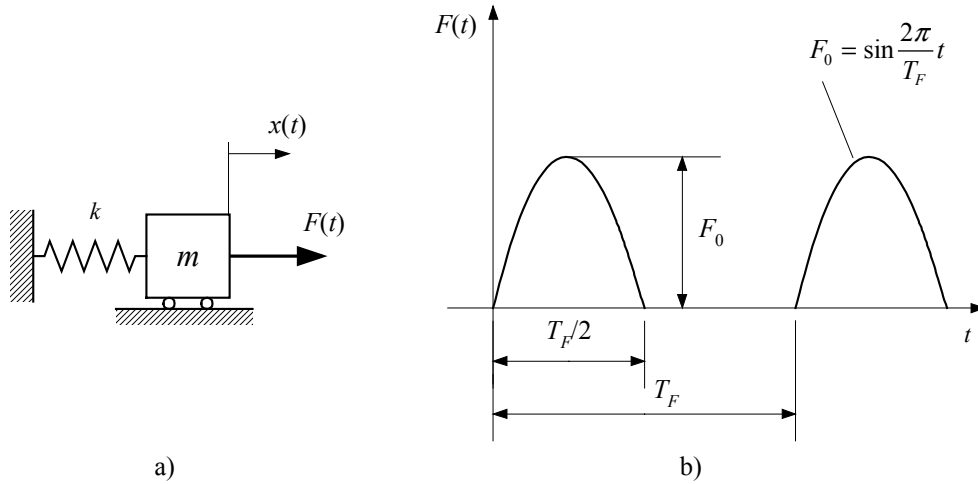
Slika 1.34. Spektar amplituda periodskih vibracija

Prikaz amplituda X_k nije još potpuna informacija o $x(t)$, jer nedostaje spektar nultog faznog kuta φ_k . Najjednostavniji način da se to postigne, je da se pomoću Fourierovih koeficijenata a_k i b_k fazni kut φ_k odredi primjenom formule (1.47) i takođe prikaže u frekventnom području na isti način kao i X_k na slici 1.34. Ovo je uobičajeni način frekvencijske analize periodskih vibracija dobivenih mjerenjem, gdje se određuju značajke osnovnih vibracija i viših harmonika, te je postupak kao takav danas već ugrađen i u najjednostavnije analizatore vibracija.

1.3.6. Primjeri

PRIMJER 1.22

Neka je sustav na slici 1.35a opterećen periodskom silom uzbude $F(t)$ čija je vremenska funkcija prikazana na slici 1.35b. Odrediti funkciju odziva $x(t)$ uz uvjet da je $\frac{T_F}{T} = \frac{4}{3}$.



Slika 1.35. Periodska sila uzbude u primjeru 1.22

Koristeći izraze (1.39a) Fourierovi koeficijenti za silu uzbude glase

$$F_0 = \frac{1}{T_F} \int_0^{\frac{T_F}{2}} F_0 \sin \frac{2\pi}{T_F} t dt = \frac{F_0}{\pi}$$

$$F_{ak} = \frac{2}{T_F} \int_0^{\frac{T_F}{2}} F_0 \sin \frac{2\pi}{T_F} t \cos \frac{2\pi k}{T_F} t dt = \begin{cases} 0 & k - \text{neparan} \\ \frac{F_0}{\pi} \frac{2}{1-k^2} & k - \text{paran} \end{cases}$$

$$F_{bk} = \frac{2}{T_F} \int_0^{\frac{T_F}{2}} F_0 \sin \frac{2\pi}{T_F} t \sin \frac{2\pi k}{T_F} t dt = \begin{cases} \frac{F_0}{2} & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

Ako se ovi izrazi uvrste u jednadžbu (1.39) dobiva se sila uzbude u obliku reda

$$F(t) = \frac{F_0}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \sin \frac{2\pi}{T_F} t - \frac{2}{3} \cos 2 \frac{2\pi}{T_F} t - \frac{2}{15} \cos 4 \frac{2\pi}{T_F} t - \frac{2}{35} \cos 6 \frac{2\pi}{T_F} t \dots \right)$$

a ako se isti izrazi uvrste u jednadžbu (1.40) dobiva se odziv za ovakvu silu uzbude u obliku reda

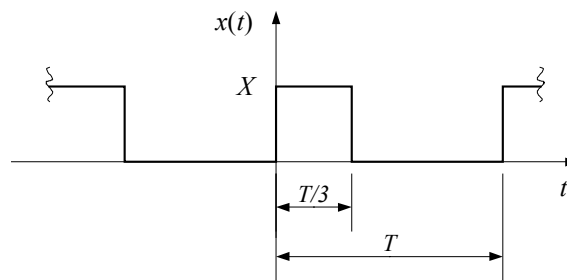
$$x(t) = \frac{F_0}{k\pi} \left(1 + \frac{8\pi}{7} \sin \lambda_1 t + \frac{8}{15} \cos \lambda_2 t + \frac{1}{60} \cos \lambda_4 t + \dots \right)$$

gdje je $\lambda_1 = \frac{2\pi}{T_F}$, $\beta_1 = \frac{T}{T_F} = \frac{3}{4}$, $\beta_2 = \frac{3}{2}$, $\beta_3 = 3$, ...

PRIMJER 1.23

Periodske vibracije na slici 1.36, prikazane u obliku četvrtaste krivulje u vremenskom području, potrebno je razviti u red harmonijskih funkcija. Prikazati grafički zadanu funkciju i njen razvoj u redove s različitim brojem članova.

Zadano: X , T



Slika 1.36. Primjer 1.23, četvrtasta krivulja

Radi se o nesimetričnoj funkciji, te prema izrazima (1.48) Fourierovi koeficijenti glase

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^{T/3} X dt = \frac{X}{3}$$

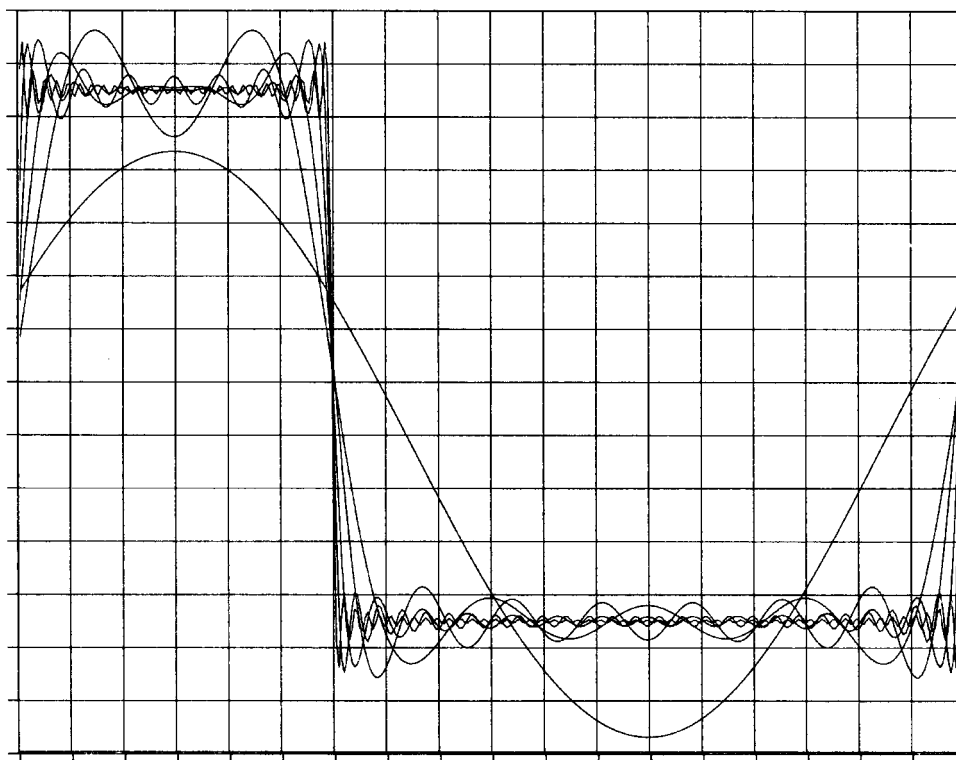
$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^{T/3} X \cos \frac{2k\pi}{T} t dt = \frac{X}{k\pi} \sin \frac{2k\pi}{3}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^{T/3} X \sin \frac{2k\pi}{T} t dt = -\frac{X}{k\pi} \left(\cos \frac{2k\pi}{3} - 1 \right)$$

Dakle, funkcija $x(t)$ razvijena u konačan Fourierov red prema (1.46) s n članova reda glasi

$$x_n = \frac{X}{3} + \frac{X}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left[\sin \frac{2k\pi}{3} \cos \frac{2k\pi}{T} t - \left(\cos \frac{2k\pi}{3} - 1 \right) \cdot \sin \frac{2k\pi}{T} t \right]$$

Na slici 1.37 prikazana je zadana periodska funkcija $x(t)$ i njen razvoj u red $x_n(t)$ s $n=1, 5, 10, 20, 40, 80$ članova. Vidljivo je, da su s povećanjem broja članova reda n krivulje reda $x_n(t)$ sve bliže zadanoj periodskoj funkciji $x(t)$.

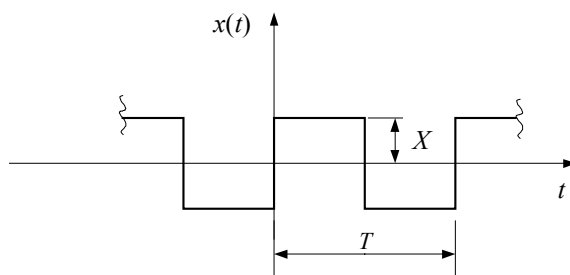


Slika 1.37. Primjer 1.23, razvoj četvrtaste funkcije u Fourierove redove

PRIMJER 1.24

Mjerenjem je ustanovljena antisimetrična periodska veličina $x(t)$ koja je prikazana na slici 1.38. Za istu je potrebno izvršiti harmonijsku analizu do uključivo 4. harmonika vibriranja.

Zadano: X , T



Slika 1.38. Primjer 1.24

Harmonijska analiza izmjerene funkcije $x(t)$ obuhvaća:

- određivanje vrijednosti funkcije $x(t)$ u m vremenski ekvidistantnih točaka unutar jednog perioda T
- određivanje Fourierovih koeficijenata za pojedine harmonike
- prikaz pojedinih harmonika izmjerene funkcije s odgovarajućim amplitudama unutar perioda T
- prikaz spektra amplitude izmjerene funkcije u frekvencijskom području

Da bi se izvršila harmonijska analiza izmjerene funkcije do 4. harmonika ($n=4$), potrebno je poznavati njenu vrijednost u $m \geq 2n+1=9$ ekvidistantnih vremenskih točaka unutar perioda T , što je prikazano u slijedećoj tablici

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t_i/T	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1,0
x_i	0	X	X	X	0	$-X$	$-X$	$-X$	0

Sada se prelazi na određivanje Fourierovih koeficijenata za pojedine harmonike. Obzirom da je izmjerena funkcija antisimetrična, otpadaju koeficijenti a_k . Preostaje da se odrede koeficijenti b_k prema izrazu (1.50),

$$b_k = \frac{2}{9} \sum_{i=1}^9 x_i \sin k \frac{i-1}{8} 2\pi \quad k = 1, 2, 3, 4$$

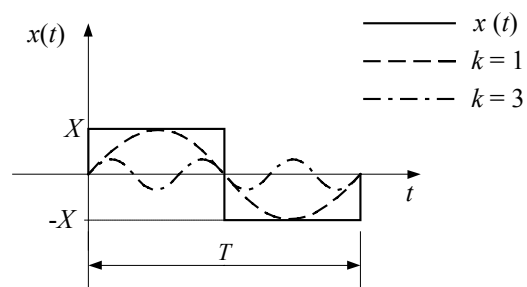
Odatle proizlazi da je

$$b_1 = 1,07 X \quad b_2 = 0 \quad b_3 = 0,18 X \quad b_4 = 0$$

Sada se mogu odrediti značajke pojedinih harmonika. Slijedi:

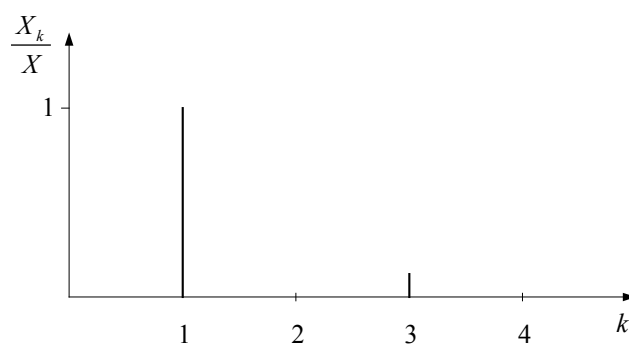
$$\begin{array}{lll}
 k=1 & X_1 = b_1 = 1,07 X & T_1 = T \\
 k=2 & X_2 = b_2 = 0 & T_2 = \frac{1}{2} T \quad (\text{nema značaja}) \\
 k=3 & X_3 = b_3 = 0,18 X & T_3 = \frac{1}{3} T \\
 k=4 & X_4 = b_4 = 0 & T_4 = \frac{1}{4} T \quad (\text{nema značaja})
 \end{array}$$

Izmjerena funkcija i njeni aktivni harmonici prikazani su u vremenskom području unutar perioda T na slici 1.39. Vidljivo je, da je 1. harmonik dominantan u odnosu na 3. harmonik. Razlog tome je, što isti već vrlo dobro aproksimira originalnu funkciju i po obliku i po frekvenciji.



Slika 1.39. Primjer 1.24, izmjerena funkcija i njeni harmonici

Konačno, na slici 1.40 prikazan je amplitudni spektar izmjerene funkcije $x(t)$ u frekventnom području.

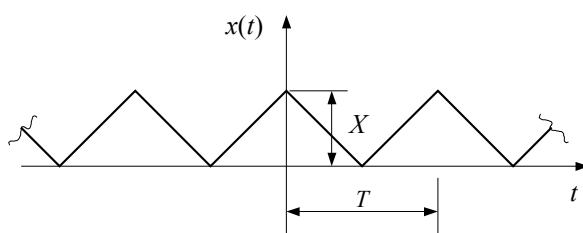


Slika 1.40. Primjer 1.24, amplitudni spektar

PRIMJER 1.25

Periodsku funkciju $x(t)$ prema slici 1.41 potrebno je razviti u konačni Fourierov red s jednim i dva aktivna člana, te prikazati istu sa svojim harmonicima u vremenskom području.

Zadano: X , T



Slika 1.41. Primjer 1.25

Zadana funkcija ima sljedeći oblik

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \quad x(t) &= -\frac{2X}{T}t + X \\ \frac{T}{2} \leq t \leq T \quad x(t) &= \frac{2X}{T}t - X \end{aligned}$$

Budući da je zadana funkcija simetrična, u harmonijskoj analizi je $b_k = 0$. Ostali Fourierovi koeficijenti se za pojedine harmonike određuju prema izrazima (1.48),

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} X \left(1 - 2\frac{t}{T}\right) dt = \frac{1}{2} X \\ a_1 &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} X \left(1 - 2\frac{t}{T}\right) \cos \frac{2\pi}{T} t dt + \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T X \left(-1 + 2\frac{t}{T}\right) \cos \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{4}{\pi^2} X \\ a_2 &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} X \left(1 - 2\frac{t}{T}\right) \cos \frac{4\pi}{T} t dt + \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T X \left(-1 + 2\frac{t}{T}\right) \cos \frac{4\pi}{T} t dt = 0 \\ a_3 &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} X \left(1 - 2\frac{t}{T}\right) \cos \frac{6\pi}{T} t dt + \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T X \left(-1 + 2\frac{t}{T}\right) \cos \frac{6\pi}{T} t dt = \frac{4}{9\pi^2} X \end{aligned}$$

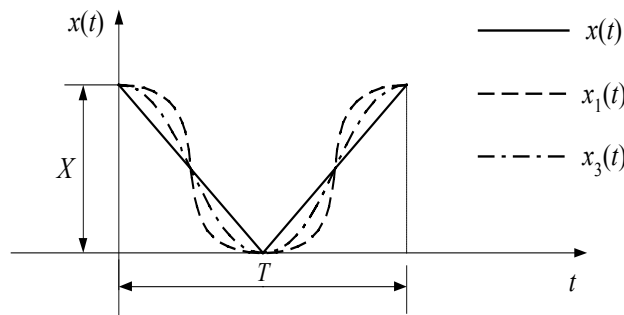
Dakle, zadana funkcija $x(t)$ razvijena u Fourierov red s jednim harmonikom glasi

$$x_1(t) = \frac{1}{2} X + \frac{4}{\pi^2} X \cos \frac{2\pi}{T} t$$

a s dva harmonika

$$x_3(t) = \frac{1}{2} X + \frac{4}{\pi^2} X \cos \frac{2\pi}{T} t + \frac{4}{9\pi^2} X \cos \frac{6\pi}{T} t$$

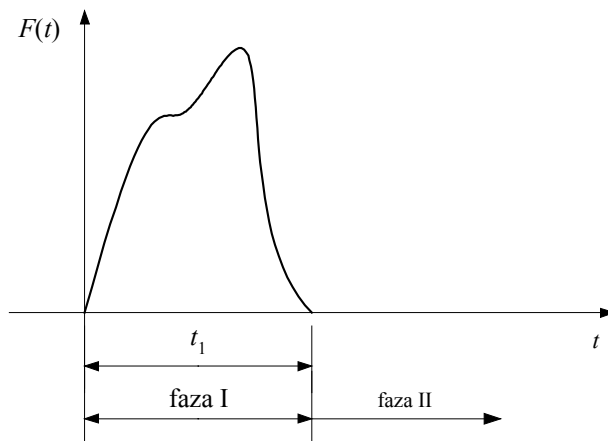
Funkcije $x(t)$, $x_1(t)$ i $x_3(t)$ prikazane su u vremenskom području na slici 1.42.



Slika 1.42. Primjer 1.25, funkcije $x(t)$, $x_1(t)$ i $x_3(t)$ u vremenskom području

1.4. Prisilne vibracije – impulsna sila uzbude

Impulsna sila uzbude sastoji se od samo jednog glavnog impulsa, slika 1.43, i općenito je vrlo kratkog trajanja.



Slika 1.43. Impulsna sila uzbude

Impulsne sile uzbude ili tzv. šok sile vrlo su važne kod projektiranja određenih vrsta strukturnih sustava, poput vozila, samohodnih dizalica, trupa podmornica, zidova skloništa, itd. **Prigušenje nema većeg značaja** kod postizanja najvećih odziva uslijed ovakve uzbude, zato jer najveći odziv nastupa u vrlo kratkom vremenu, tj. prije nego što sile prigušenja mogu absorbirati veću energiju strukture. Stoga će se ovdje razmatrati samo **odziv bez prigušenja** uslijed impulsne sile uzbude.

Iz slike 1.43 vidljivo je, da impulsna sila ima svoje vrijeme trajanja t_1 , te da se odziv uslijed ove sile može podijeliti u dvije faze. Tokom faze I vibrirajući sustav je izložen djelovanju impulsne sile, pa će odziv u fazi I biti jednak sumi homogenog i partikularnog rješenja jednadžbe (1.1) bez prigušenja, dok u fazi II nakon prestanka djelovanja sile, sustav ima slobodne vibracije, gdje će odziv ovisiti o početnim uvjetima u trenutku $t = t_1$ prema izrazu (1.6),

$$x(\tilde{t}) = \frac{\dot{x}(t_1)}{\omega} \sin \omega \tilde{t} + x(t_1) \cos \omega \tilde{t} \quad (1.51)$$

gdje je uvedena nova vremenska varijabla $\tilde{t} = t - t_1$.

Značajke odziva uslijed impulsne sile uzbude ovise o omjeru vremena djelovanja sile t_1 i prirodnog perioda vibriranja sustava T . U slučaju **dugotrajne** impulsne sile $\left(\frac{t_1}{T} > 0,25\right)$ odziv sustava će se odvijati u fazi I, tj. za vrijeme djelovanja sile, te će bitno ovisiti o samoj vremenskoj funkciji sile. U slučaju **kratkotrajne** impulsne sile $\left(\frac{t_1}{T} < 0,25\right)$ odziv će se

odvijati u fazi II, tj. nakon prestanka djelovanja sile, te će bitno ovisiti o brzini i pomaku u času prestanka djelovanja sile, i neće ovisiti o obliku sile uzbude već samo o veličini njenog impulsa.

$$I = \int_0^{t_1} F(t) dt$$

Mi ćemo se ovdje dalje baviti samo odzivom uslijed kratkotrajne impulsne sile, te ćemo prikazati **približan postupak** za određivanje odziva, koji će kasnije biti korišten kod analize odziva uslijed neperiodske uzbudne sile.

1.4.1. Približan postupak određivanja odziva uslijed kratkotrajne impulsne sile

Ovaj postupak se temelji na gornjem zaključku vezanom za impuls. Stavak o impulsu za masu m glasi

$$m\Delta\dot{x} = \int_0^{t_1} [F(t) - kx(t)] dt$$

gdje je $\Delta\dot{x}$ promjena brzine uslijed djelovanja sile. Za slučaj kratkotrajne impulsne sile ($t_1 \rightarrow 0$) pomak $x(t_1)$ je zanemarivo mali, pa stoga se iz gornjeg izraza može izostaviti član s elastičnom silom $kx(t)$. Dakle, nadalje se polazi od **približnog** izraza

$$m\Delta\dot{x} = \int_0^{t_1} F(t) dt$$

odnosno

$$\Delta\dot{x} = \frac{1}{m} \int_0^{t_1} F(t) dt$$

Za odziv se koristi izraz (1.51). Ako je na početku djelovanja impulsne sile sustav bio u mirovanju, tada je $\Delta\dot{x} = \dot{x}(t_1)$ i uzevši u obzir zanemarivost pomaka na kraju djelovanja sile $x(t_1)$, navedeni izraz (1.51) prelazi u oblik

$$x(\tilde{t}) = \frac{1}{m\omega} \left(\int_0^{t_1} F(t) dt \right) \sin \omega t \quad (1.52)$$

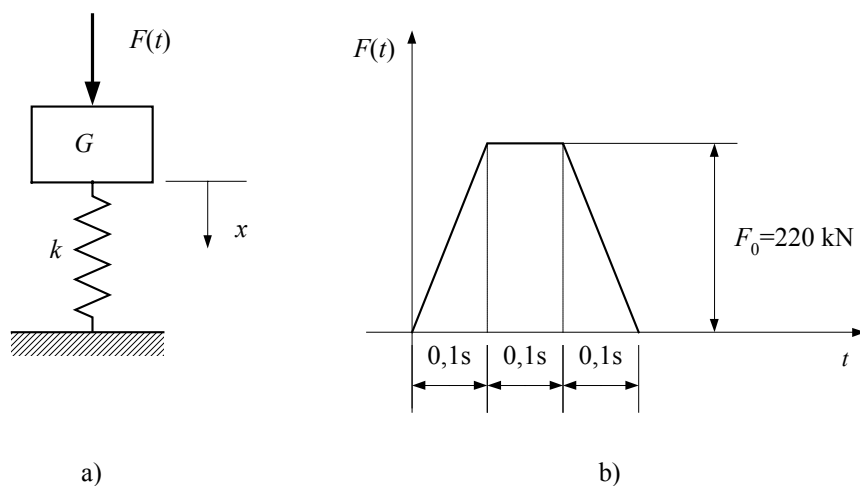
Prema tome, izraz (1.52) je **približna formula** za određivanje odziva uslijed impulsne sile uzbude, koja je naročito pouzdana u slučaju kratkotrajnog djelovanja impulsne sile, tj. za $t_1/T < 0,25$.

1.4.2. Primjeri

PRIMJER 1.26.

Za vibracijski sustav prema slici 1.44a odrediti funkciju odziva približnim postupkom u slučaju djelovanja impulsne sile uzbude $F(t)$ prikazane na slici 1.44b. Nakon toga odrediti najveću vrijednost odziva i sile prenesene na podlogu.

Zadano: $G = 8900 \text{ kN}$, $k = 8949 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$



Slika 1.44. Primjer 1.26

Sustav na slici 1.44a ima prirodnu frekvenciju

$$\omega = \sqrt{\frac{k \cdot g}{G}} = 3,14 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Trajanje impulsne sile prema slici 1.44b iznosi $t_1 = 0,3 \text{ s}$, te je njen impuls jednak površini ispod izlomljene crte na istoj slici, tj.

$$I = \int_0^{t_1} F(t) dt = 44 \text{ kNs}$$

Dakle, prema formuli (1.52) proizlazi da je odziv približno

$$x(t) = \frac{g}{G\omega} I \sin \omega \tilde{t}$$

gdje je $\tilde{t} = t - 0,3 [\text{s}]$

Najveća vrijednost odziva nastaje kada je $\sin \omega \tilde{t} = 1$, tj.

$$x_{\max} = 0,0154 \text{ m}$$

U prethodnim izrazima uzeto je $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Na podlogu se sila prenosi preko elastičnog elementa. Stoga je ta sila jednaka sili u opruzi.

Najveća sila u opruzi iznosi

$$F_{k \max} = k \cdot x_{\max} = 137 \text{ kN}$$

Budući da je period slobodnih vibracija ovog sustava

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \text{ s}$$

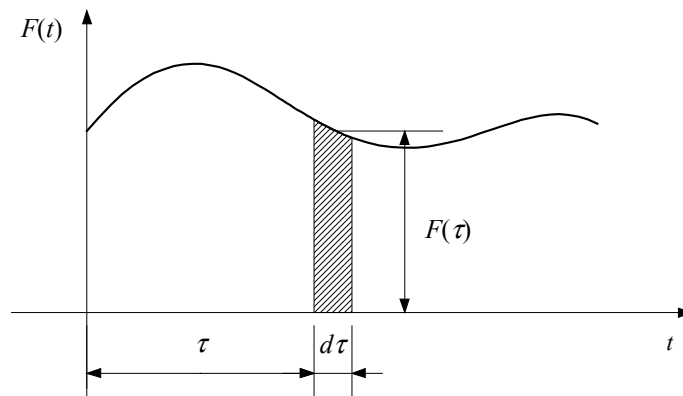
omjer $\frac{t_1}{T}$ iznosi

$$\frac{t_1}{T} = \frac{0,3}{2} = 0,15$$

Ovaj omjer je manji od 0,25, pa je impulsna sila u ovom primjeru s kratkotrajnim djelovanjem. Stoga se primijenjen približan postupak za određivanje odziva može smatrati pouzdanim.

1.5. Prisilne vibracije – *neperiodska sila uzbude*

Postupak za približno određivanje odziva uslijed impulsne sile uzbude dan jednadžbom (1.52) može se koristiti kao osnova za određivanje odziva uslijed proizvoljne neperiodske sile uzbude $F(t)$ prikazane na slici 1.45.



Slika 1.45. Neperiodska sila uzbude

Na slici je posebno istaknuta vrijednost sile u trenutku $t = \tau$, tj. $F(\tau)$. Tokom diferencijalnog vremena $d\tau$ sila $F(t)$ proizvodi impuls $F(\tau)d\tau$. Iz jednadžbe (1.52) slijedi odziv uslijed ovakvog impulsa

$$dx(t) = \frac{1}{m\omega} F(\tau) d\tau \sin \omega(t - \tau)$$

Može se smatrati da se čitav vremenski tijek sile sastoji od niza ovakvih kratkih impulsa, gdje svaki od njih proizvodi svoj vlastiti diferencijalni odziv prema gornjem izrazu. Ukupni se odziv dobije zbrajanjem svih diferencijalnih odziva razvijenih tijekom vremena u kojem djeluje sila integrirajući gornji izraz

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (1.53a)$$

ili

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \quad (1.53b)$$

gdje je

$$h(t - \tau) = \frac{1}{m\omega} \sin \omega(t - \tau)$$

Integral (1.53a) naziva se **Duhamelov integral** za neprigušeni sustav, dok se integral (1.53b) naziva **konvolucijski integral**. Proračun odziva strukture pomoću integrala (1.53b) naziva se **postupkom određivanja odziva u vremenskom području**.

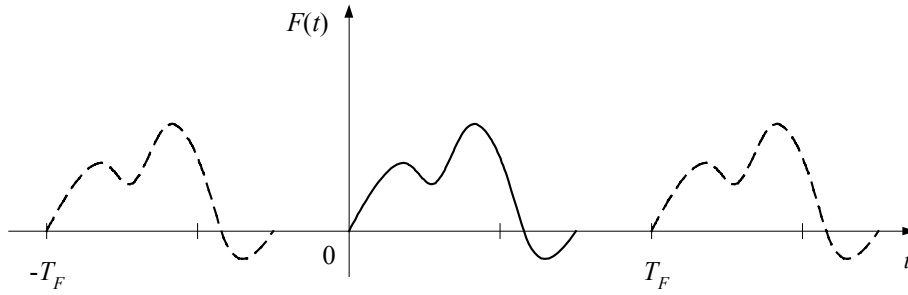
Duhamelov odnosno konvolucijski integral mogu se koristiti za bilo kakav oblik neperiodske sile uzbude $F(t)$, iako se u većini slučajeva integracija mora provesti **numeričkim putem**.

1.5.1. Analiza odziva u frekvencijskom području

Koncepcija analize odziva u frekvencijskom području slična je koncepciji analize odziva uslijed periodske sile uzbude. Kod oba se koncepta sila uzbude izražava u obliku harmonijskih komponenti, zatim se najprije odziv strukture određuje za svaku komponentu sile, te se ukupni odziv strukture dobiva superpozicijom harmonijskih odziva. Da bi se prikazana tehnika kod periodske sile uzbude mogla primijeniti u slučaju opće, neperiodske sile uzbude, nužno je **koncept Fourierovog reda proširiti na prikazivanje neperiodskih funkcija**. U tu je svrhu pogodno koristiti već ranije prikazan razvoj periodske sile uzbude u Fourierov red u kompleksno – eksponencijalnom obliku (1.42) koji glasi

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\lambda_n t}, \quad F_n = \frac{1}{T_F} \int_0^{T_F} F(t) e^{-i\lambda_n t} dt$$

Neka se razmotri **neperiodska** sila uzbude (puna crta) na slici 1.46.



Slika 1.46. Neperiodska sila uzbude razvijena u Fourierov red

Kada bi se ova funkcija prikazala razvojem u Fourierov red, tada bi koeficijenti reda F_n dobiveni integracijom u bilo kojem vremenskom intervalu $0 < t < T_F$ ustvari definirali **periodsku** funkciju koja je na slici prikazana punom i isprekidanom crtom. Međutim, kako za neperiodsku silu uzbude period $T_F \rightarrow \infty$, to će uz postavljanje takvog uvjeta prekobrojne (iscrtkane) funkcije sile uzbude isčeznuti. Stoga je nužno preurediti izraze (1.42) u smislu proširenja istih na beskonačno vremensko područje. U tu se svrhu uvodi

$$\lambda_1 = \Delta\lambda, \quad \frac{1}{T_F} = \frac{\Delta\lambda}{2\pi}, \quad \lambda_n = n \cdot \Delta\lambda, \quad F_n = \frac{1}{T_F} F(\lambda_n)$$

te izrazi (1.42) poprimaju oblik

$$F(t) = \frac{\Delta\lambda}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\lambda_n) e^{i\lambda_n t} \quad (1.54a)$$

$$F(\lambda_n) = \int_{-\frac{T_F}{2}}^{\frac{T_F}{2}} F(t) e^{-i\lambda_n t} dt \quad (1.54b)$$

Ako se period sile uzbude produži na beskonačnost, prirast frekvencije postaje infinitezimalni ($\Delta\lambda \rightarrow d\lambda$), a diskretne frekvencije prelaze u kontinuiranu funkciju λ . U graničnom slučaju, **Fourierov red postaje Fourierov integral** u obliku

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda=-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda \quad (1.55a)$$

gdje je funkcija harmonijskih amplituda

$$F(\lambda) = \int_{t=-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\lambda t} dt \quad (1.55b)$$

Ova dva integrala se zovu **par Fourierove transformacije** i to iz razloga, što se vremenska funkcija $F(t)$ može izvesti iz frekvencijske funkcije $F(\lambda)$ i obrnuto, ekvivalentnim postupkom.

Po analogiji s Fourierovim redom (1.54a i b), Fourierov integral (1.55a i b) predstavlja proizvoljnu, neperiodsku silu uzbude kao beskonačnu sumu harmonijskih komponenti, gdje podintegralni izraz $\frac{1}{2\pi}F(\lambda)$ definira amplitudu po jedinici frekvencije $d\lambda$ komponente sile uzbude kod frekvencije λ . Ako se ova amplituda pomnoži s kompleksnom frekvencijskom funkcijom $H(\lambda)$ dobiva se amplituda po jedinici frekvencije $d\lambda$ komponente odziva kod frekvencije λ , analogno s izrazom (1.29) kod harmonijskih vibracija ili s izrazom (1.43) kod periodskih vibracija. Ukupni odziv se dobiva zbrajanjem svih komponenti odziva u čitavom frekvencijskom području. Ako se ovaj postupak izrazi matematički, dobiva se **osnovna jednadžba za analizu odziva u frekvencijskom području**, koja glasi

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda=-\infty}^{\infty} H(\lambda)F(\lambda)e^{i\lambda t} d\lambda \quad (1.56)$$

Da bi se opisani postupak primijenio, potrebno je odrediti harmonijske komponente sile uzbude $F(\lambda)$ pomoću jednadžbe (1.55b), te upotrijebiti kompleksnu frekvencijsku funkciju $H(\lambda)$ danu jednadžbom (1.44).

Formalna upotreba postupka analize u frekvencijskom području ograničena je na slučajeve gdje je na raspolaganju Fourierova transformacija funkcije sile uzbude, a i tada je određivanje integrala (1.55) zahtjevan posao. Da bi se ova metoda upotrijebila u praksi, nužno je istu formulirati u okviru postupka numeričke analize. Ovdje neće biti detaljnije govora o tim numeričkim postupcima. Ipak valja spomenuti, da se u tu svrhu razvijaju diskretne Fourierove transformacije sa sumama koje odgovaraju integralima (1.55a i b), te da se za određivanje ovih suma danas koristi tehnika poznata pod imenom **brza analiza Fourierove transformacije** (eng. *Fast Fourier Transform Analysis* ili FFTA). Ova relativno nova tehnika, namijenjena za obradu na elektroničkom računalu, je tako moćna i učinkovita, da je dinamička analiza u frekvencijskom području postala ravnopravna s tradicionalnom analizom u vremenskom području, čime je napravljen veliki zaokret u dinamičkoj strukturnoj analizi.

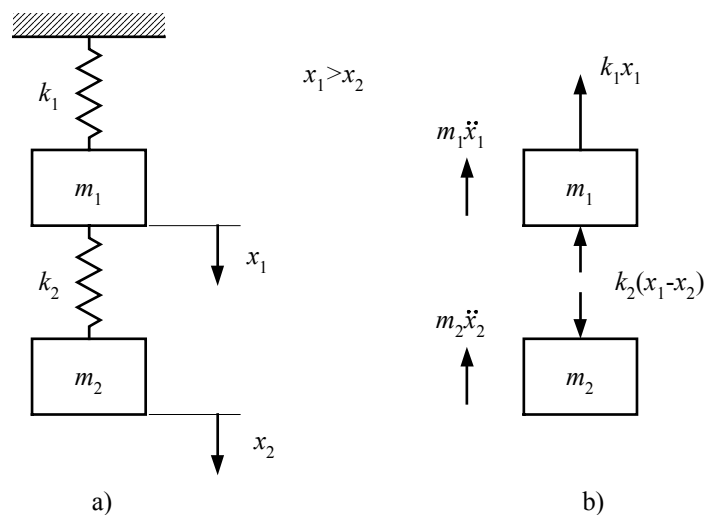
DRUGI DIO

2. Sustavi s dva stupnja slobode gibanja

Ako se gibanje nekog sustava može opisati s dvije nezavisne koordinate, tada se radi o **sustavu s dva stupnja slobode gibanja**. Takav sustav ima **dvije prirodne frekvencije**. Kada sustav vibrira s jednom od tih frekvencija, tada je odnos između amplituda nezavisnih koordinata točno određen i naziva se **prirodni oblik vibriranja** koji pripada toj frekvenciji. Analiza sustava s dva stupnja slobode vrlo je korisna iz dva razloga. Prvo, sve značajke vibracija dobivene ovakvom analizom predstavljaju dobar uvod u analizu vibracija sustava s više stupnjeva slobode i kontinuiranih sustava, koji su prikazani u Trećem dijelu ove knjige. Drugo, pomoću sustava s dva stupnja slobode mogu se u prvom približenju prikazati mnogi složeni dinamički sustavi. U ovom poglavlju to je prikazano na primjeru analize vibracija automobila, zgrade, brodskog vijka s osoviniskim vodom, itd. Analiza odziva kod prisilnih vibracija prikazana je samo za slučaj **harmonijske sile uzbude**.

2.1. Slobodne vibracije

Značajke slobodnih vibracija analizirane su na jednostavnom neprigušenom sustavu koji je prikazan na slici 2.1a.



Slika 2.1. Slobodne vibracije sustava s dva stupnja slobode gibanja

Iz uvjeta dinamičke ravnoteže sila za obje mase proizlaze dvije diferencijalne jednadžbe

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 (x_1 - x_2) = 0$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

Prikazano simbolički

$$[\mathbf{m}]\{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{k}]\{\mathbf{x}\} = \{0\}$$

gdje je

$[\mathbf{m}]$	matrica masa
$[\mathbf{k}]$	matrica krutosti
$\{\ddot{\mathbf{x}}\}$	vektor ubrzanja
$\{\mathbf{x}\}$	vektor pomaka

Uočljivo je da je matrica krutosti $[\mathbf{k}]$ puna i simetrična, dok je matrica masa $[\mathbf{m}]$ dijagonalna. Za takav slučaj kažemo, da je gornji sustav **spregnut po krutosti**, a **nespregnut po inerciji**.

Ako pretpostavimo harmonijsko gibanje masa

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos \omega t \\ x_2 &= A_2 \cos \omega t \end{aligned}$$

i uvedemo supstituciju $\Omega = \omega^2$, tada sustav (2.1) prelazi u oblik

$$([\mathbf{k}] - \Omega[\mathbf{m}])\{\mathbf{A}\} = \{0\} \quad \text{ili} \quad [\mathbf{D}]\{\mathbf{A}\} = \{0\} \quad (2.2)$$

Matrica $[\mathbf{D}]$ se naziva **dinamička matrica**.

Rješenje jednadžbe (2.2) svodi se na problem određivanja **prirodnih vrijednosti**

$$|[\mathbf{k}] - \Omega[\mathbf{m}]| = 0 \quad (2.3)$$

Razvojem determinante (2.3) slijedi **frekvencijska jednadžba**

$$P(\Omega) = m_1 m_2 \Omega^2 - [k_1 m_2 + (m_1 + m_2) k_2] \Omega + k_1 k_2 = 0 \quad (2.4)$$

Korijeni ove jednadžbe, Ω_1 i Ω_2 , nazivaju se **prirodne vrijednosti vibracijskog sustava**. Iz njih slijede **prirodne frekvencije sustava**

$$\omega_1 = \sqrt{\Omega_1} \qquad \omega_2 = \sqrt{\Omega_2}$$

Ako se pojedine prirodne vrijednosti (Ω_1 odnosno Ω_2) uvrste u bilo koju jednadžbu sustava (2.2),

$$(k_1 + k_2 - \Omega m_1)A_1 - k_2 A_2 = 0$$

dobiva se omjer amplituda

$$\left(\frac{A_1}{A_2} \right)_i = \frac{k_2}{k_1 + k_2 - \Omega_i m_1} \quad i = 1, 2$$

i prirodni oblici vibriranja sustava

$$\{\Phi_1\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}_1 \quad \{\Phi_2\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}_2$$

2.1.1. Svojstva prirodnih oblika

Svojstvo prirodnih oblika vibriranja je njihova **ortogonalnost**,

$$\langle \Phi_i | [\mathbf{k}] | \Phi_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{za } i \neq j \\ K_i & \text{za } i = j \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\langle \Phi_i | [\mathbf{m}] | \Phi_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{za } i \neq j \\ M_i & \text{za } i = j \end{cases}$$

gdje su $\mathbf{K}_i$ i $\mathbf{M}_i$ **poopćena krutost** i **poopćena masa** i-tog prirodnog oblika vibriranja. Pomoću $\mathbf{K}_i$ i $\mathbf{M}_i$ dobiva se umjesto sustava (2.1) **nespregnuti sustav jednadžbi**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

iz kojeg slijede međusobno nezavisne diferencijalne jednadžbe za svaki prirodni oblik vibriranja

$$\mathbf{M}_i \ddot{x}_i + \mathbf{K}_i x_i = 0 \quad i = 1, 2$$

i neposredno prirodne frekvencije

$$\omega_i^2 = \frac{\mathbf{K}_i}{\mathbf{M}_i}$$

2.2. Prisilne vibracije

U slučaju djelovanja harmonijske uzbudne sile $F = F_0 \cos \lambda t$ na masu m_1 sustava na slici 2.1, izvodi taj sustav prisilne vibracije s **frekvencijom uzbude λ**

$$x_i = X_i \cos \lambda t \quad i = 1, 2$$

Sustav jednačbi koji opisuje ovakvo gibanje glasi

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Rješenje ovog sustava su amplitude vibriranja

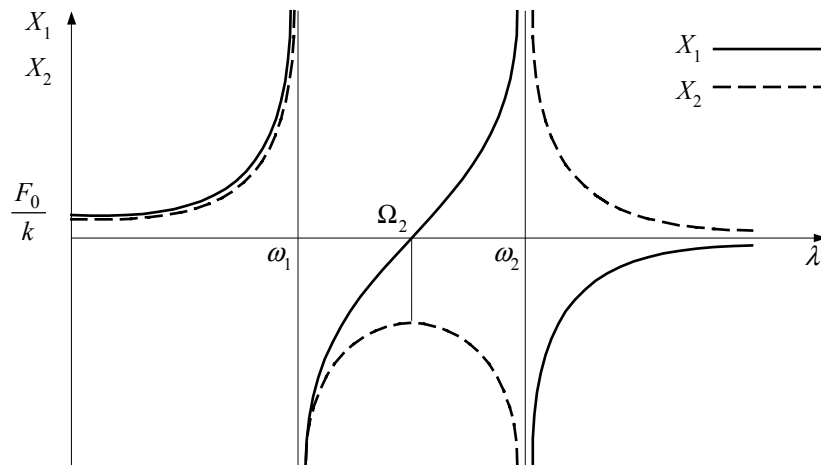
$$X_1 = \frac{\Omega_2^2 - \lambda^2}{P(\lambda)} \frac{F_0}{m_1} \quad X_2 = \frac{\Omega_2^2}{P(\lambda)} \frac{F_0}{m_1} \quad (2.8)$$

gdje je

$$P(\lambda) = \lambda^4 - (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_{12}^2) \lambda^2 + \Omega_1^2 \Omega_2^2$$

$$\Omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1} \quad \Omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2} \quad \Omega_{12}^2 = \frac{k_2}{m_1}$$

Ovisnost amplituda vibriranja X_1 i X_2 o frekvenciji uzbude λ , izražena izrazom (2.8), prikazana je dijagramski na slici 2.2. Veličine ω_1 i ω_2 su prirodne frekvencije sustava.



Slika 2.2. Amplitude vibriranja sustava s 2 stupnja slobode

Uočljivo je da će masa m_1 mirovati u slučaju kada frekvencija uzbude λ poprimi vrijednost Ω_2 .

2.2.1. Metoda superpozicije prirodnih oblika vibriranja

Koristeći svojstvo ortogonalnosti (2.5) prirodnih oblika vibriranja $\{\Phi_i\}$, može se odziv promatranog sustava u slučaju prisilnih vibracija, umjesto rješavanja sustava jednačbi (2.7), odrediti superpozicijom prirodnih oblika vibriranja

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \{\Phi_1\}q_1(t) + \{\Phi_2\}q_2(t) \quad (2.9)$$

gdje su $q_1(t)$ i $q_2(t)$ poopćene koordinate.

Pošto su prirodni oblici vibriranja poznati iz prethodno izvršene analize slobodnih vibracija, u izrazu (2.9) nepoznanice su q_1 i q_2 . Ako se u sustav (2.7) uvrsti izraz (2.9) slijedi

$$[m](\{\Phi_1\}\ddot{q}_1 + \{\Phi_2\}\ddot{q}_2) + [k](\{\Phi_1\}q_1 + \{\Phi_2\}q_2) = \{f\}$$

te, ako se ova jednačba uzastopce pomnoži s lijeva prvo s $\langle \Phi_1 \rangle$ i zatim s $\langle \Phi_2 \rangle$, poštujući svojstvo ortogonalnosti (2.5), dobiju se dvije nespregnute diferencijalne jednačbe

$$M_i \ddot{q}_i + K_i q_i = f_i \quad i = 1, 2 \quad (2.10)$$

gdje je

$$f_i = \langle \Phi_i \rangle \{f\}$$

Pod pretpostavkom harmonijskih vibracija,

$$q_i = Q_i \cos \lambda t$$

može se iz jednačbe (2.10) neposredno izraziti nepoznata amplituda poopćene koordinate Q_i

$$Q_i = \frac{(Q_i)_{st}}{1 - \beta_i^2} \quad (2.11)$$

gdje je

$$(Q_i)_{st} = \frac{f_i}{K_i} \quad \beta_i = \frac{\lambda}{\omega_i}$$

Određivanjem Q_i određene su i amplitude vibriranja pojedinih masa sustava prema izrazu (2.9),

$$X_1 = \sum_i (A_1)_i Q_i \quad X_2 = \sum_i (A_2)_i Q_i \quad i = 1, 2$$

Opisana metoda, iako prikazana na primjeru sustava s dva stupnja slobode gibanja, vrlo je prikladna kod analize prisilnih vibracija sustava s mnogo stupnjeva slobode gibanja. Naime, nakon analize slobodnih vibracija, zadana frekvencija uzbude λ se uspoređi s izračunatim prirodnim frekvencijama sustava ω_i , te se odredi njoj najbliža prirodna frekvencija. Obzirom da oblici vibriranja koji su izvan područja ove prirodne frekvencije, neće biti pobuđeni na vibriranje, dovoljno je odziv strukture aproksimirati sumom nekoliko prirodnih oblika vibriranja koji se nalaze u području spomenute najbliže prirodne frekvencije. Na taj način se proračun prisilnih vibracija reducira od rješavanja cjelokupnog sustava jednačbi tipa (2.7) na rješavanje nekoliko nespregnutih jednačbi tipa (2.10).

2.3. Vibracije fleksijskih sustava

Pod fleksijskim sustavom podrazumijevamo sustav masa m_i ($i = 1, n$) koji vibrira na nosaču krutosti EI . Analizu vibracija ovakvog sustava najprikladnije je provesti **metodom utjecajnih koeficijenata**.

2.3.1. Utjecajni koeficijenti

Utjecajni koeficijent α_{ij} je definiran kao progib nosača na mjestu i uslijed djelovanja jedinične sile na mjestu j . U slučaju da na mjestima $i = 1, 2, \dots, n$ duž nosača djeluju sile $F_1, \dots, F_n$, progib nosača na tim mjestima može se odrediti kao linearna kombinacija utjecajnih koeficijenata,

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}F_1 + \alpha_{12}F_2 + \dots + \alpha_{1n}F_n \\ x_2 &= \alpha_{21}F_1 + \alpha_{22}F_2 + \dots + \alpha_{2n}F_n \\ &\vdots \\ x_n &= \alpha_{n1}F_1 + \alpha_{n2}F_2 + \dots + \alpha_{nn}F_n \end{aligned}$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

Matrica utjecajnih koeficijenata naziva se **matrica gipkosti**. Dijagonalni elementi ove matrice ($\alpha_{11} \dots \alpha_{nn}$) su utjecajni koeficijenti na mjestu djelovanja sile i uvijek su pozitivni.

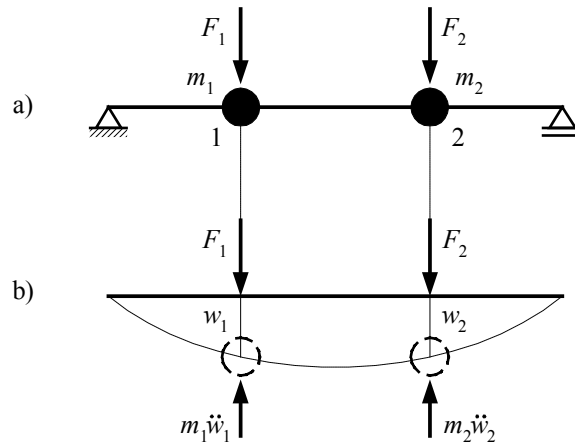
Za utjecajne koeficijente vrijedi općenito **Maxwelov teorem** o uzajamnosti pomaka koji glasi: pomak koji nastaje na mjestu i uslijed djelovanja jedinične sile na mjestu j jednak je pomaku koji nastaje na mjestu j uslijed djelovanja jedinične sile na mjestu i .

Ako se Maxwelov teorem primijeni na utjecajne koeficijente, tada vrijedi

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad (2.13)$$

2.3.2 Analiza vibracija

U okviru ovog poglavlja pokazat će se analiza vibriranja fleksijskog sustava s dva stupnja slobode. Međutim, svi postavljeni izrazi i razvijen postupak mogu se primjeniti i na sustave s više od dva stupnja slobode gibanja. Na slici 2.3a prikazan je takav sustav s dvije mase, m_1 i m_2 i s harmonijskim uzbudnim silama F_1 i F_2 .



Slika 2.3. Fleksijski sustav s dva stupnja slobode gibanja

Ako se prema slici 2.3b uzmu u obzir sile (po veličini i po smjeru) koje djeluju na mase m_1 i m_2 , tada se pomaci ovih masa mogu izraziti pomoću utjecajnih koeficijenata prema jednadžbi (2.12),

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 - m_1 \ddot{w}_1 \\ F_2 - m_2 \ddot{w}_2 \end{Bmatrix}$$

Uz pretpostavku harmonijskih sila i pomaka,

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \\ W_1 \\ W_2 \end{Bmatrix} \cos \lambda t$$

dobiva se sljedeći sustav jednadžbi

$$\begin{bmatrix} 1 - \omega^2 \alpha_{11} m_1 & -\omega^2 \alpha_{12} m_2 \\ -\omega^2 \alpha_{21} m_1 & 1 - \omega^2 \alpha_{22} m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \alpha_{11} + F_{20} \alpha_{12} \\ F_{10} \alpha_{21} + F_{20} \alpha_{22} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Sada se analiza vibracija grana u dva smjera: slobodne i prisilne vibracije.

a) Slobodne vibracije

U tom slučaju $\lambda = \omega$ i $F_{10} = F_{20} = 0$, te sustav (2.14) postaje homogen. Uvođenjem $\Omega = \omega^2$ proizlazi

$$\begin{bmatrix} 1 - \Omega \alpha_{11} m_1 & -\Omega \alpha_{12} m_2 \\ -\Omega \alpha_{21} m_1 & 1 - \Omega \alpha_{22} m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Iz uvjeta netrivialnosti rješenja (2.15), $\det[\mathbf{D}] = 0$, slijedi frekvencijska jednačba

$$P(\Omega) = (1 - \Omega \alpha_{11} m_1)(1 - \Omega \alpha_{22} m_2) - \Omega \alpha_{12} \alpha_{21} m_1 m_2 = 0 \quad (2.16)$$

Korijeni jednačbe (2.16) su **prirodne vrijednosti** fleksijskog sustava Ω_1 i Ω_2 iz kojih slijede i **prirodne frekvencije** sustava $\omega_1 = \sqrt{\Omega_1}$ i $\omega_2 = \sqrt{\Omega_2}$. Uvrštavanjem pojedinih prirodnih vrijednosti (Ω_1 , odnosno Ω_2) u bilo koju od jednačbi sustava (2.15) određuju se omjeri

$$\left(\frac{A_1}{A_2} \right)_1 \quad \text{i} \quad \left(\frac{A_1}{A_2} \right)_2$$

koji definiraju **prirodne oblike vibriranja** fleksijskog sustava.

$$\{\Phi_1\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}_1 \quad \{\Phi_2\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}_2$$

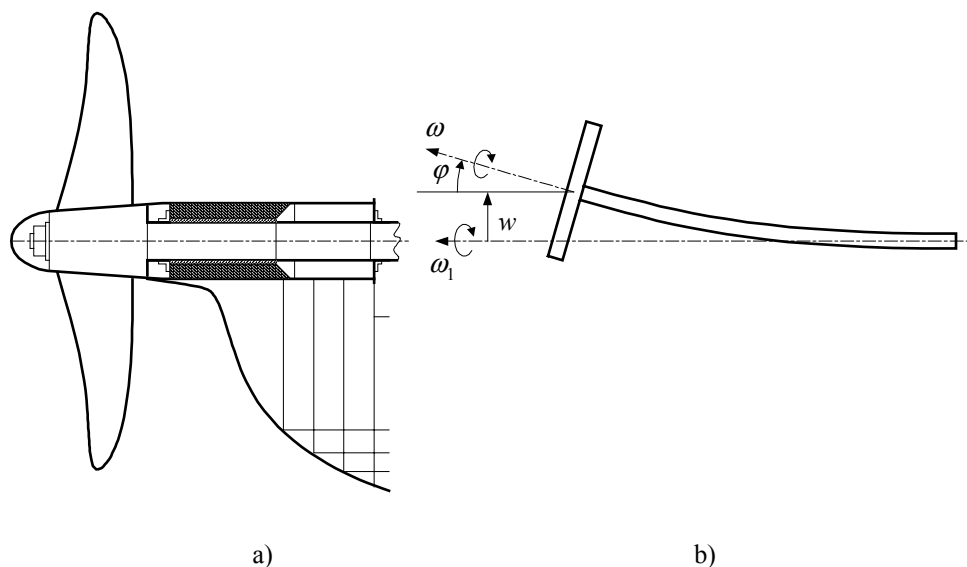
Time su sve značajke slobodnih vibracija određene.

b) Prisilne vibracije

U tom slučaju se rješava nehomogen sustav jednačbi (2.14), a rješenje su amplitude vibriranja pojedinih masa W_1 i W_2 u ovisnosti o frekvenciji uzbude λ i amplitudama uzbudnih sila, F_{10} i F_{20} . I ovdje se, alternativno, može primijeniti metoda superpozicije prethodno određenih prirodnih oblika vibriranja.

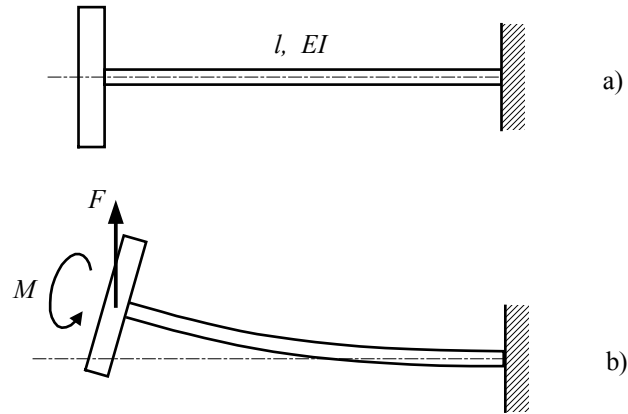
2.4. Vitlajuće vibracije osovine brodskog vijka

Brodski vijak smješten je na prepustu svoje osovine koja je oslonjena u ležaju statvene cijevi prema slici 2.4a. Uslijed vlastite težine vijka i hidrodinamskih vijčanih sila dolazi do savijanja osovine. Uslijed toga brodski vijak vrši složeno gibanje s progibom w i kutom nagiba φ . Pritom dolazi do izvorne rotacije osovine kutnom brzinom ω i do rotacije vijka oko nedeformirane osi kutnom brzinom ω_1 . Ovako spregnuto gibanje brodskog vijka sa svojom osovino naziva se **vitlanje**.



Slika 2.4. Vitlajuće vibracije brodskog vijka

U skladu s tim može se postaviti ekvivalentni fleksijski sustav u obliku konzole duljine l i krutosti EI s diskom mase m . Disk ima polarni moment inercije J_p i aksijalni moment inercije J_x prema slici 2.5.a.



Slika 2.5. Ekvivalentni sustav s dva stupnja slobode

U slučaju dinamičke ravnoteže, na disk djeluje inercijska sila F i inercijski moment M . Sila F je centrifugalna sila koja nastaje kada se disk odkloni za progib w od osi rotacije,

$$F = m\omega_1^2 w$$

a moment M je giroskopski moment količine gibanja uslijed istovremene rotacije diska kutnom brzinom ω i ω_1 ,

$$M = (J_p \omega \varphi - J_x \omega_1 \varphi) \omega_1$$

Koristeći metodu utjecajnih koeficijenata mogu se postaviti izrazi za progib w i nagib φ na kraju konzole,

$$\begin{aligned} w &= \alpha_{11} F + \alpha_{12} M \\ \varphi &= \alpha_{21} F + \alpha_{22} M \end{aligned}$$

odnosno, uvrštavajući izraze za F i M ,

$$\begin{aligned} w &= (\alpha_{11} m \omega_1^2) w - \alpha_{12} J_x \omega_1^2 \left(\frac{J_p}{J_x} n - 1 \right) \varphi \\ \varphi &= (\alpha_{21} m \omega_1^2) w - \alpha_{22} J_x \omega_1^2 \left(\frac{J_p}{J_x} n - 1 \right) \varphi \end{aligned}$$

gdje je $n = \frac{\omega}{\omega_1}$

Iz ovih izraza slijedi, uz $\Omega = \omega_1^2$, sustav jednadžbi

$$\begin{bmatrix} 1 - \alpha_{11}m\lambda & \alpha_{12}J_x \left(\frac{J_p}{J_x}n - 1 \right) \lambda \\ -\alpha_{21}m\lambda & 1 + \alpha_{22}J_x \left(\frac{J_p}{J_x}n - 1 \right) \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

U slučaju krutog ležaja konzole, utjecajni koeficijenti iznose

$$\alpha_{11} = \frac{l^3}{3EI}, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{l^2}{2EI}, \quad \alpha_{22} = \frac{l}{EI}$$

Sustav (2.17) daje iz uvjeta netrivialnosti rješenja slijedeću frekvencijsku jednadžbu

$$P(\Omega) = (1 - \alpha_{11}m\lambda) \left[1 + \alpha_{22}J_x \left(\frac{J_p}{J_x}n - 1 \right) \lambda \right] + \alpha_{12}\alpha_{21}mJ_x \left(\frac{J_p}{J_x}n - 1 \right) \lambda^2 = 0 \quad (2.18)$$

Osovina može vitlati u smjeru svoje vrtnje što se zove **naprednim** vitlanjem, te u smjeru suprotnom od smjera svoje vrtnje što se zove **natražnim** vitlanjem. Osnovno obilježje vitlanja osovina je redni broj vitlanja n koji izražava odnos broja vitlaja osovine ω_1 u odnosu na broj okretaja oko vlastite osi ω . Sve rotirajuće osovine imaju beskonačno mnogo prirodnih frekvencija vitlanja zbog giroskopskog efekta koji ovisi o brzini rotacije. Svakom rednom broju vitlanja pripadaju dvije vrijednosti prirodne frekvencije vitlanja pojedinog prirodnog oblika vibriranja: jedna vrijednost za napredno, a druga za natražno vitlanje.

2.5. Lagrangeove jednadžbe

U prethodnim glavama ovog poglavlja razvijali smo diferencijalne jednadžbe dinamičkog sustava na osnovi 2. Newtonovog zakona gibanja, odnosno d'Alembertovog načela dinamičke ravnoteže, što je isto. Međutim, postoje složeni vibracijski sustavi kod kojih postavljanje jednadžbi na osnovi spomenutog zakona (odnosno načela) postaje teško i gdje je pristup preko energije i rada mnogo prikladniji. Lagrangeove jednadžbe su diferencijalne jednadžbe gibanja na poopćenim koordinatama dinamičkog sustava. One povezuju kinetičku i potencijalnu energiju sustava s radom uzbudnih sila u obliku,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.19)$$

gdje je

q_i	poopćena koordinata sustava
$U = U(q_1, \dots, q_n)$	kinetička energija sustava
$V = V(q_1, \dots, q_n)$	potencijalna energija sustava
Q_i	poopćena sila (pridružena poopćenoj koordinati)

Poopćena koordinata q_i . Kod dinamičkog sustava s n stupnjeva slobode gibanja, koordinata q_i je jedna od n nezavisnih koordinata koje su potrebne za opis gibanja tog sustava.

Kinetička energija $U(q_1, \dots, q_n)$, izražena kao funkcija poopćenih koordinata, glasi,

$$U(q_1, \dots, q_n) = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}} | [\mathbf{m}] \{ \dot{\mathbf{q}} \}$$

gdje je

$$\langle \dot{\mathbf{q}} \rangle = \langle \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n \rangle \quad \{ \dot{\mathbf{q}} \} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix} \quad \text{vektor poopćenih brzina sustava}$$

$$[\mathbf{m}] \quad \text{matrica masa sustava}$$

Potencijalna energija $V(q_1, \dots, q_n)$, izražena kao funkcija poopćenih koordinata, glasi

$$V(q_1, \dots, q_n) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{q} | [\mathbf{k}] \{ \mathbf{q} \}$$

gdje je

$$\langle \mathbf{q} \rangle = \langle q_1, \dots, q_n \rangle \quad \{ \mathbf{q} \} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} \quad \text{vektor poopćenih kordinata sustava}$$

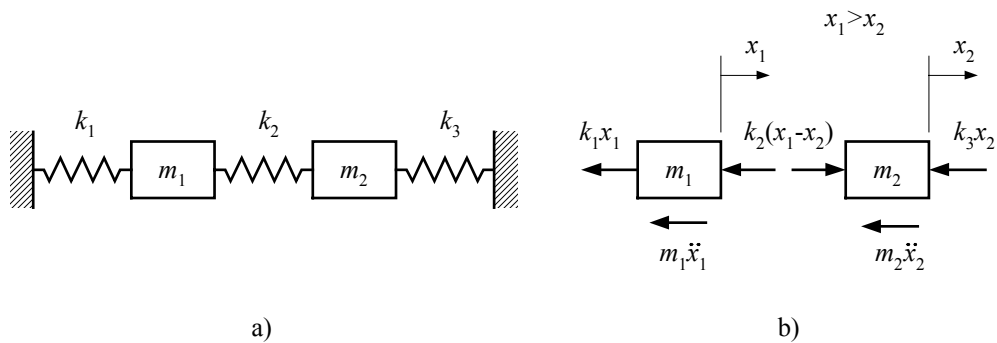
$$[\mathbf{k}] \quad \text{matrica krutosti sustava}$$

2.6. Primjeri

PRIMJER 2.1.

Odredite prirodne frekvencije i oblike vibriranja za sustav prikazan na slici 2.6a.

Zadano: $m_1 = 3m$, $m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k$, $k_3 = 3k$



Slika 2.6. Primjer 2.1.

Uvjeti dinamičke ravnoteže prema slici 2.6b,

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_3 x_2 - k_2 (x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned}$$

ili u obliku (2.2)

$$\left(\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} - \Omega \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Frekvencijska jednadžba glasi

$$P(\Omega) = m_1 m_2 \Omega^2 - [k_1 m_2 + (m_1 + m_2) k_2 + k_3 m_1] \Omega + k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3 = 0$$

Ako se uzmu u obzir zadane vrijednosti, gornja jednadžba poprima oblik,

$$3m^2 \Omega^2 - 14km\Omega + 7k^2 = 0$$

ili

$$\Omega^2 - \frac{14}{3} \frac{k}{m} \Omega + \frac{7}{3} \frac{k^2}{m^2} = 0$$

Korijeni ove jednadžbe su prirodne vrijednosti,

$$\begin{aligned} \Omega_1 = \omega_1^2 &= 0,57 \frac{k}{m} \\ \Omega_2 = \omega_2^2 &= 4,096 \frac{k}{m} \end{aligned}$$

te su prirodne frekvencije

$$\omega_1 = 0,755 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = 2,024 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

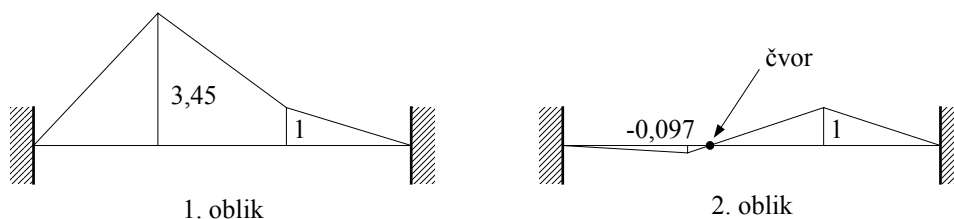
Iz omjera

$$\left(\frac{A_1}{A_2} \right)_i = \frac{k}{2k - \Omega_i 3m} \quad i = 1, 2$$

proizlaze prirodni oblici vibriranja,

$$\{\Phi_1\} = \begin{Bmatrix} 3,45 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \{\Phi_2\} = \begin{Bmatrix} -0,097 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

koji su prikazani na slici 2.7.



Slika 2.7. Primjer 2.1

PRIMJER 2.2

Za sustav prema slici 2.1 odrediti prirodne frekvencije i oblike vibriranja. U slučaju djelovanja sile $F = F_0 \cos \lambda t$ na masu m odrediti amplitude vibriranja obje mase.

Jednadžbe gibanja postaviti pomoću Lagrangeovih jednadžbi i usporediti sa sustavom jednadžbi (2.1).

Amplitude vibriranja obje mase, X_1 i X_2 , odrediti metodom superpozicije oblika vibriranja i usporediti s izrazima (2.8).

$$\text{Zadano: } m_1 = m_2 = m, \quad k_1 = k_2 = k, \quad F_0, \quad \lambda = 1,55 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Obzirom da su poopcene koordinate x_1 i x_2 , Lagrangeove jednadžbe glase

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_1} &= Q_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_2} &= Q_2 \end{aligned}$$

Kinetička energija,

$$U = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

Potencijalna energija,

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2$$

Langrangeove jednadžbe,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m_1 \dot{x}_1) + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) &= F \\ \frac{d}{dt} (m_2 \dot{x}_2) - k_2 (x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= F \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Gornji sustav identičan je sustavu (2.1) (homogen) odnosno sustavu (2.7) (nehomogen). Obzirom na gornji zaključak moguće je prirodne frekvencije odrediti primjenom frekvencijske jednadžbe (2.4) koja sa zadanim vrijednostima glasi,

$$\Omega^2 - 3\Omega \frac{k}{m} + \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0$$

gdje je $\Omega = \omega^2$

Korijeni ove jednadžbe su prirodne vrijednosti

$$\Omega_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m} = 0,382 \frac{k}{m} \quad \Omega_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m} = 2,618 \frac{k}{m}$$

odnosno prirodne frekvencije

$$\omega_1 = \sqrt{\Omega_1} = 0,618 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\Omega_2} = 1,618 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

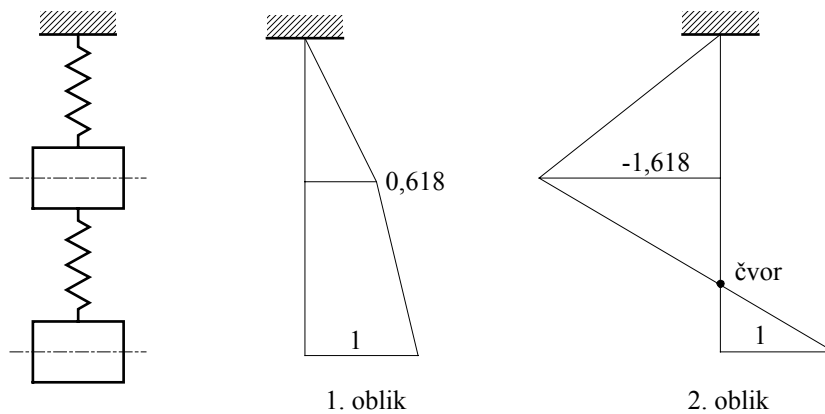
Prirodni oblici slijede iz prve jednadžbe sustava (2.2),

$$(2k - \Omega_i m)A_1 - kA_2 = 0$$

Ako se pretpostavi da je $A_2 = 1$ i ako se uzastopce uvrste Ω_1 i Ω_2 , slijedi

$$\{\Phi_1\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0,618 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \{\Phi_2\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} -1,618 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Grafički prikaz prirodnih oblika vibriranja prikazan je na slici 2.8.



Slika 2.8. Primjer 2.2

Provjera prirodnih oblika vibriranja ispitivanjem njihove ortogonalnosti,

$$\langle \Phi_1 | [k] | \Phi_2 \rangle = \langle 0,618 \quad 1 | \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1,618 \\ 1 \end{Bmatrix} \rangle = 0$$

$$\langle \Phi_1 | [m] | \Phi_2 \rangle = \langle 0,618 \quad 1 | \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1,618 \\ 1 \end{Bmatrix} \rangle = 0$$

Poopćene krutosti,

$$K_1 = \langle \Phi_1 | [k] | \Phi_1 \rangle = \langle 0,618 \quad 1 | \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,618 \\ 1 \end{Bmatrix} \rangle = 0,528k$$

$$K_2 = \langle \Phi_2 | [k] | \Phi_2 \rangle = \langle -1,618 \quad 1 | \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1,618 \\ 1 \end{Bmatrix} \rangle = 9,472k$$

Poopćene mase,

$$M_1 = \langle \Phi_1 | [m] | \Phi_1 \rangle = \langle 0,618 \quad 1 | \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,618 \\ 1 \end{Bmatrix} \rangle = 1,382m$$

$$M_2 = \langle \Phi_2 | [m] | \Phi_2 \rangle = \langle -1,618 \quad 1 | \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1,618 \\ 1 \end{Bmatrix} \rangle = 3,618m$$

Provjera prirodnih frekvencija,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_1}{M_1}} = 0,618 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K_2}{M_2}} = 1,618 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

što je identično s gore dobivenim vrijednostima.

Kod analize **prisilnih vibracija** odredit ćemo amplitude vibriranja obiju masa kao superpoziciju prirodnih oblika vibriranja prema izrazu (2.9),

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \{\Phi_1\} Q_1 + \{\Phi_2\} Q_2$$

Ako se usporedi uzbudna frekvencija $\lambda = 1,55 \sqrt{\frac{k}{m}}$ s prirodnim frekvencijama sustava,

proizlazi da je njoj bliska $\omega_2 = 1,618 \sqrt{\frac{k}{m}}$. Stoga bi u gornjem izrazu za određivanje X_1 i X_2

bilo dovoljno uzeti samo drugi član sume s $\{\Phi_2\}$, jer će doprinos od $\{\Phi_1\}$ biti malen.

Mi ćemo ipak uzeti oba člana gornje sume, a kada odredimo X_1 i X_2 uvjerit ćemo se u gornju tvrdnju. Dakle,

$$\begin{aligned} X_1 &= (A_1)_1 Q_1 + (A_1)_2 Q_2 \\ X_2 &= (A_2)_1 Q_1 + (A_2)_2 Q_2 \end{aligned}$$

Amplitude poopćenih koordinata Q_1 i Q_2 se određuju na osnovi izraza (2.11),

$$Q_1 = \frac{1}{1 - \beta_1^2} (Q_1)_{st}$$

$$Q_2 = \frac{1}{1 - \beta_2^2} (Q_2)_{st}$$

gdje je

$$\beta_1 = \frac{\lambda}{\omega_1} = \frac{1,55 \sqrt{\frac{k}{m}}}{0,618 \sqrt{\frac{k}{m}}} = 2,508$$

$$\beta_2 = \frac{\lambda}{\omega_2} = \frac{1,55 \sqrt{\frac{k}{m}}}{1,618 \sqrt{\frac{k}{m}}} = 0,958$$

$$(Q_1)_{st} = \frac{f_1}{K_1} = \frac{(A_1)_1 F_0}{0,53k} = \frac{0,618 F_0}{0,528k} = 1,170 \frac{F_0}{k}$$

$$(Q_2)_{st} = \frac{f_2}{K_2} = \frac{(A_1)_2 F_0}{9,47k} = -\frac{1,618 F_0}{9,472k} = -0,171 \frac{F_0}{k}$$

Nakon uvrštenja slijedi

$$Q_1 = \frac{1}{1 - 2,508^2} \left(1,170 \frac{F_0}{k} \right) = -0,221 \frac{F_0}{k}$$

$$Q_2 = \frac{1}{1 - 0,958^2} \left(-0,171 \frac{F_0}{k} \right) = -2,085 \frac{F_0}{k}$$

Prema ovome, amplitude vibriranja iznose

$$X_1 = 0,618 \cdot (-0,221) \frac{F_0}{k} + (-1,618) \cdot (-2,085) \frac{F_0}{k} = 3,237 \frac{F_0}{k}$$

$$X_2 = (-0,221) \frac{F_0}{k} + 1 \cdot (-2,085) \frac{F_0}{k} = -2,306 \frac{F_0}{k}$$

U slučaju da smo uzeli u obzir samo drugi oblik vibriranja,

$$X_1 = (A_1)_2 Q_2 = (-1,618) \cdot (-2,085) \frac{F_0}{k} = 3,374 \frac{F_0}{k}$$

$$X_2 = (A_2)_2 Q_2 = 1 \cdot (-2,085) \frac{F_0}{k} = -2,085 \frac{F_0}{k}$$

Kao što smo i pretpostavili, oba rezultata se međusobno malo razlikuju i ujedno prate 2. prirodni oblik vibriranja.

Amplitude vibriranja prema izrazima (2.8), pri čemu je

$$\Omega_1^2 = \Omega_2^2 = \Omega_{12}^2 = \frac{k}{m},$$

imaju ovaj oblik

$$X_1 = \frac{(1 - 1,55^2) \frac{k}{m}}{(1,55^4 - 3 \cdot 1,55^2 + 1) \cdot \left(\frac{k}{m}\right)^2} \frac{F_0}{m} = \frac{-1,403}{-0,42} \frac{F_0}{k} = 3,34 \frac{F_0}{k}$$

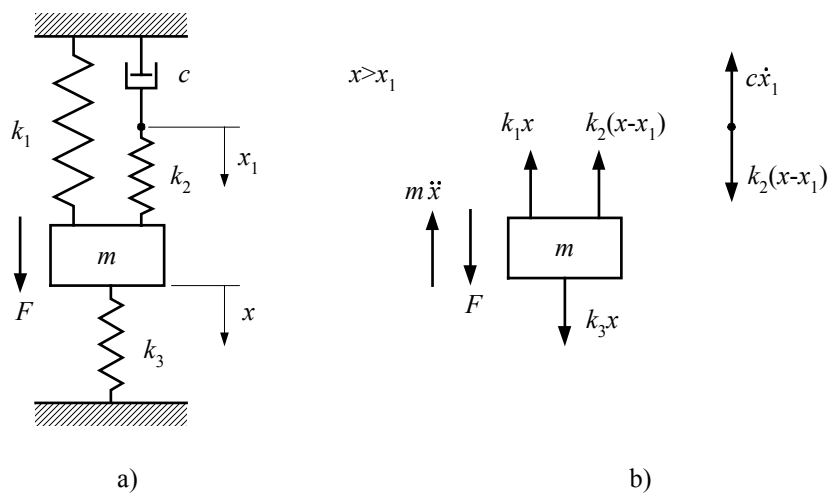
$$X_2 = \frac{\frac{k}{m}}{-0,42 \left(\frac{k}{m}\right)^2} \frac{F_0}{m} = -2,301 \frac{F_0}{k}$$

Usporedbom se vidi dobro slaganje rezultata dobivenih pomoću dvije različite metode.

PRIMJER 2.3

Za sustav prema slici 2.9a odrediti amplitudu vibriranja i kut faznog pomaka mase m u odnosu na uzбудnu silu $F = F_0 \cos \lambda t$.

Zadano: $m, k_1, k_2, k_3, c, F_0, \lambda$



Slika 2.9. Primjer 2.3

Postavljanjem jednadžbi dinamičke ravnoteže za sile prema slici 2.9b. slijedi

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + (k_1 + k_2 + k_3)x - k_2x_1 &= F \\ c\dot{x}_1 - k_2(x - x_1) &= 0 \end{aligned}$$

Ako se pretpostavi kompleksni oblik,

$$\bar{x} = \bar{X}e^{i\lambda t} \quad \bar{x}_1 = \bar{X}_1e^{i\lambda t} \quad \bar{F} = \bar{F}_0e^{i\lambda t}$$

gornji sustav jednadžbi poprima oblik

$$\begin{bmatrix} (k - \lambda^2 m) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + i\lambda c) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{X}_1 \end{Bmatrix} e^{i\lambda t} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_0 \\ 0 \end{Bmatrix} e^{i\lambda t}$$

gdje je $k = k_1 + k_2 + k_3$.

Rješenje sustava za masu m u kompleksnom obliku glasi

$$\bar{X} = \frac{k_2 + i\lambda c}{[(k - m\lambda^2)k_2 - k_2^2] + i(k - m\lambda^2)\lambda c}$$

Realna amplituda vibriranja X mase m ,

$$X = \frac{\sqrt{k_2^2 + \lambda^2 c^2}}{\sqrt{[(k - m\lambda^2)k_2 - k_2^2]^2 + [(k - m\lambda^2)\lambda c]^2}}$$

Kut faznog pomaka ε vibriranja mase m ,

$$\varepsilon = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\alpha_1 = \arctg \frac{\lambda c}{k_2} \quad \alpha_2 = \arctg \frac{(k - m\lambda^2)\lambda c}{(k - m\lambda^2)k_2 - k_2^2}$$

Zakon vibriranja mase m ,

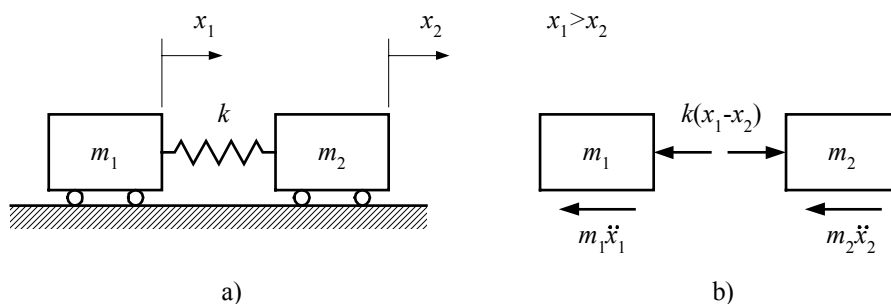
$$x = X \cos(\lambda t - \varepsilon)$$

PRIMJER 2.4

Dva vagona, svaki težine G , međusobno su povezani elastičnom spojkom krutosti k . Odrediti prirodnu frekvenciju sustava.

Zadano: $G = 25 \text{ kN}$, $k = 2800 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

Opisani sustav može se prikazati prema slici 2.10a.



Slika 2.10. Primjer 2.3

Postavljajući uvjete dinamičke ravnoteže sila prema slici 2.10b možemo pisati

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k(x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned}$$

Uz pretpostavku

$$x_1 = X_1 \cos \omega t \quad x_2 = X_2 \cos \omega t \quad \Omega = \omega^2$$

slijedi

$$\begin{bmatrix} k - \Omega m_1 & -k \\ -k & k - \Omega m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Frekvencijska jednadžba glasi

$$P(\Omega) = (k - \Omega m_1)(k - \Omega m_2) - k^2 = 0$$

ili

$$\Omega^2 - k \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = 0$$

Korijeni ove jednačbe iznose

$$\Omega_1 = 0$$

$$\Omega_2 = \omega^2 = k \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

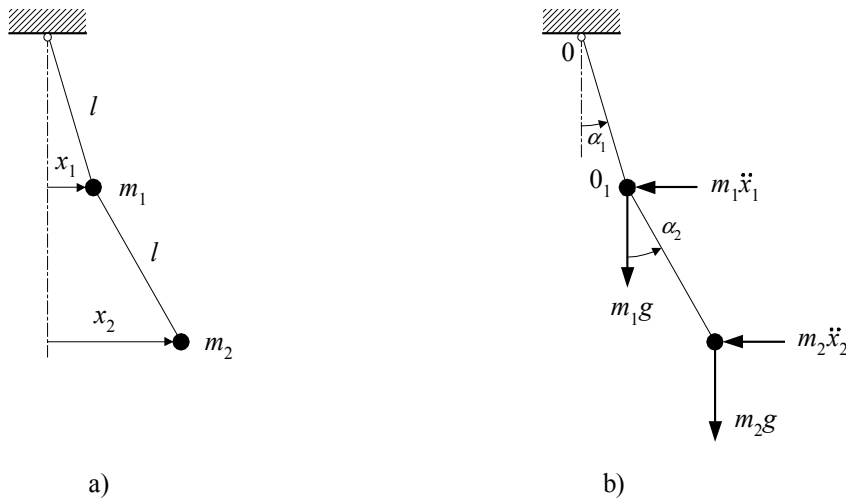
U zadanom primjeru $m_1 = m_2 = m$, te dobivamo da je prirodna frekvencija vibriranja vagona

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} = 15,72 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

PRIMJER 2.5

Za dvostruko njihalo prema slici 2.11a odrediti prirodne frekvencije i pripadne oblike vibriranja. Pretpostaviti male amplitude njihanja.

Zadano: l , $m_1 = m_2 = m$



Slika 2.11. Primjer 2.5

Potrebne jednačbe gibanja zadanog sustava mogu se izvesti iz uvjeta dinamičke ravnoteže sila prema slici 2.11b i to iz sume momenata s obzirom na točku O i točku O_1 ,

$$m_1 \ddot{x}_1 l \text{ctg } \alpha_1 + m_1 g x_1 + m_2 \ddot{x}_2 (l \text{ctg } \alpha_1 + l \text{ctg } \alpha_2) + m_2 g x_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 l \text{ctg } \alpha_2 + m_2 g (x_2 - x_1) = 0$$

Pritom je zbog malih x_1 i x_2

$$\text{ctg } \alpha_1 = \frac{\sqrt{l^2 - x_1^2}}{l} \approx 1$$

$$\text{ctg } \alpha_2 = \frac{\sqrt{l^2 - (x_2 - x_1)^2}}{l} \approx 1$$

Pretpostavka harmonijskih vibracija,

$$x_1 = A_1 \cos \omega t \quad x_2 = A_2 \cos \omega t \quad \Omega = \omega^2$$

te za zadane vrijednosti $m_1 = m_2 = m$ slijedi

$$\begin{bmatrix} g - \Omega l & g - \Omega 2l \\ -g & g - \Omega l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Frekvencijska jednačba glasi

$$P(\Omega) = \Omega^2 - 4 \frac{g}{l} \Omega + 2 \frac{g^2}{l^2} = 0$$

Korijeni gornje jednačbe iznose

$$\Omega_{1,2} = \frac{g}{l} (2 \mp \sqrt{2})$$

odnosno prirodne frekvencije

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l} (2 - \sqrt{2})} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} (2 + \sqrt{2})}$$

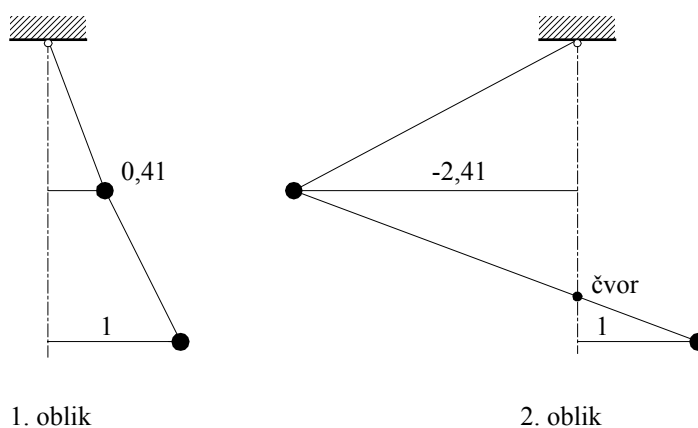
Odnos amplituda slijedi iz druge jednačbe gornjeg matričnog sustava,

$$\left(\frac{A_1}{A_2} \right)_i = 1 - \frac{\Omega_i l}{g}$$

Uvrštavanjem Ω_1 i Ω_2 slijedi

$$\left(\frac{A_1}{A_2} \right)_1 = 0,41 \quad \left(\frac{A_1}{A_2} \right)_2 = -2,41$$

Oblici vibriranja prikazani su na slici 2.12.

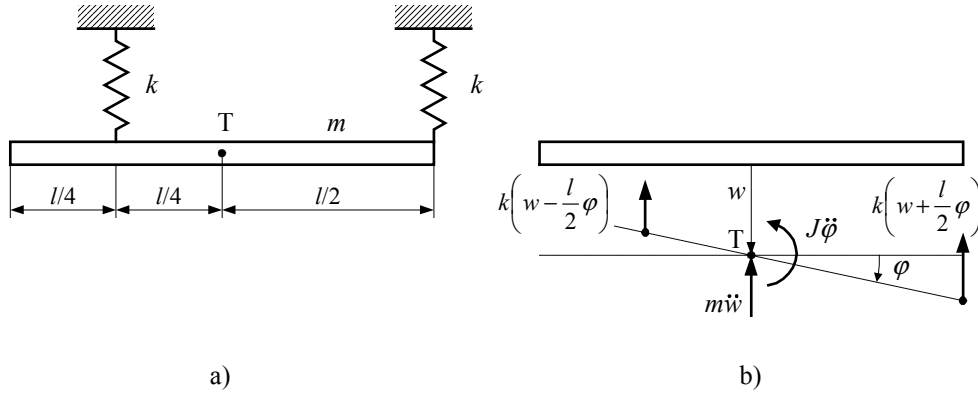


Slika 2.12. Primjer 2.5

PRIMJER 2.6

Jednolika kruta greda mase m i duljine l ovješena je s dvije opruge, svaka krutosti k , prema slici 2.13a. Odrediti prirodne frekvencije i oblike vibriranja grede.

Zadano: m, k



Slika 2.13. Primjer 2.5

Obzirom da će greda prilikom vibriranja vršiti ravninsko gibanje, ono se može opisati uz pomoć nezavisnih koordinata w i φ prema slici 2.13.b. Prema istoj slici slijede iz uvjeta ravnoteže vertikalnih sila i momenata oko težišta T ove jednačbe

$$m\ddot{w} + k\left(w + \frac{1}{2}l\varphi\right) + k\left(w - \frac{1}{4}l\varphi\right)\frac{l}{4} = 0$$

$$J\ddot{\varphi} + k\left(w + \frac{1}{2}l\varphi\right)\frac{l}{2} - k\left(w - \frac{1}{4}l\varphi\right)\frac{l}{4} = 0$$

Ako se pretpostavi harmonijsko gibanje,

$$w = W \cos \omega t \quad \varphi = \Phi \cos \omega t \quad \Omega = \omega^2$$

i ako je $J = \frac{ml^2}{12}$,

tada se gornje jednačbe mogu zapisati u matičnom obliku

$$\begin{bmatrix} 2k - \Omega m & \frac{1}{4}kl \\ \frac{1}{4}kl & \frac{5}{16}kl^2 - \Omega \frac{ml^2}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Frekvencijska jednačba glasi

$$P(\Omega) = \Omega^2 - \frac{23}{4} \frac{k}{m} \Omega + \frac{27}{4} \frac{k^2}{m^2} = 0$$

Korijeni gornje jednačbe iznose

$$\Omega_1 = 1,64 \frac{k}{m} \quad \Omega_2 = 4,11 \frac{k}{m}$$

a prirodne frekvencije

$$\omega_1 = 1,28 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_2 = 2,03 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

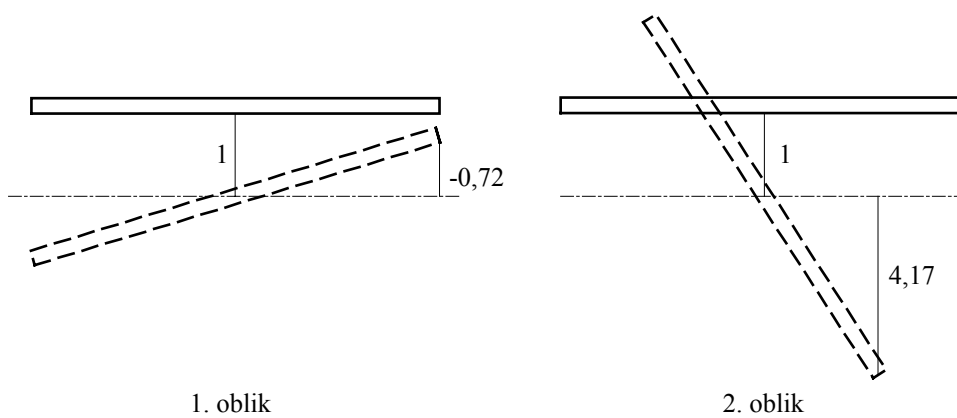
Odnos amplituda može se postaviti iz prve jednačbe gornjeg matričnog sustava,

$$\left(\frac{\frac{1}{2} l \Phi}{\frac{2}{W}} \right)_i = -2 \left(2 - \frac{m}{k} \Omega_i \right)$$

Uvrštavanjem u gornji izraz Ω_1 odnosno Ω_2 dobivaju se prirodni oblici vibriranja

$$\left(\frac{\frac{1}{2} l \Phi}{\frac{2}{W}} \right)_1 = -0,72 \quad \left(\frac{\frac{1}{2} l \Phi}{\frac{2}{W}} \right)_2 = 4,17$$

Prirodni oblici vibriranja prikazani su na slici 2.14.



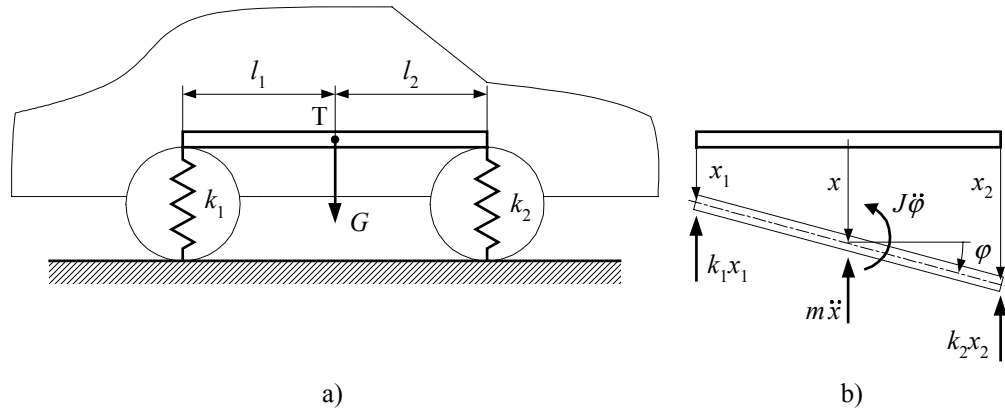
Slika 2.14. Primjer 2.6

PRIMJER 2.7

Ako se automobil s kotačima prikaže kao sustav s dva stupnja slobode gibanja prema slici 2.15a, odrediti njegove prirodne frekvencije i oblike vibriranja.

Zadano: $G = 16 \text{ kN}$, $k_1 = 29,2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$, $k_2 = 35 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$, $l_1 = 1,3 \text{ m}$, $l_2 = 1,707 \text{ m}$

$r = 1,22 \text{ m}$ (polumjer inercije s obzirom na centar mase)



Slika 2.15. Primjer 2.6

Ako se za postavljeni sustav postavi uvjet dinamičke ravnoteže za sile i momente prema slici 2.15b, slijede jednačbe

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k_1x_1 + k_2x_2 &= 0 \\ J\ddot{\phi} - k_1x_1l_1 + k_2x_2l_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ako se za nezavisne koordinate izaberu x i ϕ , tada za koordinate x_1 i x_2 slijedi

$$x_1 = x - l_1\phi \quad x_2 = x + l_2\phi$$

Uz pretpostavku harmonijskog gibanja,

$$x = X \cos \omega t \quad \phi = \Phi \cos \omega t$$

te ako je

$$\Omega = \omega^2 \quad J = mr^2$$

gornji sustav jednačbi u matičnom obliku glasi

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m\Omega & -k_1l_1 + k_2l_2 \\ -k_1l_1 + k_2l_2 & k_1l_1^2 + k_2l_2^2 - J\Omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Iz njega slijedi frekvencijska jednačba

$$P(\Omega) = m^2 r^2 \Omega^2 - m(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 + k_1 r^2 + k_2 r^2) \Omega + k_1 k_2 (l_1 + l_2)^2 = 0$$

Korijeni ove jednačbe su vlastite vrijednosti zadanog sustava. Uz zadane brojčane vrijednosti nalazimo

$$\Omega_1 = 36,55 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \quad \Omega_2 = 69,47 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2$$

iz čega slijede prirodne frekvencije

$$\omega_1 = \sqrt{\Omega_1} = 6,05 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \omega_2 = \sqrt{\Omega_2} = 8,33 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

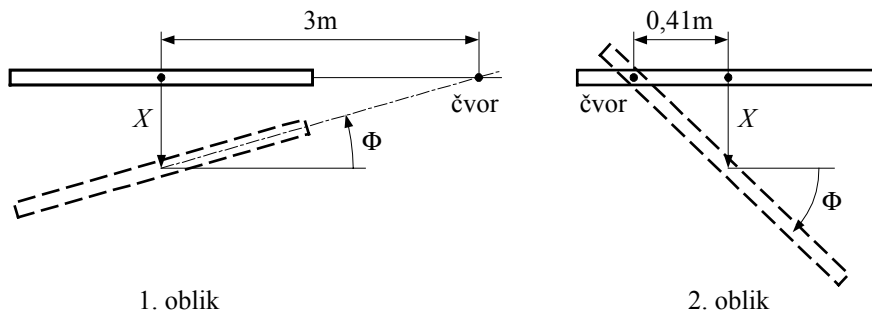
Koristeći prvu jednačbu gornjeg homogenog sustava dobiva se omjer

$$\left(\frac{X}{\Phi} \right)_i = \frac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{k_1 + k_2 - m \Omega_i} = -\frac{18,87}{64,2 - 1,583 \Omega_i}$$

odnosno

$$\left(\frac{X}{\Phi} \right)_1 = -3 \frac{\text{m}}{\text{rad}} \quad \left(\frac{X}{\Phi} \right)_2 = 0,41 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

Oblici vibriranja prikazani su na slici 2.16. Uočljiv je položaj čvora u odnosu na položaj težišta mase za svaki od prirodnih načina vibriranja.

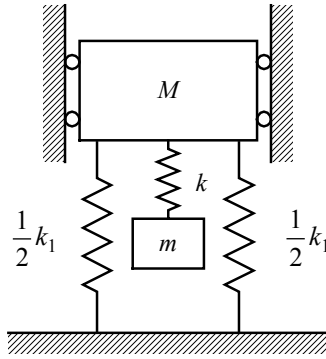


Slika 2.16. Primjer 2.7

PRIMJER 2.8

U svrhu redukcije vibracija sustava mase M ugrađen je apsorber vibracija mase m prema slici 2.17. Ako je masa M pobuđena na vibriranje centrifugalnom uzbuđom značajki $m_r \cdot e$ i broja okretaja n , odrediti potrebnu krutost k apsorbera i amplitudu vibriranja istog.

Zadano: $M = 100 \text{ kg}$, $m = 25 \text{ kg}$, $m_r \cdot e = 0,25 \text{ Nm}$, $n = 1800 \frac{\text{o}}{\text{min}}$, $k_1 = 20 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$



Slika 2.17. Primjer 2.7

Prema izrazu (2.8) proizlazi, da amplituda vibriranja mase M iznosi

$$X_M = \frac{k - \lambda^2 m}{P(\lambda)} m_r e \lambda^2$$

Vidljivo je iz gornjeg izraza za X_M , kao i iz slike 2.3, da će amplituda X_M biti nula uz uvjet

$$\lambda^2 = \frac{k}{m}$$

Dakle, ako je frekvencija uzbuđe

$$\lambda = \frac{n\pi}{30} = 188,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

tada krutost apsorbera vibriranja iznosi

$$k = m\lambda^2 = 888,26 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Amplituda vibriranja X_m apsorbera prema izrazu (2.8) iznosi

$$X_m = \frac{k}{P(\lambda)} m_r e \lambda^2$$

gdje je prema (2.4)

$$P(\lambda) = Mm\lambda^4 - [k_1 m + (M + m)k]\lambda^2 + k_1 k$$

Kada se uvrste zadane vrijednosti proizlazi

$$P(\lambda) = -78,888 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}^2}{\text{m}^2}$$

te je amplituda vibriranja apsorbera

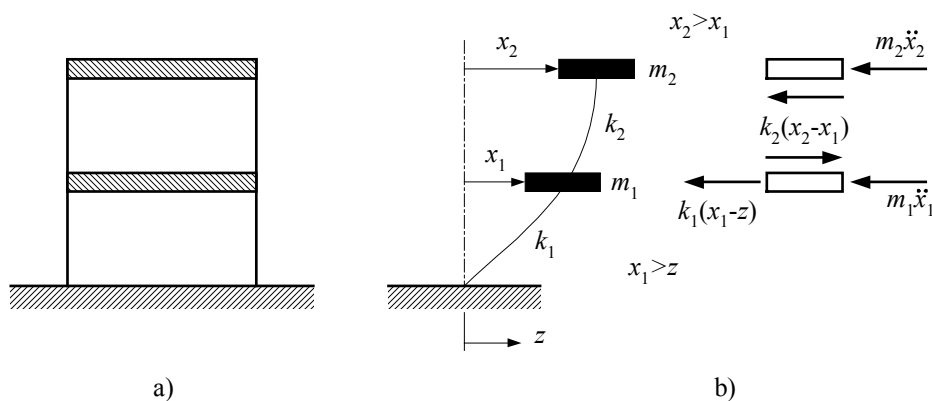
$$X_m = 0,01 \text{ m}$$

Dakle, apsorber će vibrirati s ovom amplitudom u trenutku kada će masa M glavnog sustava mirovati. To će ujedno biti minimalna amplituda vibriranja apsorbera u području frekvencije uzbude između prirodnih frekvencija ovog dvostupnjevanog sustava, što je vidljivo i prema dijagramima na slici 2.2.

PRIMJER 2.9

Dvokatna zgrada može se prikazati kao sustav od dvije međusobno elastično povezane mase prema slici 2.18a, koje mogu vibrirati horizontalno. Pretpostaviti da u slučaju potresa nastaju horizontalne vibracije temelja zgrade u obliku $z = Z_0 \cos \lambda t$. Odrediti prirodne frekvencije i oblike vibriranja zgrade, te amplitude vibriranja kao funkcije frekvencije uzbude.

Zadano: $m_2 = \frac{1}{2} m_1$, $k_2 = \frac{1}{2} k_1$, Z_0



Slika 2.18. Primjer 2.9

Postavljanjem uvjeta dinamičke ravnoteže za sile prema slici 2.18b,

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1(x_1 - z) - k_2(x_2 - x_1) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned}$$

Uz pretpostavku harmonijskih vibracija,

$$x_1 = X_1 \cos \lambda t \quad x_2 = X_2 \cos \lambda t \quad \Omega = \lambda^2$$

dobiva se sljedeća matrična jednačba

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) - \Omega m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \Omega m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 Z_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

U slučaju **slobodnih vibracija**,

$$Z = 0 \quad \Omega = \omega^2$$

te gornja matrična jednačba postaje homogena. Postavljanjem uvjeta netrivialnosti rješenja slijedi frekvencijska jednačba

$$P(\Omega) = [(k_1 + k_2) - \Omega m_1](k_2 - \Omega m_2) - k_2^2 = 0$$

U implicitnom obliku ova jednačba glasi

$$\Omega^2 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right) \Omega + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0$$

odnosno uvrštavanjem zadanih vrijednosti,

$$\Omega^2 - \frac{5}{2} \frac{k_2}{m_2} \Omega + \frac{k_2^2}{m_2^2} = 0$$

Korijeni ove jednačbe iznose

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \frac{k_2}{m_2} \quad \Omega_2 = 2 \frac{k_2}{m_2}$$

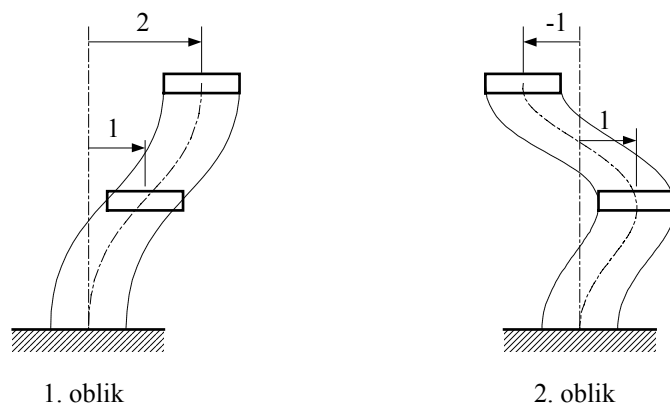
Omjer amplituda se može postaviti iz druge jednačbe homogenog sustava,

$$\begin{aligned} -k_2 A_1 + (k_2 - \Omega^2 m_2) A_2 &= 0 \\ \left(\frac{A_1}{A_2} \right)_i &= \frac{k_2}{k_2 - m_2 \Omega_i} = \frac{1}{1 - \frac{m_2}{k_2} \Omega_i} \end{aligned}$$

Ako se uzastopce uvrsti Ω_1 i Ω_2 dobivaju se odgovarajući prirodni oblici vibriranja,

$$\begin{aligned} 1. \text{ oblik} \quad \{\Phi_1\} &= \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \\ 2. \text{ oblik} \quad \{\Phi_2\} &= \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

koji su prikazani na slici 2.19.



Slika 2.19. Primjer 2.9

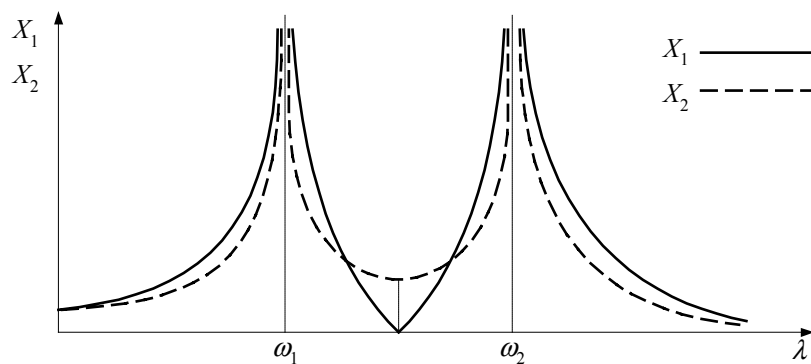
U slučaju **prisilnih vibracija** rješava se osnovna nehomogena matrična jednačba, a rješenja glase

$$X_1 = \frac{k_1(k_2 - \lambda^2 m_2)}{P(\lambda)} Z_0 \quad X_2 = \frac{k_1 k_2}{P(\lambda)} Z_0$$

odnosno, uvrštavanjem zadanih vrijednosti,

$$X_1 = -\frac{2k_2^2 \left(1 - \frac{m_2}{k_2} \lambda^2\right)}{P(\lambda)} Z_0 \quad X_2 = \frac{2k_2^2}{P(\lambda)} Z_0$$

Amplitude X_1 i X_2 prikazane su grafički kao funkcije uzbudne frekvencije na slici 2.20.



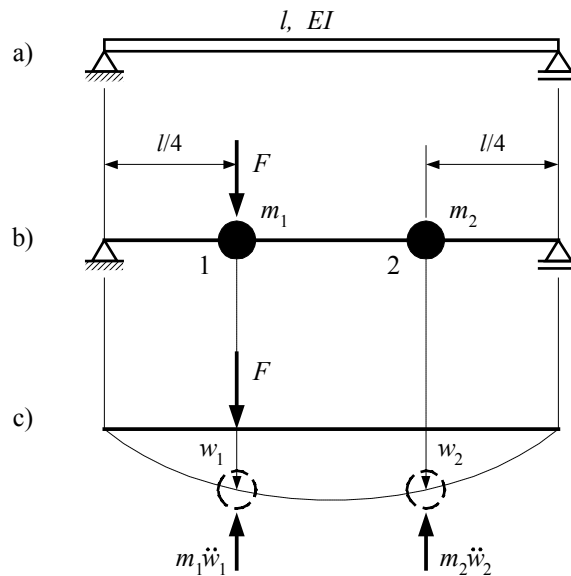
Slika 2.20. Primjer 2.9

PRIMJER 2.10

Za jednoliku, slobodno oslonjenu gredu duljine l i krutosti EI prema slici 2.21a treba odrediti prve dvije prirodne frekvencije i pripadne oblike vibriranja. Raspodijeljenu masu grede koncentrirati u dvijema točkama 1 i 2 prema slici 2.21b.

Zatim, u slučaju djelovanja uzbudne sile $F = F_0 \cos \lambda t$ na mjestu 1 treba odrediti amplitude vibriranja grede na mjestima gdje su postavljene mase. Primijeniti metodu utjecajnih koeficijenata, a amplitude vibriranja provjeriti metodom superpozicije prirodnih oblika vibriranja.

Zadano: $m = 6 \text{ t}$, $m_1 = m_2 = \frac{m}{2}$, $l = 8 \text{ m}$, $EI = 2 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$, $F_0 = 10 \text{ kN}$, $\lambda = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$



Slika 2.21. Primjer 2.10

Za određivanje **prirodnih frekvencija** može se koristiti frekvencijska jednadžba (2.16),

$$P(\Omega) = (1 - \Omega \alpha_{11} m_1)(1 - \Omega \alpha_{12} m_2) - \Omega^2 \alpha_{12} \alpha_{21} m_1 m_2 = 0$$

Ako se primijene

$$\begin{aligned} & \text{- uvjet simetrije} & \alpha_{11} &= \alpha_{22} \\ & \text{- Maxwellov teorem} & \alpha_{12} &= \alpha_{21} \end{aligned}$$

i uvrste zadane vrijednosti, tada gornja jednadžba poprima oblik

$$\Omega^2 - \frac{4\alpha_{11}}{m(\alpha_{11}^2 - \alpha_{12}^2)} \Omega + \frac{4}{m^2(\alpha_{11}^2 - \alpha_{12}^2)} = 0$$

Korijeni jednačbe glase

$$\Omega_1 = \frac{2}{m(\alpha_{11} + \alpha_{12})} \quad \Omega_2 = \frac{2}{m(\alpha_{11} - \alpha_{12})}$$

Utjecajni koeficijenti iznose

$$\alpha_{11} = \frac{9l^3}{768EI} \quad \alpha_{21} = \frac{7l^3}{768EI}$$

Poznavajući α_{11} i α_{12} dobivaju se **prirodne frekvencije**

$$\omega_1 = 9,8 \sqrt{\frac{EI}{l^3 m}} = 25 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \omega_2 = 27,7 \sqrt{\frac{EI}{l^3 m}} = 70,64 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

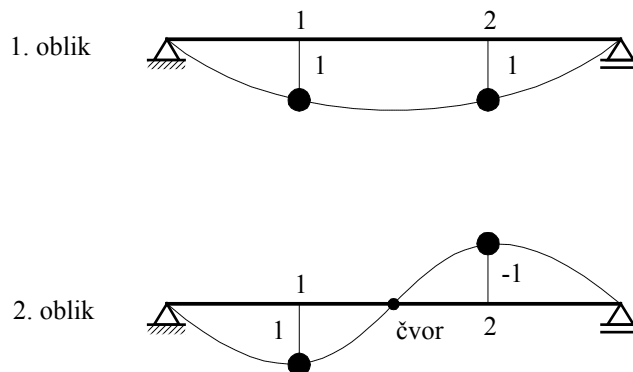
Omjer amplituda vibriranja može se odrediti iz prve jednačbe sustava (2.15),

$$\left(\frac{A_1}{A_2} \right)_i = \frac{m_2 \alpha_{12} \Omega_i}{1 - m_1 \alpha_{11} \Omega_i} = \frac{m \alpha_{12} \Omega_i}{2 - m \alpha_{11} \Omega_i}$$

Ako se uzastopce uvrsti Ω_1 i Ω_2 tada se dobivaju **prirodni oblici vibriranja** koji su prikazani na slici 2.22,

$$\{\Phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Phi_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$



Slika 2.22. Primjer 2.10

Za određivanje amplituda vibriranja kod **prisilnih vibracija** rješava se prema (2.14) sljedeći nehomogeni sustav jednačbi

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda^2 \alpha_{11} m_1 & -\lambda^2 \alpha_{12} m_2 \\ -\lambda^2 \alpha_{21} m_1 & 1 - \lambda^2 \alpha_{22} m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \alpha_{11} \\ F_0 \alpha_{21} \end{Bmatrix}$$

Koristeći sve gore navedene uvjete i zadane vrijednosti, slijede amplitude vibriranja

$$W_1 = \frac{\alpha_{11} - \lambda^2 \frac{m}{2} (\alpha_{11}^2 - \alpha_{12}^2)}{P(\lambda)} F_0$$

$$W_2 = \frac{\alpha_{12}}{P(\lambda)} F_0$$

Uvrštavanjem brojčanih vrijednosti proizlazi

$$W_1 = 0,00078 \text{ m}$$

$$W_2 = 0,00071 \text{ m}$$

Uočljivo je da je $\frac{W_1}{W_2} \approx 1$, što bi odgovaralo prvom prirodnom obliku vibriranja. To je logično,

s obzirom da frekvencija uzbude $\lambda \left(20 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$ približno odgovara prvoj prirodnoj frekvenciji $\omega_1 \left(25 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$.

Amplitude vibriranja mogu se odrediti i **metodom superpozicije prirodnih oblika vibriranja**,

$$W_1 = (A_1)_1 Q_1 + (A_1)_2 Q_2$$

$$W_2 = (A_2)_1 Q_1 + (A_2)_2 Q_2$$

Amplitude poopcenih koordinata glase

$$Q_1 = \frac{1}{1 - \beta_1^2} (Q_1)_{\text{st}} \quad Q_2 = \frac{1}{1 - \beta_2^2} (Q_2)_{\text{st}}$$

gdje je

$$\beta_1 = \frac{\lambda}{\omega_1} = 0,8 \quad \beta_2 = \frac{\lambda}{\omega_2} = 0,283$$

$$(Q_1)_{\text{st}} = \frac{f_1}{K_1} \quad (Q_2)_{\text{st}} = \frac{f_2}{K_2}$$

$$f_1 = (A_1)_1 F_0 \alpha_{11} + (A_2)_1 F_0 \alpha_{21} = F_0 (\alpha_{11} + \alpha_{21})$$

$$f_2 = (A_1)_2 F_0 \alpha_{11} + (A_2)_2 F_0 \alpha_{21} = F_0 (\alpha_{11} + \alpha_{21})$$

$$K_1 = \langle \Phi_1 | [k] | \Phi_1 \rangle = \langle 1 \quad 1 | \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \rangle = 2$$

$$K_2 = \langle \Phi_2 | [k] | \Phi_2 \rangle = \langle 1 \quad -1 | \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \rangle = 2$$

Prema tome, proizlazi

$$(Q_1)_{st} = \frac{1}{2}(\alpha_{11} + \alpha_{21})F_0 \qquad (Q_2)_{st} = \frac{1}{2}(\alpha_{11} - \alpha_{21})F_0$$

$$Q_1 = \frac{1}{1-0,8^2} \frac{1}{2}(\alpha_{11} + \alpha_{21})F_0 = 1,389(\alpha_{11} + \alpha_{21})F_0 = 0,00741 \text{ m}$$

$$Q_2 = \frac{1}{1-0,283^2} \frac{1}{2}(\alpha_{11} - \alpha_{21})F_0 = 0,543(\alpha_{11} - \alpha_{21})F_0 = 0,000362 \text{ m}$$

te su amplitude vibriranja

$$W_1 = 1 \cdot 0,00741 + 1 \cdot 0,000362 = 0,0078 \text{ m}$$

$$W_2 = 1 \cdot 0,00741 - 1 \cdot 0,000362 = 0,00705 \text{ m}$$

Ovaj rezultat se dobro podudara s rezultatom dobivenim primjenom direktne metode.

TREĆI DIO

3. Sustavi s više stupnjeva slobode gibanja i kontinuirani sustavi

U točnoj analizi vibracija sustava s više stupnjeva slobode gibanja mogu se primijeniti svi postupci koji su prikazani u Poglavlju 2 za sustav s dva stupnja slobode. Ali, ako se radi o sustavu s mnogo stupnjeva slobode, tada je točna analiza općenito složena i zahtijeva mnogo rada i vremena.

Međutim, vrlo često se rezonantno područje frekvencije uzbude nalazi u području najnižih prirodnih frekvencija promatranog sustava. U takvom slučaju, za izračunavanje odziva sustava nije nužno provesti analizu slobodnih vibracija za sve oblike vibriranja, već je dovoljno odrediti osnovnu i nekoliko najnižih prirodnih frekvencija.

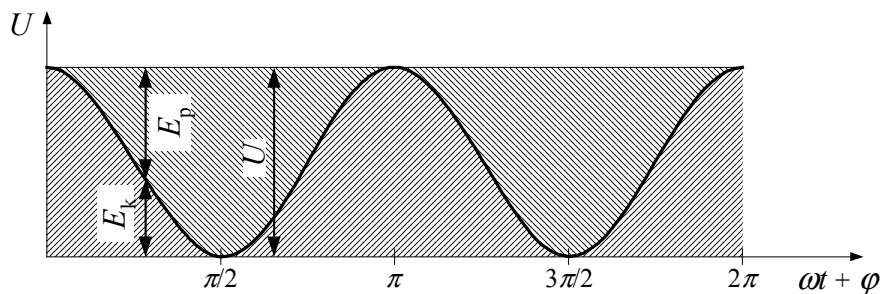
U ovom poglavlju prikazat će se približna metoda **Rayleighevog kvocijenta**. Ova metoda može dati, uz korektnu pretpostavku osnovnog oblika vibriranja, vrlo dobru procjenu osnovne prirodne frekvencije sustava s mnogo stupnjeva slobode kao i kontinuiranih sustava.

3.1. Metoda Rayleighevog kvocijenta

Poznato je da se u konzervativnim mehaničkim sustavima ukupna energija U ne rasipa, već ostaje sačuvana. Takav sustav je neprigušeni linearni sustav koji slobodno vibrira. Kod njega se ukupna energija U javlja kao zbroj potencijalne i kinetičke energije,

$$U = E_p + E_k = \text{konst.}$$

U slučaju harmonijskih vibracija odvija se neprestano proces pretvorbe jednog oblika energije u drugi, vidjeti sliku 3.1.



Slika 3.1. Energetska bilansa linearno neprigušenog sustava

Iz slike 3.1 je vidljiv odnos

$$(E_p)_{\max} = (E_k)_{\max} \quad (3.1)$$

Iz odnosa (3.1) neposredno slijedi Rayleighev kvocijent, što se može pokazati na jednostavnom primjeru sustava s jednim stupnjem slobode gibanja (vidjeti sliku 1.6.). Slijedi

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

U slučaju slobodnih harmonijskih vibracija,

$$x = X \cos \omega t$$

te je

$$(E_p)_{\max} = \frac{1}{2} kX^2$$

$$(E_k)_{\max} = \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$$

Primjenom izraza (3.1) dobivamo najjednostavniji oblik Rayleighevog kvocijenta

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

3.1.1. Sustavi s više povezanih linearnih članova

Postoje sustavi s više inercijskih članova koji su međusobno povezani bilo krutim vezama, koloturama ili zupčastim prijenosom. Kod takvih sustava se gibanje svakog člana može izraziti gibanjem jedne referentne točke sustava, tako da se *de facto* radi o sustavu s jednim stupnjem slobode gibanja. Kinetička energija takvog sustava glasi

$$E_k = \frac{1}{2} m_{\text{ef}} \dot{x}^2$$

gdje je **m_{ef} efektivna ili ekvivalentna masa** koncentrirana u referentnoj točki, a $\dot{x}$ njena brzina vibriranja. Ako se za tu točku može odrediti i ekvivalentna krutost **k_{ef}** , tada Rayleighev kvocijent glasi

$$\omega^2 = \frac{k_{\text{ef}}}{m_{\text{ef}}} \quad (3.2)$$

Primjena izraza (3.2) može se takođe prikazati na jednostavnom primjeru iz Poglavlja 1 (vidi Primjer 1.7). Referentna točka je masa **m** s pomakom **x_1** . Potencijalna energija obzirom na ovu točku glasi

$$E_p = \frac{1}{2} kx_2^2 \quad x_2 = x_1 \frac{r_2}{r_1}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k_{\text{ef}} x_1^2 \quad k_{\text{ef}} = k \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2$$

Kinetička energija glasi

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2$$

$$\varphi = \frac{1}{r_1} x_1 \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{r_1} \dot{x}_1$$

$$E_k = \frac{1}{2} m_{\text{ef}} \dot{x}_1^2 \quad m_{\text{ef}} = m + \frac{J}{r_1^2}$$

Primjenom izraza (3.2) proizlazi

$$\omega^2 = \frac{k \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2}{m + \frac{J}{r_1^2}}$$

3.1.2 Sustavi s više stupnjeva slobode gibanja

Vidjeli smo u Poglavlju 2, da se slobodne vibracije sustava s dva (i više) stupnjeva slobode gibanja mogu prikazati u matricnom obliku (2.1). U slučaju harmonijskih vibracija može se uz pomoć matrice krutosti $[k]$ i matrice masa $[m]$ izraziti najveća potencijalna i kinetička energija u obliku,

$$(E_p)_{\text{max}} = \frac{1}{2} \langle X \rangle [k] \{X\}$$

$$(E_k)_{\text{max}} = \frac{1}{2} \omega^2 \langle X \rangle [m] \{X\}$$
(3.3)

tako da Rayleighev kvocijent glasi

$$\omega^2 = \frac{\langle X \rangle [k] \{X\}}{\langle X \rangle [m] \{X\}}$$
(3.4)

gdje je $\{X\}$ vektor amplituda pretpostavljenog osnovnog oblika vibriranja sustava. U slučaju da je vektor $\{X\}$ jednak vektoru točnog prvog prirodnog oblika vibriranja $\{\Phi_1\}$, tada su u brojniku i nazivniku izraza (3.4) poopćena krutost i masa za taj oblik vibriranja, vidjeti izraze (2.5), te se dobije točna prva prirodna frekvencija sustava. Može se pokazati da izraz (3.4) daje vrijednost frekvencije ω koja je s gornje strane točnosti u odnosu na točnu vrijednost ω_1 , tj. $\omega > \omega_1$. Općenito, kada se oblik vibriranja $\{X\}$ pretpostavi statičkom elastičnom linijom sustava, dobivaju se dobra približenja osnovne frekvencije.

U slučaju kada se razmatraju vibracije fleksionih sustava s n diskretiziranih masa pomoću metode utjecajnih koeficijenata, vidjeti Glavu 2.3, tada izrazi za najveću potencijalnu i kinetičku energiju glase

$$(E_p)_{\max} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i W_i^2$$

$$(E_k)_{\max} = \frac{1}{2} \omega^4 \sum_i m_i W_i \sum_j m_j W_j \alpha_{ij}$$

tako da Rayleighev kvocijent poprima oblik

$$\omega^2 = \frac{\sum_i m_i W_i^2}{\sum_i m_i W_i \sum_j m_j W_j \alpha_{ij}} \quad (3.5)$$

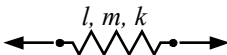
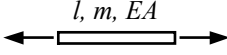
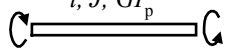
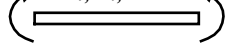
gdje su W_i amplitude pretpostavljenog osnovnog oblika vibriranja.

3.1.3. Sustavi s raspodijeljenom masom i krutosti

Za određivanje najveće kinetičke i potencijalne energije sustava s raspodijeljenom masom i krutosti potrebno je poznavati osnovni oblik vibriranja. Ukoliko se osnovni oblik vibriranja pretpostavi na korektan način, tada se za takav sustav može pomoću Rayleighevog kvocijenta pouzdano procijeniti osnovna prirodna frekvencija. Rayleighev kvocijent za takve sustave glasi

$$\omega^2 = \frac{(E_p)_{\max}}{(E_k^*)_{\max}} \quad (3.6)$$

U većini slučajeva raspodijeljeni sustavi se sastoje od opruga, štapova, vratila ili greda, koji imaju raspodijeljenu masu i krutost. Stoga su za ovakve elemente u Tablici 3.1 prikazani članovi kvocijenta (3.6) kao funkcije pretpostavljenog prirodnog oblika vibriranja $\varphi(x)$.

Element	$(E_k^*)_{\max}$	$(E_p)_{\max}$	
Opruga	$\frac{1}{2} \int_0^l \frac{m}{l} \varphi^2(x) dx$	$\frac{1}{2} k \varphi_{\max}^2$	
Štap	$\frac{1}{2} \int_0^l \frac{m}{l} \varphi^2(x) dx$	$\frac{1}{2} \int_0^l EA \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx$	
Vratilo	$\frac{1}{2} \int_0^l \frac{J}{l} \varphi^2(x) dx$	$\frac{1}{2} \int_0^l GI_p \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx$	
Greda	$\frac{1}{2} \int_0^l \frac{m}{l} \varphi^2(x) dx$	$\frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} \right)^2 dx$	

Tablica 3.1 Najveća potencijalna i kinetička energija raspodijeljenih sustava

3.2. Primjeri

PRIMJER 3.1

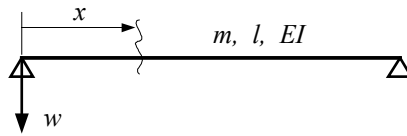
Za slobodno oslonjenu gredu prema slici 3.2 odrediti osnovnu prirodnu frekvenciju primjenom Rayleighevog kvocijenta. Pretpostaviti osnovni oblik vibriranja u obliku

a) $\varphi(x) = w_{\max} \sin \frac{\pi x}{l}$

b) statičke elastične linije za slučaj jednoliko raspodijeljenog opterećenja

$$\varphi(x) = \frac{16}{5} w_{\max} \left(\frac{x}{l} - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right)$$

Zadano: l , m , EI



Slika 3.2. Primjer 3.1

Za rješenje zadatka primijenit ćemo oblik (3.6) Rayleighevog kvocijenta i izraze za energije iz Tablice 3.1.

Slučaj a)

$$\varphi(x) = w_{\max} \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -w_{\max} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$(E_p)_{\max} = \frac{1}{2} EI w_{\max}^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \int_0^l \left(\sin \frac{\pi x}{l} \right)^2 dx = \frac{1}{2} EI w_{\max}^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \frac{1}{2} l = \frac{1}{2} w_{\max}^2 \frac{\pi^4}{2} \frac{EI}{l^3}$$

$$(E_k^*)_{\max} = \frac{1}{2} \frac{m}{l} w_{\max}^2 \int_0^l \left(\sin \frac{\pi x}{l} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{m}{l} w_{\max}^2 \frac{1}{2} l = \frac{1}{2} w_{\max}^2 \frac{m}{2}$$

Proizlazi

$$\omega^2 = \pi^4 \frac{EI}{ml^3} = 97,4 \frac{EI}{ml^3}$$

Slučaj b)

U slučaju jednolikog opterećenja grede jednažba statičke elastične linije glasi

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{16}{5} w_{\max} \left[\frac{x}{l} - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right] \\ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} &= \frac{192}{5l^2} w_{\max} \left[-\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \\ (E_p)_{\max} &= \frac{1}{2} EI \left(\frac{192}{5l^2} \right)^2 w_{\max}^2 \int_0^l \left[-\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right]^2 dx = \frac{1}{2} w_{\max}^2 \frac{32 \cdot 192}{125} \frac{EI}{l^3} \\ (E_k^*)_{\max} &= \frac{1}{2} \frac{m}{l} \left(\frac{16}{5} \right)^2 w_{\max}^2 \int_0^l \left[\frac{x}{l} - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right]^2 dx = \frac{1}{2} w_{\max}^2 \frac{128 \cdot 31}{25 \cdot 315} m\end{aligned}$$

Proizlazi

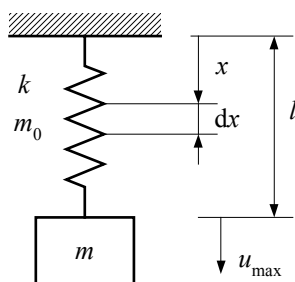
$$\omega^2 = \frac{32 \cdot 192}{125} \cdot \frac{25 \cdot 315}{128 \cdot 31} \frac{EI}{ml^3} = 97,55 \frac{EI}{ml^3}$$

U slučaju a) imali smo točan osnovni oblik vibriranja grede na dva oslonca. Pokazalo se, usporedbom a) i b), da je pretpostavka oblika vibriranja sa statičkom elastičnom linijom vrlo pouzdana.

PRIMJER 3.2

Za vibracijski sustav prema slici 3.3 odrediti osnovnu prirodnu frekvenciju primjenom Rayleighevog kvocijenta uzevši u obzir i ukupnu masu opruge m_0 . Pretpostaviti linearnu raspodjelu deformacija $\varphi(x)$ opruge.

Zadano: m , k , m_0



Slika 3.3. Primjer 3.2

3. Sustavi s više stupnjeva slobode gibanja i kontinuirani sustavi

U ovom slučaju imamo sustav s jednom koncentriranom i jednom raspodijeljenom masom (opruga). Stoga, kod primjene izraza (3.6) u slučaju harmonijskih vibracija vrijedi

$$\begin{aligned}(E_p)_{\max} &= \frac{1}{2} k u_{\max}^2 \\ (E_k^*)_{\max} &= \frac{1}{2} u_{\max}^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{m_0}{l} \varphi^2(x) dx\end{aligned}$$

Budući da je

$$\varphi(x) = \frac{x}{l} \cdot u_{\max}$$

proizlazi

$$(E_k^*)_{\max} = \frac{1}{2} m u_{\max}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l} \int_0^l \left(\frac{x}{l} \cdot u_{\max} \right)^2 dx = \frac{1}{2} m u_{\max}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_0}{3} u_{\max}^2$$

Uvrštavanjem u (3.6) dobivamo

$$\omega^2 = \frac{k}{\left(m + \frac{m_0}{3} \right)}$$

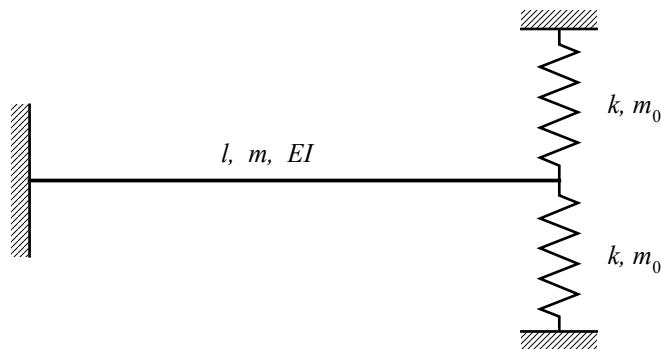
Uočljivo je, da u gornjem izrazu opruga sudjeluje s $\frac{1}{3}$ svoje ukupne mase u vrijednosti osnovne frekvencije.

PRIMJER 3.3

Za konzolu vezanu na slobodnom kraju s dvije opruge prema slici 3.4 odrediti približnu prvu prirodnu frekvenciju primjenom Rayleighevog kvocijenta.

Pretpostaviti osnovni oblik vibriranja konzole statičkom elastičnom linijom pri djelovanju koncentrirane sile na slobodnom kraju, a oblik vibriranja opruge s linearnom raspodjelom deformacija.

Zadano: l, EI, m, k, m_0



Slika 3.4. Primjer 3.3

I ovdje će se primijeniti Rayleighev kvocijent u obliku (3.6). Obje energije za zadani sustav glase

$$(E_p)_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx + 2 \cdot \frac{1}{2} k w_{\max}^2$$

$$(E_k^*)_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{m}{l} w^2(x) dx + 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{m_0}{3} w_{\max}^2$$

Pritom je pretpostavljen oblik vibriranja

$$w(x) = 3w_{\max} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$$

Ako je

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{3}{l} w_{\max} \left(1 - \frac{x}{l} \right)$$

tada je

$$(E_p)_{\max} = \frac{1}{2} w_{\max}^2 \left(\frac{3EI}{l^3} + 2k \right)$$

$$(E_k^*)_{\max} = \frac{1}{2} w_{\max}^2 \frac{33}{140} m + \frac{1}{2} w_{\max}^2 \cdot 2 \frac{m_0}{3}$$

te približna osnovna prirodna frekvencija glasi

$$\omega^2 = \frac{\frac{3EI}{l^3} + 2k}{\frac{33}{140} m + \frac{2}{3} m_0}$$

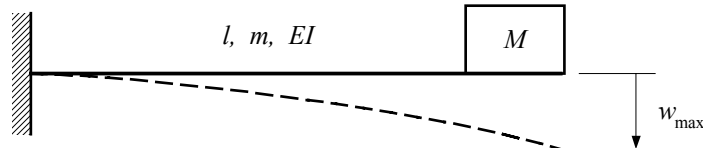
PRIMJER 3.4

Za konzolu opterećenu teretom mase M na slobodnom kraju prema slici 3.5 odrediti osnovnu prirodnu frekvenciju primjenom Rayleighevog kvocijenta. Osnovni oblik vibriranja konzole pretpostaviti na način:

- a) $\varphi(x) = w_{\max} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right)$ točan oblik
- b) $\varphi(x) = w_{\max} \frac{x^2}{l^2}$ parabola
- c) $\varphi(x) = w_{\max} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$ statička elastična linija

gdje je $w_{\max}$ progib na slobodnom kraju konzole.

Zadano: l, m, EI, M



Slika 3.5. Primjer 3.4

I ovdje se možemo poslužiti Rayleighevim koeficijentom u obliku (3.6) s time, da treba odrediti oba oblika energije sustava.

Slučaj a)

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= w_{\max} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right) \\ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} &= w_{\max} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{2l} \\ (E_p)_{\max} &= \frac{1}{2} EI w_{\max}^2 \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \int_0^l \left(\cos \frac{\pi x}{2l} \right) dx = \frac{1}{2} EI w_{\max}^2 \frac{\pi^4}{16l^4} \cdot \frac{1}{2} l \\ &= \frac{1}{2} w_{\max}^2 \frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{l^3} \\ (E_k^*) &= \frac{1}{2} \frac{m}{l} w_{\max}^2 \int_0^l \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right)^2 dx + \frac{1}{2} M w_{\max}^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{l} w_{\max}^2 \cdot l \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) + \frac{1}{2} M w_{\max}^2 \\ &= \frac{1}{2} w_{\max}^2 \left[m \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) + M \right]\end{aligned}$$

Proizlazi,

$$\omega^2 = \frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{(0,227m + M)l^3} = 3,04 \frac{EI}{(0,227m + M)l^3}$$

Slučaj b)

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= w_{\max} \frac{x^2}{l} \\ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} &= \frac{2w_{\max}}{l^2} \\ (E_p)_{\max} &= \frac{1}{2} EI \frac{4}{l^4} w_{\max}^2 \int_0^l dx = \frac{1}{2} EI \frac{4}{l^4} w_{\max}^2 l = \frac{1}{2} w_{\max}^2 \cdot 4 \frac{EI}{l^3} \\ (E_k^*) &= \frac{1}{2} \frac{m}{l} \frac{1}{l^4} w_{\max}^2 \int_0^l x^4 dx + \frac{1}{2} M w_{\max}^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{l} \frac{1}{l^4} w_{\max}^2 \frac{l^5}{5} + \frac{1}{2} M w_{\max}^2 \\ &= \frac{1}{2} w_{\max}^2 (0,2m + M)l^3\end{aligned}$$

Proizlazi,

$$\omega^2 = 4 \frac{EI}{(0,2m + M)l^3}$$

Slučaj c)

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= w_{\max} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right] \\ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} &= w_{\max} \frac{3}{l^2} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \\ (E_p)_{\max} &= \frac{1}{2} EI w_{\max}^2 \left(\frac{3}{l^2} \right)^2 \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 dx = \frac{1}{2} EI w_{\max}^2 \frac{9}{l^4} \cdot \frac{1}{3} l \\ &= \frac{1}{2} w_{\max}^2 3 \frac{EI}{l^3} \\ (E_k^*)_{\max} &= \frac{1}{2} \frac{m}{l} w_{\max}^2 \frac{1}{4} \int_0^l \left[3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]^2 dx + \frac{1}{2} M w_{\max}^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{l} w_{\max}^2 \frac{1}{4} \cdot \frac{33}{35} l + \frac{1}{2} M w_{\max}^2 \\ &= \frac{1}{2} w_{\max}^2 (0,24m + M)\end{aligned}$$

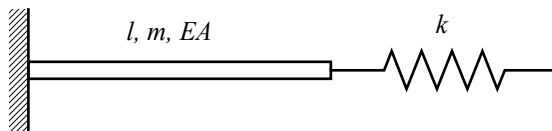
Proizlazi,

$$\omega^2 = \frac{3EI}{(0,24m + M)l^3}$$

Ako se frekvencija u slučajevima b) i c) usporedi s točnom frekvencijom u slučaju a), tada proizlazi da osnovni oblik vibriranja pretpostavljen statičkom elastičnom linijom (slučaj c)) daje mnogo pouzdaniji rezultat nego parabola (slučaj b)).

PRIMJER 3.5

Za vibracijski sustav, koji se sastoji od štapa i opruge prema slici 3.6, odrediti osnovnu prirodnu frekvenciju primjenom Rayleighevog kvocijenta. Upotrebiti točan osnovni oblik vibriranja štapa. Zanimariti masu opruge.

Zadano: l, m, EA, k 

Slika 3.6. Primjer 3.5

Osnovni oblik vibriranja uzdužnih vibracija štapa glasi

$$\varphi(x) = u_{\max} \sin \frac{\pi x}{2l}$$

gdje je $u_{\max}$ uzdužni pomak na slobodnom kraju štapa.

Stoga, najveće vrijednosti za oba oblika energije u Rayleighevom kvocijentu (3.6) iznose

$$\begin{aligned}(E_p)_{\max} &= \frac{1}{2} EA u_{\max}^2 \left(\frac{\pi l}{2} \right)^2 \int_0^l \left(\cos \frac{\pi x}{2l} \right)^2 dx + \frac{1}{2} k u_{\max}^2 = \frac{1}{2} EA u_{\max}^2 \left(\frac{\pi l}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} l + \frac{1}{2} k u_{\max}^2 \\&= \frac{1}{2} u_{\max}^2 \left(\frac{\pi^2 l^3}{8} EA + k \right) \\(E_k^*)_{\max} &= \frac{1}{2} \frac{m}{l} u_{\max}^2 \int_0^l \left(\sin \frac{\pi x}{2l} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{m}{l} u_{\max}^2 \cdot \frac{1}{2} l \\&= \frac{1}{2} u_{\max}^2 \frac{m}{2}\end{aligned}$$

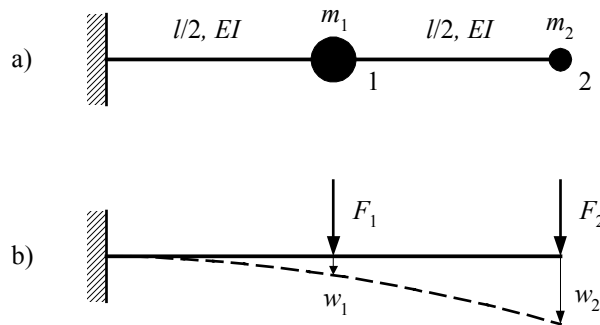
Proizlazi,

$$\omega^2 = \frac{\frac{\pi^2 l^3}{8} EA + 2k}{m}$$

PRIMJER 3.6

Za konzolni fleksijski sustav s dvije mase prema slici 3.7a odrediti osnovnu prirodnu frekvenciju primjenom Rayleighevog kvocijenta. Osnovni oblik vibriranja pretpostaviti statičkom elastičnom linijom pri djelovanju sila F_1 i F_2 prema slici 3.7b (sile su istog omjera kao i mase).

Zadano: l , EI , m , $m_1 = \frac{3}{2}m$, $m_2 = m$



Slika 3.7. Primjer 3.6

Slobodne vibracije prikazanog fleksijskog sustava mogu se prikazati pomoću utjecajnih koeficijenata, vidjeti Glavu 2.3.1, i to sa sljedećom matričnom jednačinom

$$\begin{bmatrix} m_1\alpha_{11} & m_2\alpha_{12} \\ m_1\alpha_{21} & m_2\alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Utgajni koeficijenti glase

$$\alpha_{11} = \frac{l^3}{24EI} \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{5l^3}{48EI} \quad \alpha_{22} = \frac{l^3}{3EI}$$

Točno rješenje za osnovni način vibriranja ovog sustava glasi

$$\omega_1^2 = \frac{2,61EI}{ml^3} \quad \text{prirodna frekvencija}$$

$$\{\Phi_1\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3,09 \end{Bmatrix} \quad \text{prirodni oblik vibriranja}$$

Za približno određivanje ω_1 koristit ćemo Rayleighov kvocijent u obliku (3.4) i (3.5). U oba slučaja moramo pretpostaviti osnovni oblik vibriranja sa statičkom elastičnom linijom prema slici 3.7b. Poslužit ćemo se utjecajnim koeficijentima

$$w_1 = F_1\alpha_{11} + F_2\alpha_{12} = \frac{8Fl^3}{48EI}$$

$$w_2 = F_1\alpha_{21} + F_2\alpha_{22} = \frac{47Fl^3}{96EI}$$

te je

$$\frac{w_2}{w_1} = 2,94 \quad \text{dakle} \quad \{\Phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2,94 \end{Bmatrix}$$

Rayleighov kvocijent u obliku (3.4) zahtijeva sljedeći proračun:

$$\langle \Phi | m | \Phi \rangle = \langle 1 \quad 2,94 \rangle \begin{bmatrix} \frac{3}{2}m\alpha_{11} & m\alpha_{12} \\ \frac{3}{2}m\alpha_{21} & m\alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2,94 \end{Bmatrix} = 3,709 \frac{ml^3}{EI}$$

$$\langle \Phi | k | \Phi \rangle = \langle 1 \quad 2,94 \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2,94 \end{Bmatrix} = 9,644$$

$$\omega^2 = \frac{9,64}{3,71} \frac{EI}{ml^3} = 2,6 \frac{EI}{ml^3}$$

Ako koristimo Rayleighev kvocijent u obliku (3.5), tada slijedi,

$$\omega^2 = \frac{m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2}{m_1 w_1 (m_1 w_1 \alpha_{11} + m_2 w_2 \alpha_{12}) + m_2 w_2 (m_1 w_1 \alpha_{21} + m_2 w_2 \alpha_{22})}$$

Uvrštavanjem odgovarajućih vrijednosti

$$w_1 = 1 \qquad w_2 = 2,94$$

u gornji razlomak dobivamo

$$\omega^2 = \frac{10,14}{3,89} \frac{EI}{ml^3} = 2,605 \frac{EI}{ml^3}$$

Ako se dobiveni rezultati usporede s točnim rješenjem ponovo slijedi zaključak, da pretpostavka osnovnog oblika vibriranja statičkom elastičnom linijom daje vrlo pouzdanu procjenu osnovne prirodne frekvencije sustava.

Literatura

- [1] THOMSON, W. T.: "Theory of vibration with applications", George Allen & Unwin, London, 1983.
- [2] FISHER, U., STEPHAN, W.: "Mechanische Schwingungen", VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1984.
- [3] CLOUGH, R. W., PENZIEN, J.: "Dynamics of Structures", McGraw – Hill Inc., New York, 1985.
- [4] STEGIĆ, M.: "Teorija vibracija linearnih diskretnih mehaničkih sustava", Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 1996.
- [5] den HARTOG, J. P.: "Mechanical Vibrations", McGraw – Hill Inc., New York, 1956.
- [6] WILKINSON, L., REINSCH, C.: "Linear Algebra", Springer Verlag, Berlin, 1971.
- [7] SENJANOVIĆ, I.: "Vibracije broda, I dio", Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 1972.