

TEORIJA KONSTRUKCIJA

PRIMJERI STATIČKE ANALIZE ELEMENATA KONSTRUKCIJE

Sveučilište u Zagrebu

Fakultet strojarstva i brodogradnje

Zagreb, 1997.



S V E U Č I L I Š T E U Z A G R E B U
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Prof. dr. Rajko Grubišić

TEORIJA KONSTRUKCIJA

I dio

Primjeri statičke analize elemenata konstrukcije

MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGRABIENSIS
UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU

Autor: dr.sc.Rajko Grubišić, redoviti profesor Fakulteta strojarstva i
brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu
Recenzenti: dr.sc. Ivo Senjanović, redoviti profesor Fakulteta strojarstva i
brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu
dr.sc. Jurica Sorić, redoviti profesor Fakulteta strojarstva i
brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu
dr.sc. Željko Lozina, redoviti profesor Fakulteta elektrotehnike,
strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Splitu

Izdavač: Fakultet strojarstva i brodogradnje, Ivana Lučića 5, Zagreb

Glavni urednik: prof. dr.sc. Tomislav Filetin

Odluka Senata Sveučilišta u Zagrebu br. 02-2011/1-1997
od 09. prosinca 1997.

Zbirka zadataka

ISBN 953-6313-16-2

Grafičko rješenje naslovnice: Andrej Filetin

Copyright © Fakultet strojarstva i brodogradnje

Naklada: 200

SADRŽAJ

PREDGOVOR	3
POPIS OZNAKA	5
1. OSNA DEFORMACIJA ŠTAPA	9
1.1. Diferencijalna jednadžba osne deformacije štapa	9
1.2. Numeričko rješenje primjenom metode konačnih razlika	9
Primjer 1.1.	12
Primjer 1.2.	14
Primjer 1.3.	16
1.3. Numeričko rješenje metodom konačnih elemenata	18
Primjer 1.4.	19
Primjer 1.5.	21
Primjer 1.6.	22
2. UVIJANJE ŠTAPA	23
2.1. Diferencijalna jednadžba uvijanja štapa	23
2.2. Analogija rastezanja i uvijanja štapa	23
3. SAVIJANJE GREDE	25
3.1. Diferencijalna jednadžba elastične linije	25
3.2. Numeričko rješenje primjenom metode konačnih razlika	26
Primjer 3.1.	28
Primjer 3.2.	30
Primjer 3.3.	33
3.3. Numeričko rješenje primjenom metode konačnih elemenata	35
Primjer 3.4.	36
Primjer 3.5.	39
Primjer 3.6.	42
Primjer 3.7.	44
primjer 3.8.	47
4. RASTEZANJE PRAVOKUTNE PLOČE	51
4.1. Diferencijalna jednadžba rastezanja pravokutne ploče	51
4.2. Numeričko rješenje primjenom metode konačnih elemenata	52
Primjer 4.1.	54
Primjer 4.2.	56
5. SAVIJANJE PRAVOKUTNE PLOČE	61
5.1. Diferencijalna jednadžba savijanja pravokutne ploče	61
5.2 Rubni uvjeti	63
5.3. Analitičko rješenje primjenom dvostrukog trigonometrijskog reda (Navier-ova metoda)	64
Primjer 5.1.	65
Primjer 5.2.	67
Primjer 5.3.	68
Primjer 5.4.	69
Primjer 5.5.	71

5.4. Analitičko rješenje primjenom jednostrukog Fourierovog reda (Levy-eva metoda).....	72
Primjer 5.6.	73
Primjer 5.7.	75
Primjer 5.8.	76
5.5. Približno analitičko rješenje primjenom Ritz-ove metode.....	78
Primjer 5.9.	79
Primjer 5.10.	80
Primjer 5.11.	81
5.6. Numeričko rješenje primjenom metode konačnih razlika	83
Primjer 5.12.	85
Primjer 5.13.	86
5.7 Numeričko rješenje primjenom metode konačnih elemenata	88
Primjer 5.14.	91
Primjer 5.15.	93
Primjer 5.16.	94
6. OSNOSIMETRIČNE LJUSKE I OKRUGLA PLOČA	99
6.1. Diferencijalni element osnosimetrične ljuske.....	99
6.2. Diferencijalna jednadžba osnosimetrične ljuske.....	101
6.3. Cilindrična ljuska.....	103
Primjer 6.1.	104
Primjer 6.2.	106
6.4. Konusna ljuska.....	107
Primjer 6.3.	108
6.5. Sferna ljuska.....	110
Primjer 6.4.	111
6.6. Okrugla ploča	114
Primjer 6.5.	115
Primjer 6.6.	117
6.7. Spoj ljusaka.....	119
Primjer 6.7.	119
Primjer 6.8.	121
Primjer 6.9.	123
Primjer 6.10.....	125
6.8. Primjena metode konačnih elemenata	129
PRILOG A	133
LITERATURA	137

PREDGOVOR

Autor ovog udžbenika već se dugi niz godina bavi teorijom konstrukcija, djelujući pri tom na tri područja: nastava na fakultetu, stručni rad u inženjerskoj praksi i znanstveno-istraživački rad. Po njegovom mišljenju, nužan uvjet za obrazovanje kvalitetnog stručnjaka iz teorije konstrukcije jest dobra međusobna povezanost gore navedenih područja s efikasnim protokom informacija u oba smjera. Nažalost, iskustvo autora pokazuje da taj uvjet često nije ispunjen, posebno, kada je u pitanju povezanost nastavnog gradiva na fakultetu i inženjerskog znanja potrebnog u praksi. Jedan od ključnih razloga za to jest nedostatak odgovarajućih stručnih udžbenika i knjiga na hrvatskom jeziku koje će sadržavati potrebnu teoretsku podlogu, ali i primjenu teorije na primjerima iz inženjerske prakse. Stoga je namjera autora bila, da pripremi tekst koji će u sklopu linearne teorije konstrukcija sadržavati slijedeće:

- statičku analizu svih osnovnih tipova elemenata konstrukcije koji čine sastavni dio složenih brodskih i drugih nosivih konstrukcija,
- poseban naglasak na analizu problema rastezanja i savijanja ploča, te problema čvrstoće rotacijskih ljsaka pomoću analitičkih i numeričkih metoda,
- teorijsku podlogu u sažetom obliku za svaki tip elementa konstrukcije
- riješene primjere iz inženjerske prakse s posebnim naglaskom na suvremenim numeričkim metodama uz primjenu elektroničkog računala

Ovaj udžbenik je vezan uz predmet Teorija konstrukcija, što ga autor predaje na III godini studija brodogradnje u Zagrebu, a koji je zamišljen kao nastavak osnovnog Nauka o čvrstoći (II godina studija) odnosno kao priprema za predmet Čvrstoća broda (IV godina studija). Naime, dok se u Nauci o čvrstoći za osnovne elemente konstrukcije definira problem čvrstoće postavljanjem odgovarajućih diferencijalnih jednadžbi i njihovih analitičkih rješenja, dotle se u Čvrstoći broda razmatra statički problem složenih strukturnih sklopova sastavljenih iz osnovnih konstruktivnih elemenata. Budući su ti sklopovi u pravilu nepravilne konfiguracije, isti se ne mogu opisati i rješavati na egzaktno analitički način, već se primjenjuju približne numeričke metode (konačne razlike, konačni elementi, itd.). Prema tome, očigledno je, da između spomenutih problema postoji praznina koju je valjalo upotpuniti predmetom Teorija konstrukcija i odgovarajućim udžbenikom. Isti se sastoji iz 6 poglavlja, a svako poglavlje obrađuje jedan tip elemenata konstrukcije.

- **Poglavlje 1** razmatra problem osne deformacije štapa s riješenim primjerima primjenom metode konačnih razlika i metode konačnih elemenata.
- **Poglavlje 2** se bavi problemom uvijanja štapa okruglog presjeka pri čemu je istaknuta potpuna matematička analogija problema uvijanja i osne deformacije štapa.
- **Poglavlje 3** sadrži analizu savijanja grede s riješenim primjerima primjenom metode konačnih razlika i metode konačnih elemenata.
- **Poglavlje 4** obuhvaća analizu rastezanja pravokutne ploče (membranski problem) pri čemu su odgovarajući primjeri riješeni primjenom metode konačnih elemenata.
- **Poglavlje 5** razmatra problem savijanja pravokutne ploče. Prikazana su analitička rješenja razvojem funkcije progiba ploče u jednostruki i dvostruki Fourierov red, rješenje primjenom Ritzove metode po načelu minimuma energije i numerička rješenja primjenom metode konačnih razlika i metode konačnih elemenata.
- Zadnje **poglavlje 6** se bavi problemom rotacijskih (osno-simetričnih) ljsaka. Prikazani su riješeni primjeri na osnovu rješenja kompleksne diferencijalne jednadžbe rastezanja i savijanja ljsuke, te primjeri koji su riješeni primjenom metode konačnih elemenata.

Svako poglavlje započinje postavljanjem odgovarajuće diferencijalne jednačbe za razmatrani problem i prikaza odnosa između sila, deformacija i opterećenja koji iz ove jednačbe proizlaze. Zatim slijedi opis numeričkih metoda prilagođenih tipu analiziranog elementa konstrukcije i na kraju su dani riješeni primjeri. Ti primjeri su tako odabrani, da se njihovim rješavanjem jasno ističu svi bitni koraci, a to su: postavljanje fizikalnog problema, ponavljanje osnovnih definicija i odnosa s kojima je fizikalni problem egzaktno matematički opisan i korektna primjena numeričkih postupaka za dobivanje približnog, ali pouzdanog rješenja problema.

Na kraju dan je popis literature kojom se autor služio kod izrade ovog udžbenika. Jedan dio navedenih naslova odnosi se na egzaktnu analitičku metodu rješavanja problema čvrstoće, dok je drugi dio vezan uz numeričke metode u statičkoj analizi konstrukcija. Obzirom da je autor ovog udžbenika želio težište ipak baciti na riješene primjere, te je primijenjenu teoriju i metode prikazao u skraćenom obliku, navedena literatura se svakako preporuča korisnicima ovog udžbenika za detaljnije razumijevanje i uvid u razmatranu problematiku.

Autoru je ugodna dužnost, da se na kraju zahvali svim onim kolegama koji su doprinijeli realizaciji ovog udžbenika. To su prije svega student FSB i demonstrator Davor Vranković koji je savjesno i precizno riješio velik dio primjera; zatim tu su i ostali studenti FSB koji su kvalitetnom izradom svojih programa dali svoj prilog u rješavanju niza primjera. Posebno valja spomenuti studenta FSB i demonstratora Maria Šimunca koji je uložio velik trud na elektroničkom računalu da bi udžbenik doveo u tiskarski oblik. I na kraju zahvala recenzentima na korisnim prijedlozima i sugestijama.

Rajko Grubišić

POPIS OZNAKA

Poglavlje 1

A	- površina poprečnog presjeka štapa, m^2
d	- razmak točaka razdiobe u mreži konačnih razlika, m
E	- Youngov modul elastičnosti, N/m^2
F	- koncentrirana vanjska uzdužna sila, N
$[k]$	- matrica krutosti konačnog elementa
$[K]$	- matrica krutosti modela
N	- uzdužna sila u presjeku štapa, N
n_x	- raspodjeljeno osno opterećenje štapa, N/m
$\{n\}$	- vektor čvornih sila konačnog elementa
$\{n_x\}$	- vektor čvornih sila konačnog elementa od vanjskog raspodijeljenog opterećenja n_x
$\{N\}$	- vektor čvornih sila modela
$\{N_x\}$	- vektor čvornih sila modela od vanjskog opterećenja n
u	- uzdužni pomak štapa, m
$\{\delta\}$	- vektor čvornih pomaka konačnog elementa
$\{\Delta\}$	- vektor čvornih pomaka modela

Poglavlje 2

G	- modul smicanja, N/m^2
I_t	- moment tromosti poprečnog presjeka štapa na uvijanje, m^4
M_t	- moment uvijanja u presjeku štapa, Nm
n_t	- raspodijeljeno vanjsko opterećenje štapa na uvijanje, Nm/m
ψ	- kut uvijanja, rad

Poglavlje 3

d	- razmak točaka razdiobe u mreži konačnih razlika, m
E	- Youngov modul elastičnosti, N/m^2
F	- koncentrirana vanjska sila, N
$\{f\}$	- vektor čvornih sila konačnog elementa
$\{f_q\}$	- vektor čvornih sila konačnog elementa od vanjskog raspodijeljenog opterećenja q
$\{F\}$	- vektor čvornih sila modela
$\{F_q\}$	- vektor čvornih sila modela od vanjskog raspodijeljenog opterećenja q
I	- osni moment tromosti poprečnog presjeka grede, m^4
$[k]$	- matrica krutosti konačnog elementa
$[K]$	- matrica krutosti modela
M	- moment savijanja u presjeku grede, Nm
M_0	- koncentrirani vanjski moment, Nm
Q	- poprečna sila u presjeku grede, N
q	- raspodijeljeno vanjsko opterećenje grede, N/m
R	- reaktivna sila u osluncu grede, N
w	- progib grede, m

$\{\delta\}$	- vektor čvornih pomaka konačnog elementa
$\{\Delta\}$	- vektor čvornih pomaka modela
φ	- kut nagiba presjeka grede, rad
ν	- Poissonov koeficijent
σ	- normalno naprezanje u presjeku grede, N/m ²
τ	- smično naprezanje u presjeku grede, N/m ²

Poglavlje 4

A	- površina konačnog elementa, m ²
D_1	- krutost konačnog elementa na rastezanje
D_2	- krutost konačnog elementa na smik
E	- Youngov modul elastičnosti, N/m ²
$\{f\}$	- vektor čvornih sila konačnog elementa
$\{f\}_p$	- vektor čvornih sila konačnog elementa od vanjskog raspodijeljenog opterećenja q_x i q_y
F	- koncentrirana vanjska sila, N
$\{F\}$	- vektor čvornih sila modela
h	- debljina ploče, m
$[k]$	- matrica krutosti konačnog elementa
$[k]_1$	- matrica krutosti konačnog elementa na rastezanje
$[k]_2$	- matrica krutosti konačnog elementa na smik
$[K]$	- matrica krutosti modela,
N_x, N_y	- normalne membranske sile u smjeru x i y, N/m
q_x, q_y	- komponente vanjskog ravninskog opterećenja ploče u smjeru osi x i y, N/m
S	- smična membranska sila, N/m
u	- pomak u ravnini ploče u smjeru x, m
v	- pomak u ravnini ploče u smjeru y, m
$\{\delta\}$	- vektor čvornih pomaka konačnog elementa
$\{\Delta\}$	- vektor čvornih pomaka modela
ν	- Poissonov koeficijent
θ	- Airyeva potencijalna funkcija naprezanja

Poglavlje 5

a	- duljina stranice ploče u smjeru osi x, m
A	- površina konačnog elementa
b	- duljina stranice ploče u smjeru osi y, m
D	- krutost ploče na savijanje, Nm
E	- Youngov modul elastičnosti, N/m ²
$\{f\}$	- vektor čvornih sila konačnog elementa
$\{f\}_q$	- vektor čvornih sila od vanjskog opterećenja q
h	- debljina ploče, m
$[k]$	- matrica krutosti konačnog elementa
$[K]$	- matrica krutosti modela
M_x, M_y	- momenti savijanja ploče, Nm/m
Q_x, Q_y	- poprečne sile ploče, N/m
q_z	- vanjsko raspodijeljeno opterećenje, N/m ²

w	- progib ploče, m
W	- ukupna energija savijanja ploče, Nm
δ	- razmak točaka razdiobe u mreži konačnih razlika ploče, m
$\{\delta\}$	- vektor čvornih pomaka konačnog elementa
$\{\Delta\}$	- vektor čvornih pomaka modela
φ	- kutni zakret u čvoru konačnog elementa ploče oko osi y, rad
ν	- Poissonov koeficijent
ψ	- kut zaokreta u čvoru konačnog elementa ploče oko osi x, rad

Poglavlje 6

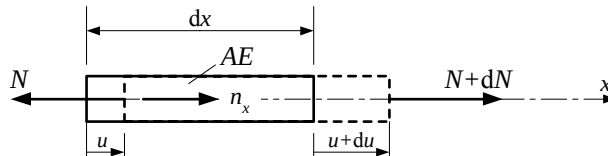
$[B]$	- matrica deformacija konačnog elementa
$[D]$	- matrica elastičnosti izotropne ljuske
E	- Youngov modul elastičnosti, N/m ²
$\{f\}$	- vektor čvornih sila konačnog elementa
$\{f\}_p$	- vektor površinskog opterećenja konačnog elementa
$\{F\}$	- vektor čvornih sila modela
$\{F\}_p$	- vektor površinskog opterećenja modela
h	- debljina ljuske, m
$[k]$	- matrica krutosti konačnog elementa
$[K]$	- matrica krutosti modela
l	- duljina konačnog elementa ljuske, m
M_1, M_2	- momenti savijanja ljuske u meridijalnom i cirkularnom smjeru, Nm/m
N_1, N_2	- membranske sile ljuske u meridijalnom i cirkularnom smjeru, N/m
$[N]$	- matrica oblika konačnog elementa
p	- opterećenje ljuske tlakom, N/m ²
Q_1, Q_2	- poprečne sile ljuske u meridijalnom i cirkularnom smjeru, N/m
R	- vanjski (najveći) polumjer okrugle ploče, m
r	- polumjer promatrane točke okrugle ploče, m
r_1, r_2	- polumjeri meridijalne i cirkularne zakrivljenosti ljuske, m
r_0	- projekcija polumjera r u poprečnoj ravlini ljuske, m
s	- lokalna koordinata konačnog elementa, m
$[T]$	- matrica transformacija čvornih pomaka konačnog elementa
u	- meridijalni pomak ljuske, m
$u(s)$	- funkcija oblika meridijalnog pomaka u konačnom elementu
w	- normalni pomak ljuske, m
$w(s)$	- funkcija oblika normalnog pomaka u konačnom elementu
Y	- radijalna sila ljuske, N/m
z	- os simetrije (rotacije) ljuske
Z	- osna sila ljuske, N/m
α	- koeficijent koordinate položaja promatranog presjeka ljuske, rad
β	- kut savijanja ljuske u meridijalnoj ravlini, rad
ϑ	- kut nagiba ljuske prema osi rotacije z, °
δ	- radijalni pomak ljuske, m
$\{\delta\}$	- vektor čvornih pomaka konačnog elementa
Δ	- osni pomak ljuske, m
$\{\Delta\}$	- vektor čvornih pomaka modela
ϵ_1, ϵ_2	- linijske deformacije ljuske u meridijalnom (1) i cirkularnom (2) smjeru

$\{\epsilon\}$	- vektor deformacija ljuske
κ_1, κ_2	- kutne deformacije ljuske u meridijalnom (1) i cirkularnom (2) smjeru
$\{\sigma\}$	- vektor unutarnjih sila ljuske
ν	- Poissonov koeficijent
ρ	- bezdimenzionalna koordinata (r/R) promatrane točke okrugle ploče
ξ	- bezdimenzionalna koordinata (x/r) promatranog presjeka cilindrične ljuske i bezdimenzionalna lokalna koordinata (s/l) konačnog elementa

1. OSNA DEFORMACIJA ŠTAPA

1.1. Diferencijalna jednačba osne deformacije štapa

Na slici 1.1. prikazan je diferencijalni element osno opterećenog štapa /2/ sa svojim osnovnim značajkama : N - uzdužna sila, u - uzdužni pomak, n_x - raspodijeljeno osno opterećenje, AE - osna krutost štapa.



Slika 1.1. Diferencijalni element osno opterećenog štapa

Iz uvjeta ravnoteže elementa na slici 1.1. slijedi

$$dN = -n_x dx \quad \text{odnosno} \quad \frac{dN}{dx} = -n_x$$

Iz teorije elastičnosti proizlazi

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$
$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

Analizom deformacija elementa na slici 1.1. slijedi

$$\varepsilon_x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

Sređivanjem gornjih izraza dobiva se diferencijalna jednačba osno opterećenog štapa proizvoljnog, ali konstantnog presjeka koja glasi

$$AE \frac{d^2 u}{dx^2} = -n_x \quad (1.1)$$

i izraz za uzdužnu silu kao funkcija pomaka

$$N = AE \frac{du}{dx} \quad (1.2)$$

1.2. Numeričko rješenje primjenom metode konačnih razlika

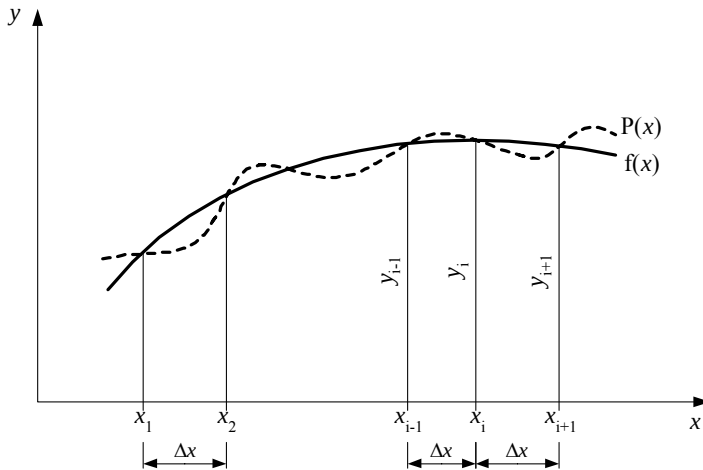
Kod mnogih primjera iz prakse nije moguće odrediti analitičko rješenje odgovarajuće diferencijalne jednačbe. U tom slučaju može se pomoću numeričkih metoda dobiti rješenje koje je doduše približno ali dovoljno pouzdano s inženjerskog stajališta. Jedna od takvih nezaobilaznih metoda jest metoda konačnih razlika.

Upotrebom ove metode u razmatranoj diferencijalnoj jednačbi se derivacije za izabrane točke zamjenjuju s konačnim razlikama. Te točke pripadaju mreži konačnih razlika s kojom se modelira analizirani konstrukcijski dio. Slika deformacija se dobiva određivanjem približnih vrijednosti za deformacije u tim točkama.

Obzirom da je osna deformacija štapa jednodimenzionalan problem, da bi se dobili izrazi s konačnim razlikama u zamjenu za derivacije, aproksimira se funkcija $y = f(x)$ u danom intervalu s interpolacijskim polinomom $P(x)$. Pritom bolja aproksimacija izvorne funkcije daje i bolje izraze s konačnim razlikama, te se povećava točnost rezultata. Drugim riječima, interpolacija izvorne funkcije koja opisuje deformacije i konačne razlike su usko povezani.

U standardnoj upotrebi ove metode koristi se za određivanje izraza s konačnim razlikama parabolički interpolacijski polinom II reda /6/

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

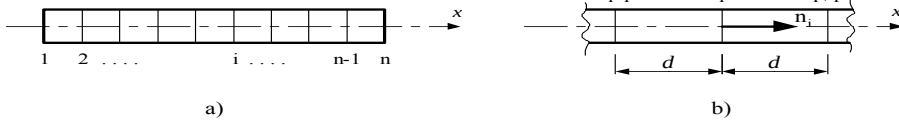


Slika 1.2 Interpolacija funkcije i konačne razlike

U tom slučaju proizlazi prema notaciji na slici 1.2 sljedeće

$$\begin{aligned} f'(x_i) &\cong P'(x_i) = \frac{1}{2\Delta x} (y_{i+1} - y_{i-1}) \\ f''(x_i) &\cong P''(x_i) = \frac{1}{(\Delta x)^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \\ f'''(x_i) &\cong P'''(x_i) = \frac{1}{2(\Delta x)^3} (y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}) \\ f^{IV}(x_i) &\cong P^{IV}(x_i) = \frac{1}{(\Delta x)^4} (y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Kod primjene metode konačnih razlika štap se modelira mrežom konačnih razlika, slika 1.3.a, te se problem svodi na određivanje pomaka i sila u točkama mreže.



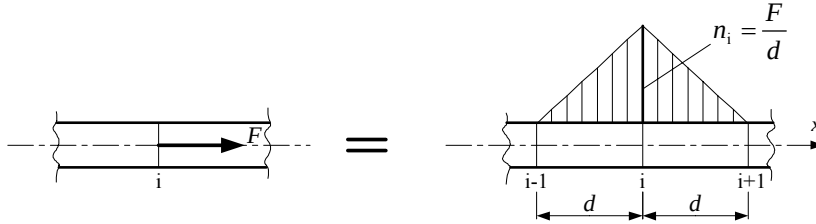
Slika 1.3 Mreža konačnih razlika

Za svaku i -tu točku mreže, slika 1.3.b, može se postaviti slijedeća algebarska jednačdba

$$EA \frac{1}{d^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) = -n_i \quad (1.4)$$

Ova jednačdba zamjenjuje diferencijalnu jednačdbu (1.1) u i -toj točki mreže konačnih razlika. Obzirom da se jednačdba (1.4) može postaviti za sve točke mreže (osim za rubne), problem se svodi na rješavanje sustava linearnih algebarskih jednačdbi, gdje su rješenje uzdužni pomaci u točkama mreže konačnih razlika.

Ukoliko je vanjsko opterećenje zadano u obliku koncentrirane osne sile F , ista se treba zamijeniti s odgovarajućim raspodijeljenim osnim opterećenjem u i -toj točki mreže, slika 1.4, da bi se očuvao kontinuitet jednačdbi.



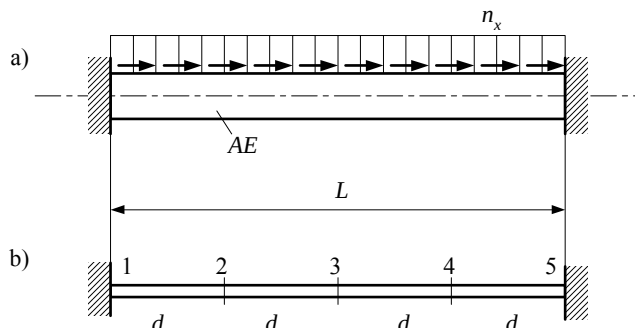
Slika 1.4 Koncentrirana osna sila i zamjensko raspodijeljeno osno opterećenje

U skladu s gore rečenim može se i diferencijalni izraz za uzdužnu silu (1.2) zamijeniti s odgovarajućim algebarskim izrazom, kako slijedi

$$N_i = EA \frac{1}{2d} (u_{i+1} - u_{i-1}) \quad (1.5)$$

PRIMJER 1.1.

Štap osne krutosti AE i duljine L učvršćen je i opterećen jednolikim osnim opterećenjem n_x prema slici 1.5.a. Odrediti raspodjelu uzdužnih pomaka duž štapa i reakcije na mjestima učvršćenja, ako je zadana mreža konačnih razlika prema slici 1.5.b.



Slika 1.5 Primjer 1.1

Postavlja se jednačba (1.4) za točke 2, 3 i 4 mreže,

$$\begin{aligned} i = 2 \quad u_3 - 2u_2 + u_1 &= -\frac{d^2}{EA} n_2 \\ i = 3 \quad u_4 - 2u_3 + u_2 &= -\frac{d^2}{EA} n_3 \\ i = 4 \quad u_5 - 2u_4 + u_3 &= -\frac{d^2}{EA} n_4 \end{aligned}$$

gdje je $n_2 = n_3 = n_4 = n_x$, $d = 0.25L$

U gornjem sustavu jednačbi javljaju se dvije prekobrojne nepoznanice, u_1 i u_5 , koje se određuju iz rubnih uvjeta, tj. $u_1 = u_5 = 0$. Na taj način sustav postaje jednoznačno određen i ima slijedeće rješenje :

$$u_2 = \frac{3}{32} \frac{n_x L^2}{EA}, \quad u_3 = \frac{4}{32} \frac{n_x L^2}{EA}, \quad u_4 = \frac{3}{32} \frac{n_x L^2}{EA}$$

Reakcije na mjestu učvršćenja određuju se primjenom izraza (1.5),

$$\begin{aligned} N_1 &= EA \frac{1}{2d} (u_2 - u_0) \\ N_5 &= EA \frac{1}{2d} (u_6 - u_4) \end{aligned}$$

U oba izraza se javljaju nove nepoznanice u_0 i u_6 . Iste se određuju ponovnim postavljanjem jednačbe (1.4) za točke mreže $i=2$ i 4 ali s dvostrukim rasponom ($2d$) susjednih točaka

$$\begin{aligned} i=2 \quad u_4 - 2u_2 + u_0 &= -\frac{(2d)^2}{EA} n_x \\ i=4 \quad u_6 - 2u_4 + u_2 &= -\frac{(2d)^2}{EA} n_x \end{aligned}$$

Iz ovih jednačbi proizlazi

$$\begin{aligned} u_0 &= 2u_2 - u_4 - \frac{4d^2}{EA} n_x = -\frac{5}{32} \frac{n_x L^2}{EA} \\ u_6 &= 2u_4 - u_2 - \frac{4d^2}{EA} n_x = -\frac{5}{32} \frac{n_x L^2}{EA} \end{aligned}$$

te reakcije iznose

$$\begin{aligned} N_1 &= 0,5n_x L \\ N_5 &= 0,5n_x L \end{aligned}$$

Ovaj zadatak se mogao riješiti i razmatranjem samo **jedne polovice štapa** tako da se jednačba (1.4) postavlja samo za točke 2 i 3 mreže,

$$\begin{aligned} i=2 \quad u_3 - 2u_2 + u_1 &= -\frac{d^2}{EA} n_x \\ i=3 \quad u_4 - 2u_3 + u_2 &= -\frac{d^2}{EA} n_x \end{aligned}$$

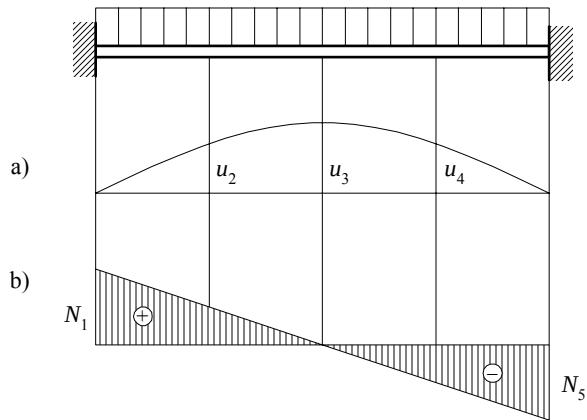
Za prekobrojne nepoznanice u_1 i u_4 postavlja se rubni uvjet u točki $i=1$ i uvjet simetrije u točki $i=3$

$$\begin{aligned} i=1 \quad u_1 &= 0 \\ i=3 \quad N_3 &= 0 = u_4 - u_2 \end{aligned}$$

što daje $u_4 = u_2$

Uvrštavanjem ovih vrijednosti u osnovne jednačbe slijedi isto rješenje kao i u slučaju analize čitavog štapa.

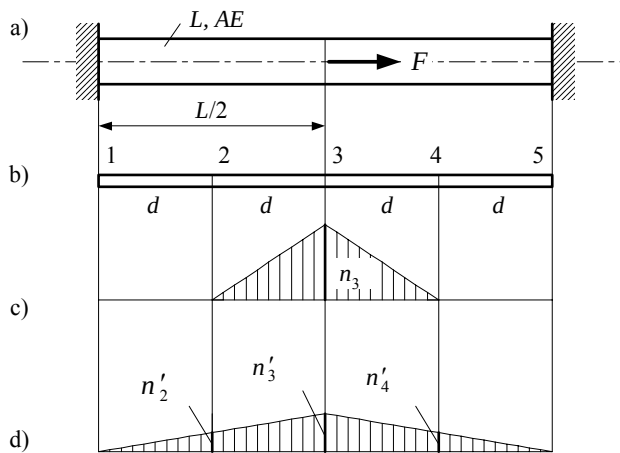
Dijagrami raspodjele uzdužnih pomaka i sila duž štapa prikazani su na slikama 1.6.a i 1.6.b.



Slika 1.6. Primjer 1.1

PRIMJER 1.2

Za štap istih značajki kao i u primjeru 1.1, ali koji je opterećen koncentriranom silom F prema slici 1.7.a, odrediti raspodjelu uzdužnih pomaka i reakcije na mjestu učvršćenja. Koristiti mrežu konačnih razlika prikazanu na slici 1.7.b.



Slika 1.7. Primjer 1.2

Koncentrirana sila se zamjenjuje s trokutastim raspodijeljenim opterećenjem prema slici 1.7.c, gdje je $n_2 = n_4 = 0$, $n_3 = F/d$, te se postavlja jednačba (1.4) u točkama 2, 3 i 4 mreže,

$$\begin{aligned} i = 2 \quad u_3 - 2u_2 + u_1 &= 0 \\ i = 3 \quad u_4 - 2u_3 + u_2 &= -\frac{d^2}{EA} n_3 \\ i = 4 \quad u_5 - 2u_4 + u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem rubnih uvjeta $u_1 = u_5 = 0$ dobiva se rješenje gornjeg sustava u obliku

$$u_2 = \frac{1}{8} \frac{FL}{EA} \quad u_3 = \frac{1}{4} \frac{FL}{EA} \quad u_4 = u_2 = \frac{1}{8} \frac{FL}{EA}$$

Izrazi za reakcije na mjestima učvršćenja štapa glase

$$\begin{aligned} N_1 &= EA \frac{1}{2d} (u_2 - u_0) \\ N_5 &= EA \frac{1}{2d} (u_6 - u_4) \end{aligned}$$

Nepoznanice u_0 i u_6 određuju se ponovnim postavljanjem jednačbe (1.4) za točke mreže $i=2$ i 4 , ali s dvostrukim rasponom ($2d$) susjednih točaka mreže i s preraspodjelom trokutastog opterećenja na dvostruki raspon prema slici 1.7.d. Slijedi

$$\begin{aligned} n'_2 = n'_4 &= \frac{F}{4d} \quad n'_3 = \frac{F}{2d} \\ i = 2 \quad u_4 - 2u_2 + u_0 &= -\frac{(2d)^2}{EA} n'_2 \\ i = 4 \quad u_6 - 2u_4 + u_2 &= -\frac{(2d)^2}{EA} n'_4 \end{aligned}$$

Proizlazi da je

$$u_0 = -\frac{1}{8} \frac{FL}{EA} \quad u_6 = \frac{1}{8} \frac{FL}{EA}$$

Uvođenjem ovih veličina u izraze za sile N_1 i N_5 dobiva se

$$\begin{aligned} N_1 &= 0,5F \\ N_5 &= -0,5F \end{aligned}$$

Ovaj primjer se može riješiti i tako, da se razmatra samo **jedna polovica štapa**. U tom slučaju se koncentrirana sila F uvodi u proračun preko uvjeta simetrije. Jednačba (1.4) se postavlja za točke $i=2$ i 3 mreže,

$$\begin{aligned} i = 2 \quad u_3 - 2u_2 + u_1 &= 0 \\ i = 3 \quad u_4 - 2u_3 + u_2 &= 0 \end{aligned}$$

Za prekobrojne nepoznanice u_1 i u_4 postavlja se rubni uvjet u točki $i=1$ i uvjet simetrije u točki $i=3$

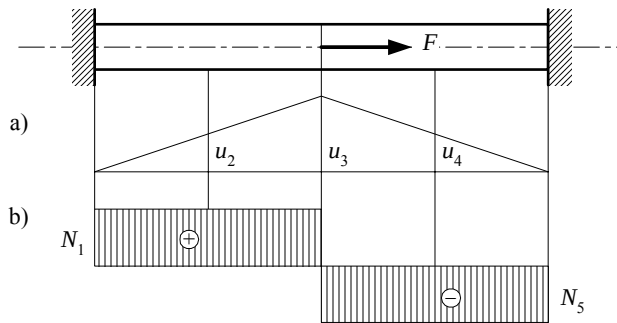
$$\begin{aligned} i=1 & \quad u=0 \\ i=3 & \quad N_3 = \frac{F}{2} = EA \frac{1}{2d} (u_4 - u_2) \end{aligned}$$

što daje

$$u_4 = \frac{Fd}{EA} + u_2$$

Uvrštavanjem ovih vrijednosti u osnovne jednačbe dobiva se isto rješenje kao i slučaju razmatranja čitavog štapa.

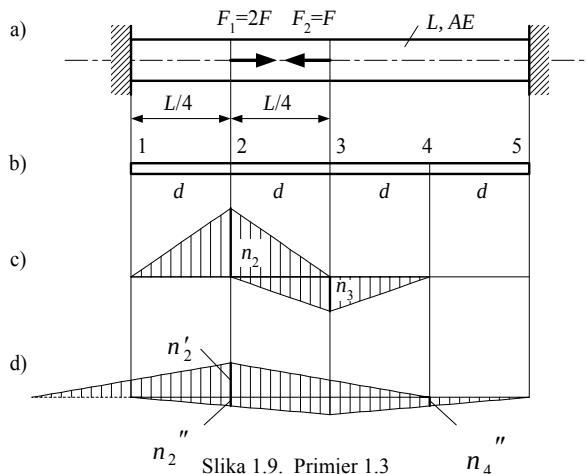
Dijagrami raspodjele uzdužnih pomaka i sila duž štapa prikazani su na slikama 1.8.a i b .



Slika 1.8. Primjer 1.2

PRIMJER 1.3

Štap osne krutosti AE i duljine L učvršćen je na oba kraja i opterećen s dvije sile F_1 i F_2 prema slici 1.9.a. Odrediti raspodjelu uzdužnih pomaka duž štapa i reaktivne uzdužne sile na mjestima učvršćenja za mrežu konačnih razlika prema slici 1.9.b.



Slika 1.9. Primjer 1.3

Koncentrirana sila se zamjenjuje trokutastim opterećenjem prema slici 1.9.c , gdje je

$$n_2 = \frac{F_1}{d} = \frac{2F}{d} \quad n_3 = -\frac{F_2}{d} = -\frac{F}{d}$$

Postavlja se jednačba (1.4) za točke i=2, 3 i 4 mreže,

$$\begin{aligned} i=2 \quad u_3 - 2u_2 + u_1 &= -\frac{d^2}{EA} n_2 = -\frac{2Fd}{EA} \\ i=3 \quad u_4 - 2u_3 + u_2 &= -\frac{d^2}{EA} n_3 = \frac{Fd}{EA} \\ i=4 \quad u_5 - 2u_4 + u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Za prekobrojne nepoznanice postavljaju se rubni uvjeti $u_1 = u_5 = 0$. Uvrštenjem istih u osnovni sustav jednačbi slijedi rješenje

$$u_2 = \frac{FL}{4EA} \quad u_3 = u_4 = 0$$

Reakcije na mjestima učvršćenja određuju se primjenom izraza (1.5)

$$N_1 = EA \frac{1}{2d} (u_2 - u_0) \quad N_5 = EA \frac{1}{2d} (u_6 - u_4)$$

Prekobrojne nepoznanice u_0 i u_6 određuju se ponovnim postavljanjem jednačbe (1.4) za točke mreže i=2 i 4 ali s dvostrukim rasponom susjednih točaka i s odgovarajućom trokutastom raspodjelom vanjskog opterećenja prema slici 1.9.d . Slijedi

$$\begin{aligned} n_2 = n_2' + n_2'' &= \frac{2F}{2d} - \frac{F}{4d} & n_4 = n_4'' &= -\frac{F}{4d} \\ i=2 \quad u_4 - 2u_2 + u_0 &= -\frac{d^2}{EA} n_2 \\ i=4 \quad u_6 - 2u_4 + u_2 &= -\frac{d^2}{EA} n_4 \end{aligned}$$

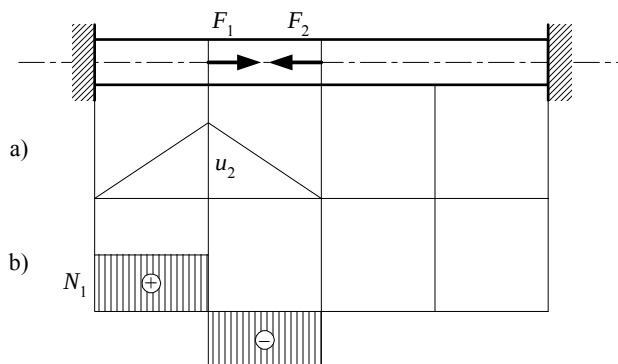
Kada se u ove jednačbe uvrste opterećenja n_2 i n_4 , te poznati pomaci u_2 i u_4 , dobiva se

$$u_0 = -\frac{Fd}{EA} \quad u_6 = 0$$

Uvođenjem ovih vrijednosti u izraze za sile slijedi:

$$N_1 = F \quad N_5 = 0 .$$

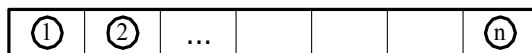
Dijagrami raspodjele uzdužnih pomaka i sila duž štapa prikazani su na slikama 1.10.a i b .



Slika 1.10. Primjer 1.3

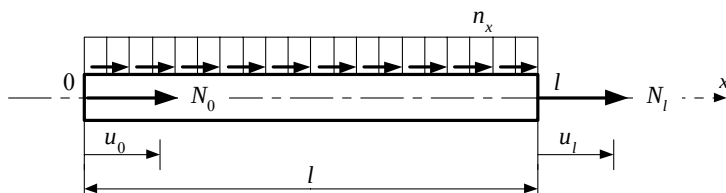
1.3. Numeričko rješenje metodom konačnih elemenata

Kod primjene metode konačnih elemenata štap se modelira sustavom štapnih konačnih elemenata [4], vidjeti sliku 1.11. , te se problem svodi na određivanje pomaka i sila u spojnim točkama elemenata, tj. u čvorovima.



Slika 1.11. Mreža konačnih elemenata

Prema tome, osnovna građevna jedinica je štapni konačni element, čije značajke su prikazane na slici 1.12.



Slika 1.12. Štapni konačni element

Element ima dva čvora, **0** i **1**, u svakom čvoru postoji uzdužni pomak i uzdužna sila. Pomaci i sile u čvorovima elementa povezani su sustavom jednačžbi, koji u matričnom obliku izgleda,

$$[k]\{\delta\} = \{n\} - \{n_x\} \quad (1.6)$$

gdje je

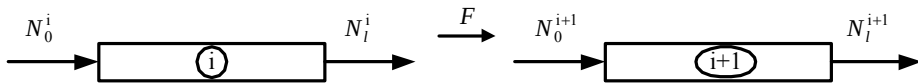
$$[k] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{matrica krutosti elementa}$$

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_i \end{Bmatrix} \quad \text{vektor čvornih pomaka}$$

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} N_0 \\ N_i \end{Bmatrix} \quad \text{vektor čvornih sila}$$

$$\{n_x\} = -\frac{1}{2} l \cdot n_x \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{vektor čvornih sila od vanjskog opterećenja}$$

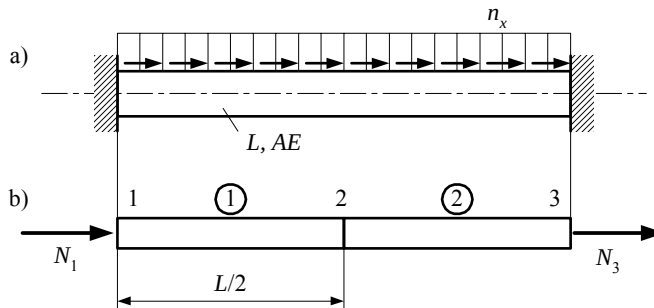
Sustav (1.6) sadrži više nepoznanica (4) od broja jednažbi (2). Ovaj nesrazmjer isčezava kada se primjene uvjeti spajanja elemenata. Kod spajanja elemenata treba voditi računa o konvenciji pozitivnog predznaka sila prema slici 1.13.



Slika 1.13 Spoj osno opterećenih štapnih elemenata

PRIMJER 1.4.

Štap osne krutosti AE i duljine L učvršćen je na oba kraja i opterećen jednolikim opterećenjem n_x prema slici 1.14.a. Odrediti uzdužni pomak štapa u sredini i reakcije na mjestima učvršćenja, ako je štap prikazan modelom konačnih elemenata prema slici 1.14b.



Slika 1.14. Primjer 1.4

Za sustav od dva elementa postavlja se matrična jednadžba,

$$[K] \cdot \{\Delta\} = \{N\} - \{N_x\}$$

koja u razvijenom obliku izgleda

$$2 \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & -1 & 0 \\ -1 & \textcircled{2} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 = 0 \\ N_3 \end{Bmatrix} - \left(-\frac{L}{4} n_x\right) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1+1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Radi se o sustavu od 3 jednadžbe s 3 nepoznanice u_2 , N_1 i N_3 .

Obzirom da su pomaci $u_1 = u_3 = 0$, pomak u_2 se može odrediti iz reduciranog sustava

$$2 \frac{EA}{L} 2u_2 = \frac{1}{4} L n_x \cdot 2 \qquad u_2 = \frac{1}{8} \frac{n_x L^2}{EA}$$

Iz ostalih jednadžbi gornjeg sustava određuju se reakcije na mjestima učvršćenja,

$$\begin{aligned} 2 \frac{EA}{L} (-1)u_2 &= N_1 + \frac{L}{4} n_x & N_1 &= -\frac{n_x L}{2} \quad \longleftarrow \text{ (smjer)} \\ 2 \frac{EA}{L} (-1)u_2 &= N_3 + \frac{L}{4} n_x & N_3 &= -\frac{n_x L}{2} \quad \longleftarrow \text{ (smjer)} \end{aligned}$$

Ovaj primjer se može riješiti i na način, da se razmatra samo **jedna polovica štapa**, te se matrična jednadžba postavlja samo za element 1 uz uvjet simetrije $N_2 = 0$,

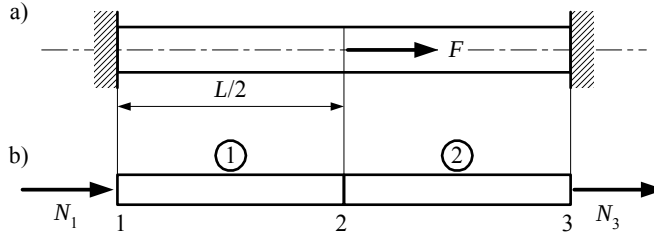
$$2 \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 = 0 \end{Bmatrix} + \frac{L}{4} n_x \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

te se dobiva

$$\begin{aligned} 2 \frac{EA}{L} u_2 &= \frac{L}{4} n_x & u_2 &= \frac{1}{8} \frac{n_x L^2}{EA} \\ 2 \frac{EA}{L} (-1)u_2 &= N_1 + \frac{1}{4} n_x & N_1 &= -\frac{1}{2} n_x L \end{aligned}$$

PRIMJER 1.5

Za štap istih značajki kao u primjeru 1.4, ali koji je opterećen koncentriranom silom F prema slici 1.15.a, odrediti pomak u sredini i reakcije na mjestu učvršćenja, ako je štap prikazan modelom od dva konačna elementa prema slici 1.15.b.



Slika 1.15 Primjer 1.5

Matrična jednadžba sustava u razvijenom obliku glasi

$$2 \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 = F \\ N_3 \end{Bmatrix}$$

Odatle slijedi

$$\begin{aligned} 2 \frac{EA}{L} 2u_2 &= F & u_2 &= \frac{1}{4} \frac{FL}{EA} \\ 2 \frac{EA}{L} (-1)u_2 &= N_1 & N_1 &= -\frac{1}{2} F \quad \leftarrow \text{(smjer)} \\ 2 \frac{EA}{L} (-1)u_2 &= N_3 & N_3 &= -\frac{1}{2} F \quad \leftarrow \text{(smjer)} \end{aligned}$$

U slučaju razmatranja samo **jedne polovice štapa** s jednim konačnim elementom, matrična jednadžba glasi

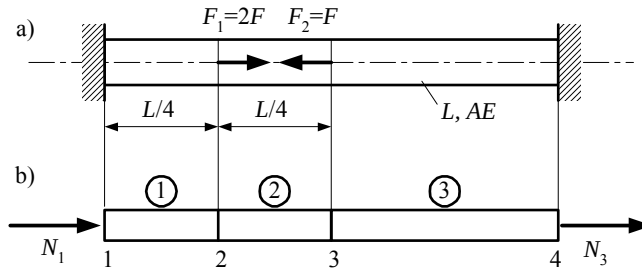
$$2 \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 = F/2 \end{Bmatrix}$$

Odatle slijedi

$$\begin{aligned} 2 \frac{EA}{L} u_2 &= \frac{F}{2} & u_2 &= \frac{1}{4} \frac{FL}{EA} \\ 2 \frac{EA}{L} (-1)u_2 &= N_1 & N_1 &= -\frac{1}{2} F \end{aligned}$$

PRIMJER 1.6

Štap osne krutosti AE i duljine L učvršćen je na oba kraja i opterećen s dvije sile F_1 i F_2 prema slici 1.16a. Odrediti raspodjelu uzdužnih pomaka i sila duž štapa za model od 3 konačna elementa, prikazanog na slici 1.16.b.



Slika 1.16. Primjer 1.6

Matrična jednadžba sustava glasi

$$2 \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & & & \\ 2 & -2 & & \\ -2 & 2+2 & -2 & \textcircled{2} \\ & -2 & 2+1 & -1 \\ & & -1 & 1 & \textcircled{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 = F_1 \\ N_3 = -F_2 \\ N_4 \end{Bmatrix}$$

Redukcijom sustava se dobiva

$$\begin{aligned} 2 \frac{EA}{L} 4u_2 + 2 \frac{EA}{L} (-2)u_3 &= F_1 \\ 2 \frac{EA}{L} (-2)u_2 + 2 \frac{EA}{L} 3u_3 &= F_2 \end{aligned}$$

Rješenje ovih jednadžbi glasi

$$u_2 = \frac{1}{4} \frac{FL}{EA} \quad u_3 = 0$$

Povratkom u osnovnu jednadžbu sustava određeno je

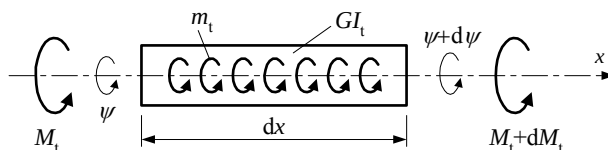
$$\begin{aligned} 2 \frac{EA}{L} (-2)u_2 &= N_1 & N_1 &= -F & \leftarrow & \text{(smjer)} \\ 2 \frac{EA}{L} \cdot 0 \cdot u_2 &= N_4 & N_4 &= 0 \end{aligned}$$

Raspodjela pomaka i sila duž štapa ista je kao na slici 1.10.

2. UVIJANJE ŠTAPA

2.1. Diferencijalna jednačba uvijanja štapa

Na slici 2.1 prikazan je diferencijalni element štapa opterećenog na uvijanje /2/ sa svojim osnovnim značajkama : M_t - moment uvijanja, ψ - kut uvijanja, m_t - raspodijeljeno opterećenje na uvijanje, GI_t - krutost štapa na uvijanje.



Slika 2.1. Diferencijalni element štapa opterećenog na uvijanje

Osnovna diferencijalna jednačba štapa proizvoljnog i konstantnog poprečnog presjeka opterećenog na uvijanje glasi

$$GI_t \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -m_t \quad (2.1)$$

Moment uvijanja, izražen kao funkcija kuta uvijanja, glasi

$$M_t = GI_t \frac{d\psi}{dx} \quad (2.2)$$

Kut uvijanja štapa na određenom odsječku svoje duljine l_x , uz uvjet da je na tom odsječku konstantna raspodjela momenta uvijanja M_t , određen je izrazom

$$\psi = \frac{M_t l_x}{GI_t} \quad (2.3)$$

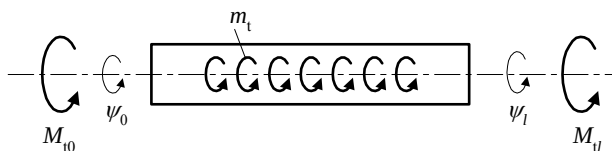
2.2. Analogija rastezanja i uvijanja štapa

Usporedbom diferencijalnih jednačbi (1.1) i (2.1) uočljiva je **potpuna analogija** između osno opterećenog i na uvijanje opterećenog štapa. Stoga se sve formule i svi numerički postupci, prikazani u Glavi 1 za osno opterećen štapa, mogu u potpunosti primijeniti i za štapa opterećen na uvijanje. Pritom je potrebno definirati analogiju fizikalnih veličina koje su svojstvene za oba načina opterećenja štapa. To je prikazano u Tablici 2.1.

Oso opterećenje	u	N	n_x	EA
Uvijanje	ψ	M_t	m_t	GI_t

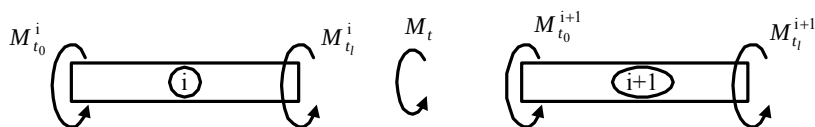
Tablica 2.1 Analogija fizikalnih veličina rastezanja i uvijanja štapa

Kod primjene metode konačnih elemenata upotrebljava se štapni element opterećen na uvijanje prema slici 2.2



Slika 2.2 Štapni konačni element opterećen na uvijanje

Kod spajanja elemenata valja se držati konvencije o pozitivnom predznaku momenata uvijanja prema slici 2.3.

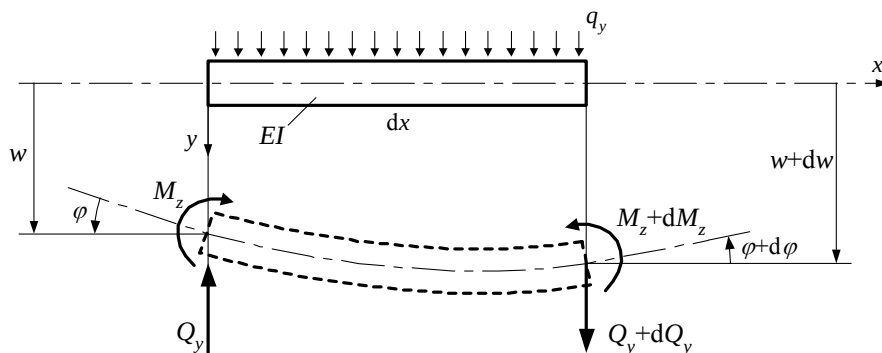


Slika 2.3 Spoj štapnih elemenata opterećenih na uvijanje

3. SAVIJANJE GREDE

3.1. Diferencijalna jednačba elastične linije

Na slici 3.1 prikazan je diferencijalni element grede opterećene na savijanje /2/ sa svojim značajkama : Q_y - poprečna sila, M_z - moment savijanja, w - progib, φ - kut nagiba, q_y - raspodijeljeno poprečno opterećenje, EI - krutost na savijanje.



Slika 3.1 Diferencijalni element grede opterećene na savijanje

Postavljanjem uvjeta ravnoteže elementa na slici 3.1. proizlazi

$$\begin{aligned} \frac{dQ_y}{dx} &= -q_y \\ \frac{dM_z}{dx} &= Q_y \end{aligned} \quad (a)$$

Spajanjem jednačbi (a) dobiva se

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = -q_y \quad (b)$$

Primjenom Hookeovog zakona za jednoosno stanje naprezanja i uvjeta ravnoteže u presjeku grede slijedi izraz za zakrivljenost elastične linije grede

$$\frac{1}{\rho} = \kappa = \frac{M_z}{EI} \quad (c)$$

U izrazu (c) veličina I je osni moment tromosti poprečnog presjeka grede obzirom na os z , ali je zbog jednostavnosti indeks z izostavljen.

Ako se na elastičnu liniju $w(x)$ primijeni matematički izraz za zakrivljenost krivulje koji glasi

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{\frac{d^2 w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

te se zanemare male veličine $\left(\frac{dw}{dx} \right)^2$ i primijeni izraz (c), proizlazi

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_z}{EI} \quad \text{odnosno} \quad M_z = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$

Dvostrukim deriviranjem gornjeg izraza za M_z i usporedbom s izrazom (b) dobiva se osnovna diferencijalna jednačba elastične linije

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q_y \quad (3.1)$$

Integriranjem jednačbe (3.1) i primjenom izraza (a) mogu se dobiti relacije između progiba w i ostalih značajki savijanja grede, kako slijedi

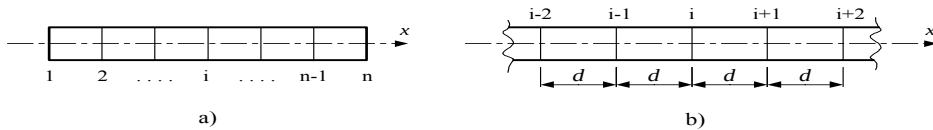
$$Q_y = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} \quad (3.2)$$

$$M_z = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.3)$$

$$\varphi = \frac{dw}{dx} \quad (3.4)$$

3.2. Numeričko rješenje primjenom metode konačnih razlika

Greda se modelira mrežom konačnih razlika prema slici 3.2.a , te se problem svodi na određivanje progiba, sila i momenata u točkama mreže.



Slika 3.2. Mreža konačnih razlika

Za svaku i -tu točku mreže, slika 3.2.b , postavlja se slijedeća algebarska jednačba

$$EI \frac{1}{d^4} (w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}) = q_i \quad (3.5)$$

Ova **diferencijska jednadžba** zamjenjuje diferencijalnu jednadžbu (3.1) u **i**-toj točki mreže konačnih razlika. Ona se postavlja za sve točke mreže (osim za točke na rubu), pa se problem svodi na rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi. Rješenje ovog sustava su progibi u točkama mreže.

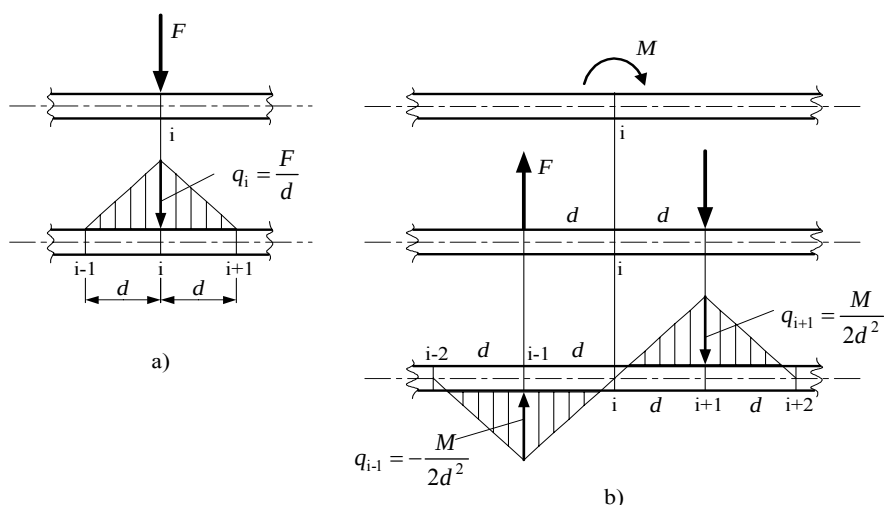
Vanjsko opterećenje može biti, osim raspodijeljenog opterećenja **q**, koncentrirana sila **F** ili moment **M**. Ovakva opterećenja trebaju se zamijeniti s odgovarajućim trokutasto raspodijeljenim opterećenjem, slike 3.3.a i 3.3.b, da bi se očuvao kontinuitet jednadžbi.

Za poprečnu silu **Q**, moment savijanja **M** i kut nagiba **φ** mogu se u **i**-toj točki mreže također postaviti odgovarajući diferencijski izrazi u skladu s jednadžbama (3.2), (3.3) i (3.4), kako slijedi

$$Q_i = EI \frac{1}{2d^3} (w_{i+2} - 2w_{i+1} + 2w_{i-1} - w_{i-2}) \quad (3.6)$$

$$M_i = -EI \frac{1}{d^2} (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) \quad (3.7)$$

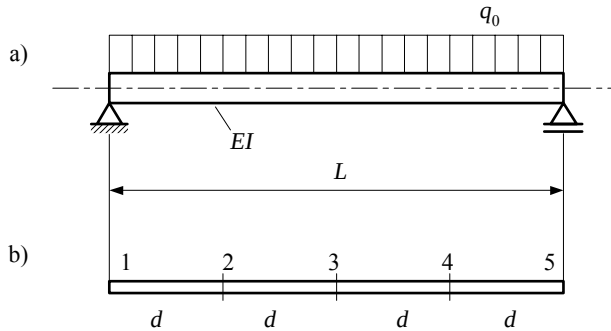
$$\varphi_i = \frac{1}{2d} (w_{i+1} - w_{i-1}) \quad (3.8)$$



Slika 3.3 Koncentrirana sila **F** i moment **M** i zamjensko raspodijeljeno opterećenje

PRIMJER 3.1

Greda krutosti na savijanje EI i duljine L zglobno je oslonjena na krajevima i opterećena jednolikim opterećenjem q_0 prema slici 3.4.a. Odrediti elastičnu liniju i reakcije u osloncima grede za mrežu konačnih razlika prema slici 3.4.b.



Slika 3.4 Primjer 3.1

Diferencijske jednačbe oblika (3.5) u točkama mreže $i=2, 3$ i 4 glase:

$$\begin{aligned} i = 2 \quad w_4 - 4w_3 + 6w_2 - 4w_1 + w_0 &= \frac{q_2 d^4}{EI} \\ i = 3 \quad w_5 - 4w_4 + 6w_3 - 4w_2 + w_1 &= \frac{q_3 d^4}{EI} \\ i = 4 \quad w_6 - 4w_5 + 6w_4 - 4w_3 + w_2 &= \frac{q_4 d^4}{EI} \end{aligned}$$

gdje je $q_2 = q_3 = q_4 = q_0$

Za prekobrojne nepoznanice w_0, w_1, w_5 i w_6 postavljaju se slijedeći rubni uvjeti:

$$\begin{aligned} i = 1 \quad w_1 &= 0 \\ M_1 = 0 &= -EI \frac{1}{d^2} (w_2 - 2w_1 + w_0) \end{aligned}$$

što daje $w_0 = -w_2$

$$\begin{aligned} i = 5 \quad w_5 &= 0 \\ M_5 = 0 \end{aligned}$$

što daje $w_6 = -w_4$

Uvođenjem rubnih uvjeta rješava se osnovni sustav jednačbi, te rješenje glasi

$$w_2 = \frac{5}{512} \frac{q_0 L^4}{EI}, \quad w_3 = \frac{7}{512} \frac{q_0 L^4}{EI}, \quad w_4 = \frac{5}{512} \frac{q_0 L^4}{EI}$$

Reakcije u osloncima određuju se na osnovu izraza (3.6) kako slijedi

$$R_1 = -EI \frac{1}{2d^3} (w_3 - 2w_2 + 2w_0 - w_{-1})$$

$$R_5 = -EI \frac{1}{2d^3} (w_7 - 2w_6 + 2w_4 - w_3)$$

Prekobrojne nepoznanice w_{-1} i w_7 određuju se iz rubnih uvjeta $M_1 = M_5 = 0$, ali s dvostrukim rasponom susjednih točaka mreže, tj.

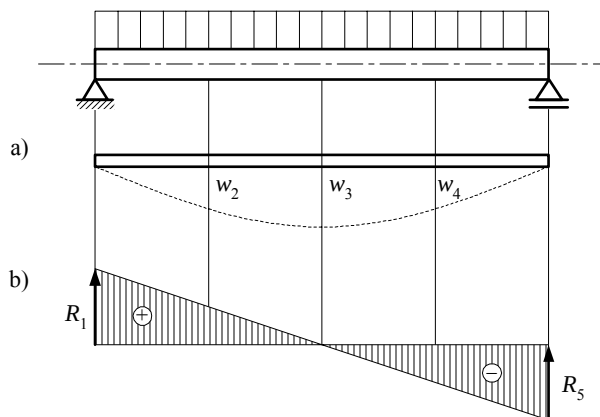
$$M_1 = 0 = -EI \frac{1}{(2d)^2} (w_3 - 2w_1 + w_{-1}) \quad \text{što daje } w_{-1} = -w_3$$

$$M_5 = 0 = -EI \frac{1}{(2d)^2} (w_7 - 2w_5 + w_3) \quad \text{što daje } w_7 = -w_3$$

Uvrštenjem u izraze za R_1 i R_5 proizlazi, da je

$$R_1 = \frac{3}{8} qL, \quad R_5 = -\frac{3}{8} qL \quad \uparrow \text{ (smjer)}$$

Elastična linija i dijagram raspodjele poprečnih sila prikazani su na slikama 3.5.a i b.



Slika 3.5 Primjer 3.1

Ovaj problem se može riješiti razmatranjem samo $\frac{1}{2}$ grede i uvođenjem **uvjeta simetrije** na sredini grede. U tom slučaju se diferencijska jednačba oblika (3.5) postavlja samo u točkama $i=2$ i 3 mreže

$$i = 2 \quad w_4 - 4w_3 + 6w_2 - 4w_1 + w_0 = \frac{q_0 d^4}{EI}$$

$$i = 3 \quad w_5 - 4w_4 + 6w_3 - 4w_2 + w_1 = \frac{q_0 d^4}{EI}$$

Rubni uvjeti: $i = 1$ $w_1 = 0$
 $M_1 = 0$

što daje $w_0 = -w_2$

Uvjet simetrije: $i = 3$ $\varphi_3 = 0 = \frac{1}{2d}(w_4 - w_2)$

što daje $w_4 = w_2$

$$Q_3 = 0 = -EI \frac{1}{2d^3}(w_5 - 2w_4 + 2w_2 - w_1)$$

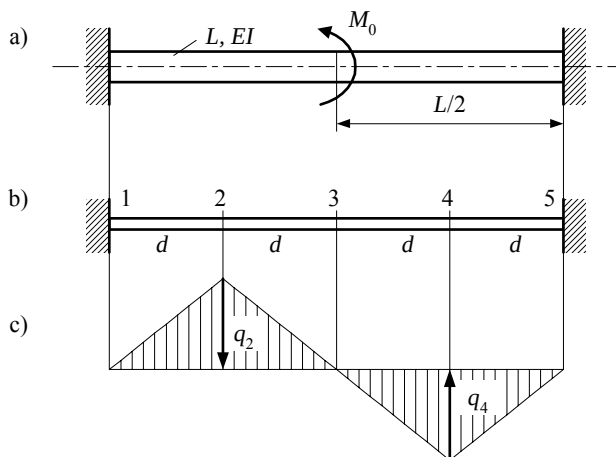
što daje $w_5 = 0$

Uvođenjem ovih vrijednosti u osnovni sustav jednadžbi proizlazi rješenje

$$w_2 = \frac{5}{512} \frac{q_0 L^4}{EI}, \quad w_3 = \frac{7}{512} \frac{q_0 L^4}{EI}$$

PRIMJER 3.2

Greda krutosti na savijanje EI i duljine L uklještена je na oba kraja i opterećena momentom M_0 prema slici 3.6.a. Odrediti elastičnu liniju i reakcije u uklještenju koristeći mrežu konačnih razlika prema slici 3.6.b.



Slika 3.6. Primjer 3.2

Moment M_0 zamjenjuje se s odgovarajućim trokutasto raspodijeljenim opterećenjem prema slici 3.6.c, gdje je

$$q_2 = \frac{M_0}{2d^2} \quad q_3 = 0 \quad q_4 = -\frac{M_0}{2d^2}$$

Diferencijske jednačbe oblika (3.5) u tačkama $i=2, 3$ i 4 glase :

$$i = 2 \quad w_4 - 4w_3 + 6w_2 - 4w_1 + w_0 = \frac{q_2 d^4}{EI}$$

$$i = 3 \quad w_5 - 4w_4 + 6w_3 - 4w_2 + w_1 = \frac{q_3 d^4}{EI}$$

$$i = 4 \quad w_6 - 4w_5 + 6w_4 - 4w_3 + w_2 = \frac{q_4 d^4}{EI}$$

Prekobrojne nepoznanice w_0, w_1, w_5 i w_6 određuju se iz rubnih uvjeta

$$i = 1, \quad w_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0 = \frac{1}{2d}(w_2 - w_0)$$

što daje $w_0 = w_2$

$$i = 5 \quad w_5 = 0, \quad \varphi_5 = 0$$

što daje $w_6 = w_4$

Uvrštavanjem ovih vrijednosti u osnovni sustav jednačbi proizlazi rješenje

$$w_2 = \frac{1}{192} \frac{M_0 L^2}{EI}, \quad w_3 = 0, \quad w_4 = -\frac{1}{192} \frac{M_0 L^2}{EI}$$

Reaktivni momenti u uklještenju određuju se primjenom izraza (3.7)

$$M_1 = -EI \frac{1}{d^2} (w_2 - 2w_1 + w_0) = -\frac{1}{6} M_0 \quad \curvearrowright \text{ (smjer)}$$

$$M_5 = -EI \frac{1}{d^2} (w_6 - 2w_5 + w_4) = \frac{1}{6} M_0$$

Reaktivne sile u uklještenju određuju se primjenom izraza (3.6)

$$R_1 = -EI \frac{1}{2d^3} (w_3 - 2w_2 + 2w_0 - w_{-1})$$

$$R_5 = -EI \frac{1}{2d^3} (w_7 - 2w_6 + 2w_4 - w_3)$$

Prekobrojne nepoznanice w_{-1} i w_7 se određuju postavljanjem izraza za poznate reaktivne momente M_1 i M_5 ali s dvostrukim rasponom susjednih tačaka mreže

$$M_1 = -\frac{1}{6} M_0 = -EI \frac{1}{(2d)^2} (w_3 - 2w_1 + w_{-1})$$

$$\text{što daje } w_{-1} = \frac{1}{24} \frac{M_0 L^2}{EI}$$

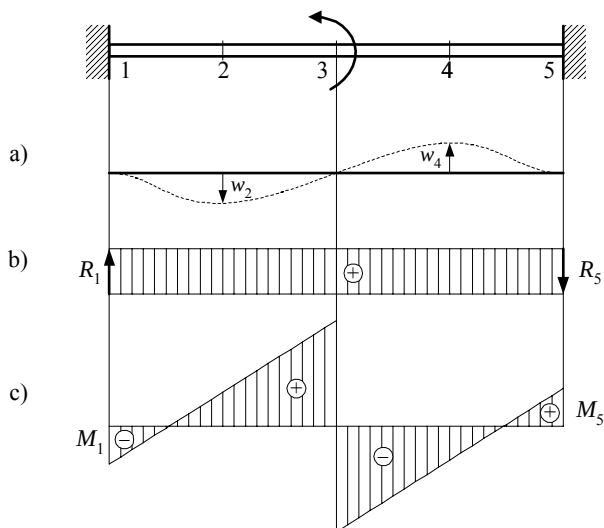
$$M_5 = \frac{1}{6} M_0 = -EI \frac{1}{(2d)^2} (w_7 - 2w_5 + w_3)$$

$$\text{što daje } w_7 = -\frac{1}{24} \frac{M_0 L^2}{EI}$$

Uvođenjem ovih vrijednosti u izraze za R_1 i R_5 slijedi

$$R_1 = \frac{4}{3} \frac{M_0}{L} \quad R_5 = \frac{4}{3} \frac{M_0}{L}$$

Elastična linija i raspodjela poprečnih sila i momenata savijanja duž grede prikazana je na slikama 3.7.a, b i c.



Slika 3.7. Primjer 3.2

Isti se problem može riješiti i na način, da se razmatra samo **jedna polovica grede**, te da se uvedu uvjeti antisimetrije na sredini grede. Diferencijska jednačba oblika (3.5) postavlja se samo u točki $i=2$ mreže, a vanjski moment M_0 se u proračun uvodi preko rubnog uvjeta na sredini grede. Slijedi

$$i = 2 \quad w_4 - 4w_3 + 6w_2 - 4w_1 + w_0 = 0$$

Prekobrojne nepoznanice w_0 , w_1 , w_3 i w_4 određuju se iz rubnih uvjeta i uvjeta antisimetrije. Rubni uvjeti :

$$i = 2 \quad w_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0$$

što daje $w_0 = w_2$

$$i = 3 \quad M_3 = \frac{M_0}{2} = -EI \frac{1}{d^2} (w_4 - 2w_3 + w_2)$$

$$\text{što daje } w_4 = -w_2 + 2w_3 - \frac{M_0 d^2}{2EI}$$

Uvjet antisimetrije : $i = 3 \quad w_3 = 0$

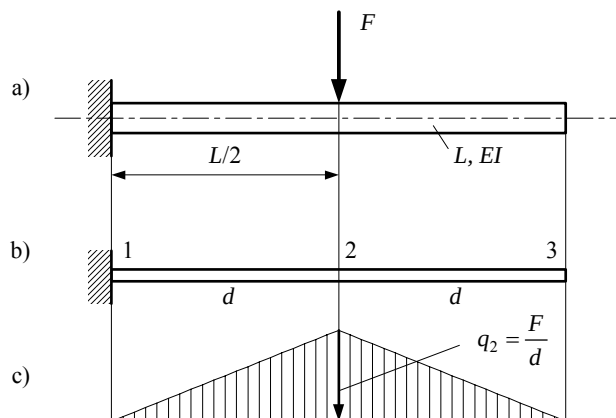
Uvođenjem ovih vrijednosti u osnovni sustav jednažbi dobiva se rješenje

$$w_2 = \frac{1}{192} \frac{M_0 L^2}{EI}$$

Daljnji postupak za određivanje reakcija je identičan kao i u slučaju razmatranja čitave grede.

PRIMJER 3.3

Konzolni nosač krutosti na savijanje EI i duljine L opterećen je na sredini silom F prema slici 3.8.a. Odrediti elastičnu liniju, reakcije u uklještenju i raspodjelu poprečnih sila i momenata savijanja za mrežu konačnih razlika prema slici 3.8.b.



Slika 3.8 Primjer 3.3

Sila F se zamjenjuje trokutasto raspodijeljenim opterećenjem prema slici 3.8.c. Zatim se u točkama $i=2$ i 3 mreže postavljaju diferencijske jednažbe oblika (3.5)

$$\begin{aligned} i=2 \quad w_4 - 4w_3 + 6w_2 - 4w_1 + w_0 &= \frac{q_2 d^4}{EI} \\ i=3 \quad w_5 - 4w_4 + 6w_3 - 4w_2 + w_1 &= 0 \end{aligned}$$

Prekobrojne nepoznanice w_0 , w_1 , w_4 i w_5 određuju se iz rubnih uvjeta

$$i=1 \quad w_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0$$

što daje $w_0 = w_2$

$$i=3 \quad M_3 = 0 = w_4 - 2w_3 + w_2$$

što daje $w_4 = 2w_3 - w_2$

$$Q_3 = 0 = w_5 - 2w_4 + 2w_2 - w_1$$

što daje $w_5 = 2w_4 - 2w_2$

Uvođenjem ovih vrijednosti u osnovni sustav jednačbi proizlazi rješenje

$$w_2 = \frac{FL^3}{16EI}, \quad w_3 = \frac{FL^3}{8EI}$$

Reaktivni moment M_1 u uklještenju određen je izrazom (3.7)

$$M_1 = -EI \frac{1}{d^2} (w_2 - 2w_1 + w_0)$$

$$M_1 = -\frac{1}{2} FL \quad \curvearrowright \text{(smjer)}$$

Reaktivna sila R_1 u uklještenju određena je izrazom (3.6)

$$R_1 = -EI \frac{1}{2d^3} (w_3 - 2w_1 + w_{-1})$$

Prekobrojna nepoznanica w_{-1} određuje se postavljanjem izraza za poznati moment M_1 ali s dvostrukim rasponom točaka mreže

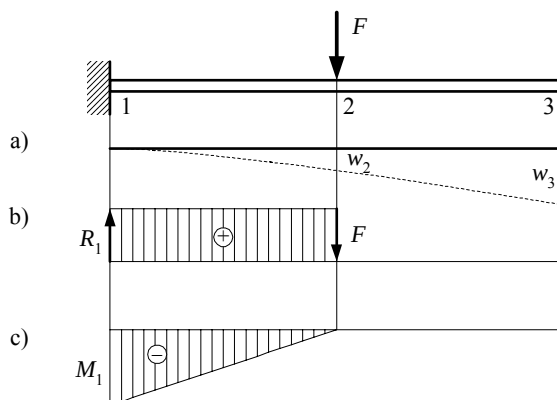
$$M_1 = -EI \frac{1}{(2d)^2} (w_3 - 2w_1 + w_{-1})$$

što daje $w_{-1} = \frac{3}{8} \frac{FL^3}{EI}$

te proizlazi

$$R_1 = F$$

Elastična linija i raspodjela poprečnih sila i momenata savijanja duž nosača prikazani su na slikama 3.9.a, b i c.



Slika 3.9. Primjer 3.3

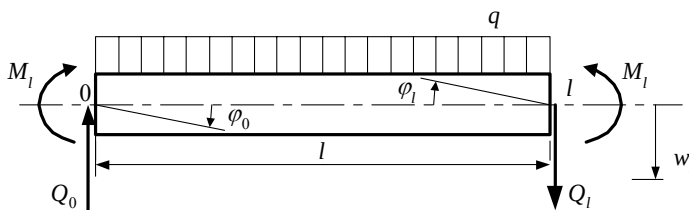
3.3. Numeričko rješenje primjenom metode konačnih elemenata

Gredni nosač se modelira sustavom grednih konačnih elemenata /4/ prema slici 3.10. Problem se svodi na određivanje pomaka, sila i momenata u spojnim točkama elemenata, tj. u čvorovima.



Slika 3.10. Mreža konačnih elemenata

Gredni konačni element sa svojim značajkama prikazan je na slici 3.11.



Slika 3.11. Gredni konačni element

Element ima dva čvora, **0** i **1**, u svakom čvoru postoji progib **w**, nagib **φ**, poprečna sila **Q** i moment savijanja **M**. Pomaci i sile u čvorovima vezani su međusobno matricnom jednačbom

$$[k]\{\delta\} = \{f\} - \{f_q\} \quad (3.9)$$

gdje je

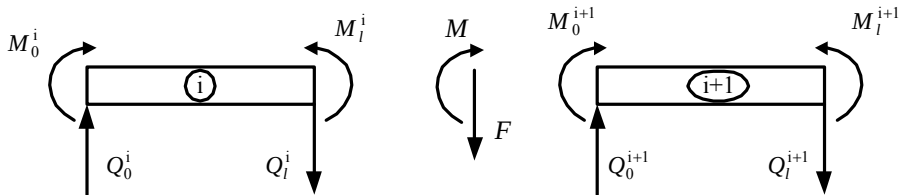
$$[k] = \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 2l^2 & -3l & l^2 & \\ \text{simet.} & 6 & -3l & \\ & & & 2l^2 \end{bmatrix} \quad \text{matrica krutosti elementa}$$

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \\ w_1 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix} \quad \text{vektor čvornih pomaka}$$

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} -Q_0 \\ M_0 \\ Q_l \\ -M_l \end{Bmatrix} \quad \text{vektor čvornih sila}$$

$$\{f_q\} = -\frac{1}{2}ql \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{6}l \\ 1 \\ -\frac{1}{6}l \end{Bmatrix} \quad \text{vektor čvornih sila vanjskog opterećenja}$$

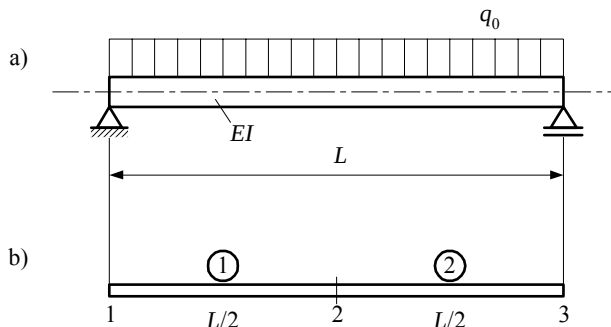
Sustav (3.9) sadrži više nepoznanica (8) od broja jednažbi (4). Ovaj nesrazmjer isčezava, kada se kod spajanja elemenata uvedu rubni uvjeti, te uvjeti ravnoteže i uzajamnosti u spojnim čvorovima. Pritom valja voditi računa o konvenciji pozitivnog predznaka sila i momenata prema slici 3.12.



Slika 3.12. Spoj grednih elemenata

PRIMJER 3.4

Gredni nosač krutosti na savijanje EI i duljine L zglobno je oslonjen na krajevima i opterećen jednolikim opterećenjem q_0 prema slici 3.13.a. Odrediti elastičnu liniju i reakcije u osloncima nosača, ako je nosač predstavljen modelom konačnih elemenata prema slici 3.13.b.

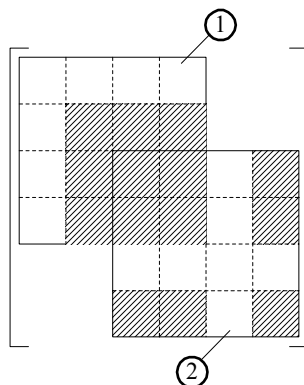


Slika 3.13. Primjer 3.4

Matrična jednačba modela glasi

$$[K] \cdot \{\Delta\} = \{F\} - \{F_q\}$$

ili u razvijenom obliku



$$\begin{bmatrix} w_1 = 0 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 = 0 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 \\ M_1 = 0 \\ Q_2 = 0 \\ M_2 = 0 \\ R_3 \\ M_3 = 0 \end{bmatrix} - \left(-\frac{1}{4}q_0L\right) \begin{bmatrix} 1 \\ L/12 \\ 1+1 \\ -L/12 + L/12 \\ 1 \\ -L/12 \end{bmatrix}$$

Pomaci u čvorovima određuju se iz reduciranog sustava jednačbi (zasjenčena polja)

$$\begin{aligned} k_{22}\varphi_1 + k_{23}w_2 + k_{24}\varphi_2 &= \frac{1}{48}q_0L^2 \\ k_{32}\varphi_1 + k_{33}w_2 + k_{34}\varphi_2 + k_{36}\varphi_3 &= \frac{1}{2}q_0L \\ k_{42}\varphi_1 + k_{43}w_2 + k_{44}\varphi_2 + k_{46}\varphi_3 &= 0 \\ k_{63}w_2 + k_{64}\varphi_2 + k_{66}\varphi_3 &= -\frac{1}{48}q_0L^2 \end{aligned}$$

gdje je

$$\begin{aligned} k_{22} &= 8\frac{EI}{L} & k_{23} &= -24\frac{EI}{L^2} & k_{24} &= 4\frac{EI}{L} \\ k_{32} &= k_{23} & k_{33} &= 192\frac{EI}{L^3} & k_{34} &= 0 & k_{36} &= 24\frac{EI}{L} \\ k_{42} &= k_{24} & k_{43} &= k_{34} = 0 & k_{44} &= 16\frac{EI}{L} & k_{46} &= 4\frac{EI}{L} \\ & & k_{63} &= k_{36} & k_{64} &= k_{46} & k_{66} &= 8\frac{EI}{L} \end{aligned}$$

Rješenje gornjeg sustava glasi

$$\varphi_1 = \frac{1}{24} \frac{q_0L^3}{EI} \quad w_2 = \frac{5}{384} \frac{q_0L^4}{EI} \quad \varphi_2 = 0 \quad \varphi_3 = -\frac{1}{24} \frac{q_0L^3}{EI}$$

Povratkom u nereducirani sustav mogu se neposredno odrediti reakcije u osloncima

$$k_{12}\varphi_1 + k_{13}w_2 = -R_1 + \frac{1}{4}q_0L$$

$$k_{53}w_2 + k_{56}\varphi_3 = R_3 + \frac{1}{4}q_0L$$

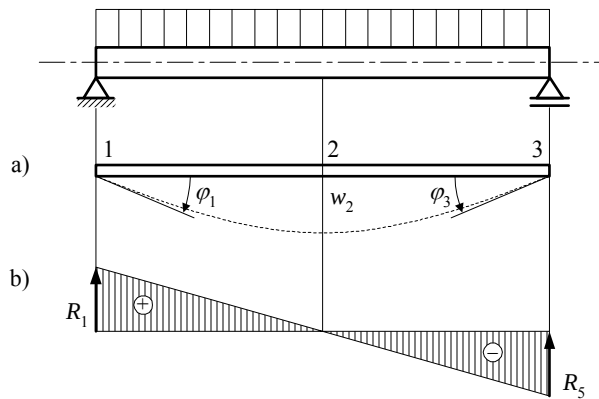
gdje su

$$k_{12} = 24 \frac{EI}{L} \quad k_{13} = -96 \frac{EI}{L^3} \quad k_{53} = -96 \frac{EI}{L^3} \quad k_{56} = -24 \frac{EI}{L^2}$$

te proizlazi

$$R_1 = \frac{1}{2}q_0L \quad R_3 = -\frac{1}{2}q_0L \quad \uparrow \quad (\text{smjer})$$

Elastična linija i raspodjela poprečnih sila prikazani su na slikama 3.14.a i b.



Slika 3.14. Primjer 3.4

Ovaj primjer se mogao riješiti razmatranjem samo **jedne polovice nosača** s jednim konačnim elementom i primjenom uvjeta simetrije $\varphi_2 = 0$, $Q_2 = 0$. Matrična jednažba glasi

$$\begin{bmatrix} \text{grid} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 = 0 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R_1 \\ M_1 = 0 \\ Q_2 = 0 \\ -M_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{4}q_0L \begin{Bmatrix} 1 \\ L/12 \\ 1 \\ -L/12 \end{Bmatrix}$$

Redukcijom sustava (zasjenčena polja) proizlazi

$$\begin{aligned} k_{22}\varphi_1 + k_{23}w_2 &= \frac{1}{48}q_0L^2 & \text{gdje je} & \quad k_{22} = 8\frac{EI}{L}, \quad k_{23} = -24\frac{EI}{L^2} \\ k_{32}\varphi_1 + k_{33}w_2 &= \frac{1}{4}q_0L & \text{gdje je} & \quad k_{32} = k_{23}, \quad k_{33} = 96\frac{EI}{L^3} \end{aligned}$$

Rješenje sustava glasi

$$\varphi_1 = \frac{1}{24} \frac{q_0L^3}{EI}, \quad w_2 = \frac{5}{384} \frac{q_0L^4}{EI}$$

Povratkom u nereducirani sustav mogu se neposredno odrediti reakcija R_1 i moment savijanja M_2 na sredini nosača

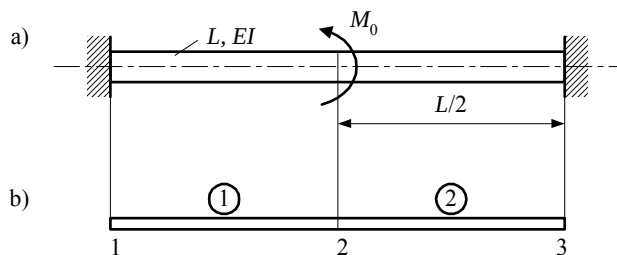
$$\begin{aligned} k_{12}\varphi_1 + k_{13}w_2 &= -R_1 + \frac{1}{4}q_0L & \text{gdje je} & \quad k_{12} = 24\frac{EI}{L^2}, \quad k_{13} = -96\frac{EI}{L^3} \\ k_{42}\varphi_1 + k_{43}w_2 &= -M_2 - \frac{1}{48}q_0L^2 & \text{gdje je} & \quad k_{42} = 4\frac{EI}{L}, \quad k_{43} = -24\frac{EI}{L^2} \end{aligned}$$

Proizlazi da je

$$R_1 = \frac{1}{2}q_0L \quad M_2 = \frac{1}{8}q_0L^2$$

PRIMJER 3.5

Gredni nosač krutosti na savijanje EI i duljine L uklješten je na oba kraja i opterećen momentom M_0 prema slici 3.15.a. Odrediti elastičnu liniju i reakcije u uklještenju nosača upotrebom modela konačnih elemenata prema slici 3.15.b.

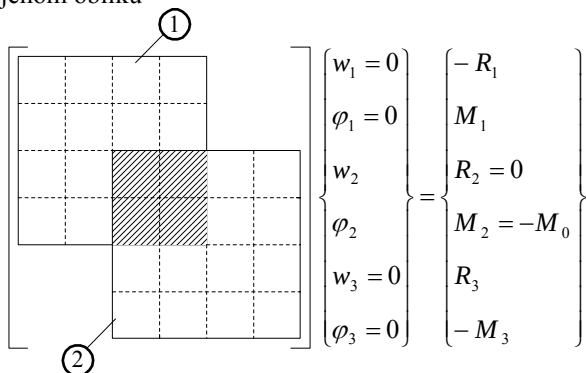


Slika 3.15. Primjer 3.5

Matrična jednačba sustava glasi

$$[K] \cdot \{\Delta\} = \{F\}$$

ili u razvijenom obliku



Pomaci u čvorovima određuje se iz reduciranog sustava jednažbi (zasjenčena polja)

$$\begin{aligned} k_{33}w_2 + k_{34}\varphi_2 &= 0 \\ k_{43}w_2 + k_{44}\varphi_2 &= -M_0 \end{aligned}$$

gdje je $k_{33} = 192 \frac{EI}{L^2}$, $k_{34} = k_{43} = 0$, $k_{44} = 16 \frac{EI}{L}$

Rješenje sustava glasi : $w_2 = 0$ $\varphi_2 = -\frac{1}{16} \frac{M_0 L}{EI}$

Reaktivne sile i momenti u uklještenju određuju se povratkom u nereducirani sustav jednažbi

$$-R_1 = k_{14}\varphi_2, \quad M_1 = k_{24}\varphi_2, \quad R_3 = k_{54}\varphi_2, \quad -M_3 = k_{64}\varphi_2$$

gdje je:

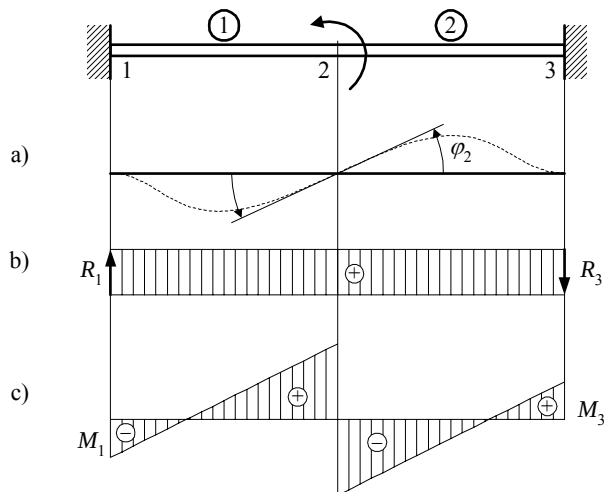
$$k_{14} = 24 \frac{EI}{L^2}, \quad k_{24} = 4 \frac{EI}{L}, \quad k_{54} = -24 \frac{EI}{L^2}, \quad k_{64} = 4 \frac{EI}{L}$$

Rješenje glasi

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{3}{2} \frac{M_0}{L}, & R_3 &= \frac{3}{2} \frac{M_0}{L} \\ M_1 &= -\frac{1}{4} M_0, & M_3 &= \frac{1}{4} M_0 \end{aligned}$$

(smjer)

Elastična linija, te dijagrami raspodjele poprečnih sila i momenata savijanja prikazani su na slikama 3.16.a, b i c.



Slika 3.16. Primjer 3.5

Ovaj primjer se može takođe riješiti razmatranjem samo **jedne polovice nosača** s jednim konačnim elementom i primjenom uvjeta antisimetrije $w_2 = 0$, $M_2 = M_0/2$. Matrična jednačba glasi

$$\begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 = 0 \\ \varphi_1 = 0 \\ w_2 = 0 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ -M_2 = M_0/2 \end{Bmatrix}$$

Redukcijom sustava (zasjenčena polja) proizlazi

$$k_{44}\varphi_2 = \frac{-M_0}{2} \quad \text{gdje je} \quad k_{44} = 8 \frac{EI}{L}$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{16} \frac{M_0 L}{EI}$$

Izrazi za reakcije glase

$$k_{14}\varphi_2 = -R_1 \quad \text{gdje je} \quad k_{14} = 24 \frac{EI}{L^2}$$

$$k_{24}\varphi_2 = M_1 \quad \text{gdje je} \quad k_{24} = 4 \frac{EI}{L}$$

te se dobiva

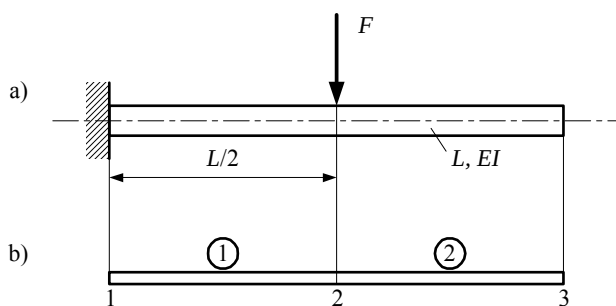
$$R_1 = \frac{3}{2} \frac{M_0}{L}$$

$$M_1 = -\frac{1}{4} M_0 \quad \curvearrowright \text{ (smjer)}$$

PRIMJER 3.6

Konzolni nosač krutosti na savijanje EI i duljine L opterećen je na sredini silom F prema slici 3.17.a. Odrediti elastičnu liniju i reakcije u uklještenju upotrebom modela konačnih elemenata prema slici 3.17.b.

Zadano: $L = 1 \text{ m}$, $F = 1,6 \text{ kN}$, $EI = 10 \text{ kN/m}^2$



Slika 3.17. Primjer 3.6

Matrična jednadžba modela glasi

$$[K] \cdot \{\Delta\} = \{F\}$$

ili u razvijenom obliku

$$\begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 = 0 \\ \varphi_1 = 0 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R_1 \\ M_1 \\ Q_2 = F \\ M_2 = 0 \\ Q_3 = 0 \\ M_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

Pomaci u čvorovima određuju se iz reduciranog sustava (zasjenčena polja)

$$\begin{aligned}k_{33}w_2 + k_{34}\varphi_2 + k_{35}w_3 + k_{36}\varphi_3 &= F \\k_{43}w_2 + k_{44}\varphi_2 + k_{45}w_3 + k_{46}\varphi_3 &= 0 \\k_{53}w_2 + k_{54}\varphi_2 + k_{55}w_3 + k_{56}\varphi_3 &= 0 \\k_{63}w_2 + k_{64}\varphi_2 + k_{65}w_3 + k_{66}\varphi_3 &= 0\end{aligned}$$

gdje je

$$\begin{aligned}k_{33} &= 16 \frac{EI}{L^3} (6 + 6) & k_{34} &= 0 & k_{35} &= 16 \frac{EI}{L^3} (-6) & k_{36} &= 16 \frac{EI}{L^3} \frac{3}{2} L \\k_{43} &= k_{34} = 0 & k_{44} &= 16 \frac{EI}{L^3} L^2 & k_{45} &= 16 \frac{EI}{L^3} \left(-\frac{3L}{2} \right) & k_{46} &= 16 \frac{EI}{L^3} \frac{L^2}{4} \\k_{53} &= k_{35} & k_{54} &= k_{45} & k_{55} &= 16 \frac{EI}{L^3} 6 & k_{56} &= 16 \frac{EI}{L^3} \left(-\frac{3}{2} L \right) \\k_{63} &= k_{36} & k_{64} &= k_{46} & k_{65} &= k_{56} & k_{66} &= 16 \frac{EI}{L^3} \frac{1}{2} L^2\end{aligned}$$

Uvođenjem ovih izraza u gornji sustav jednažbi slijedi

$$\begin{aligned}12w_2 & & -6w_3 & + \frac{3}{2}L\varphi_3 & = \frac{FL^3}{16EI} \\& L^2\varphi_2 & - \frac{3}{2}Lw_3 & + \frac{1}{4}L^2\varphi_3 & = 0 \\-6w_2 & - \frac{3}{2}L\varphi_2 & + 6w_3 & - \frac{3}{2}L\varphi_3 & = 0 \\\frac{3}{2}Lw_2 & + \frac{1}{4}L^2\varphi_2 & - \frac{3}{2}Lw_3 & + \frac{1}{2}L^2\varphi_3 & = 0\end{aligned}$$

Za zadane numeričke vrijednosti proizlazi rješenje sustava

$$w_2 = 0,0066 \text{ m} \quad \varphi_2 = 0,02 \text{ rad} \quad w_3 = 0,016 \text{ m} \quad \varphi_3 = 0,02 \text{ rad}$$

Reakcije u uklještenju određuju se iz nereduciranog sustava jednažbi neposrednim izračunavanjem

$$\begin{aligned}-R_1 &= k_{13}w_2 + k_{14}\varphi_2 \\M_1 &= k_{23}w_2 + k_{24}\varphi_2\end{aligned}$$

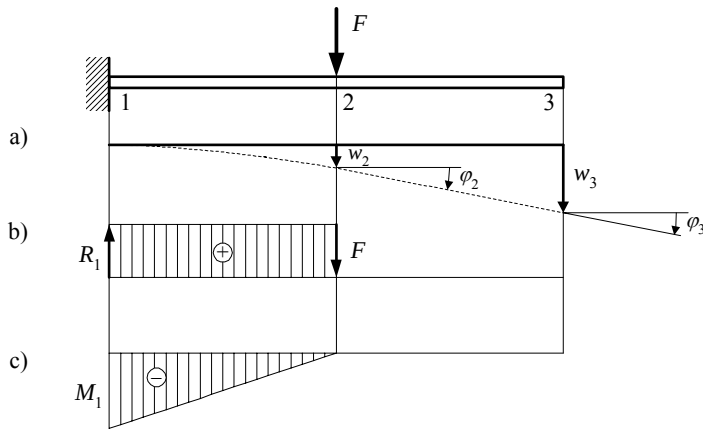
gdje je

$$k_{13} = 16 \frac{EI}{L^3} (-6) \quad k_{14} = 16 \frac{EI}{L^3} \frac{3}{2} L \quad k_{23} = 16 \frac{EI}{L^3} \left(-\frac{3}{2} L \right) \quad k_{24} = 16 \frac{EI}{L^3} \frac{1}{4} L^2$$

Proizlazi, da je

$$\begin{aligned}R_1 &= 1,6 \text{ kN} \\M_1 &= -0,79 \text{ kNm} \quad \curvearrowright \text{ (smjer)}\end{aligned}$$

Elastična linija i raspodjela poprečnih sila i momenata savijanja duž grede prikazani su na slici 3.18.



Slika 3.18. Primjer 3.6

PRIMJER 3.7

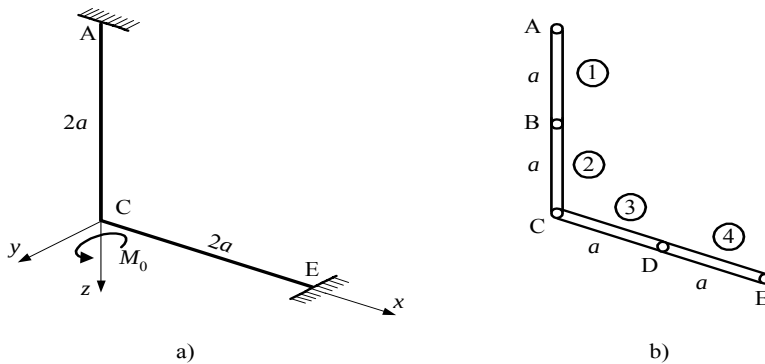
Okvirni nosač prema slici 3.19.a sastoji se iz dijela AC s krutošću na uvijanje GI_p i iz dijela CE s krutošću na savijanje EI , te je opterećen momentom M_0 u točki C. Odrediti:

- raspodjelu deformacija
- reakcije u osloncima A i E s odgovarajućim naprezanjima

Dio AC ima beskonačno veliku krutost na savijanje. Problem riješiti metodom konačnih elemenata s modelom prema slici 3.19b.

Zadano: $a = 2 \text{ m}$, $M_0 = 2 \text{ kNm}$, $d = 0,05 \text{ m}$ (promjer poprečnog presjeka nosača),

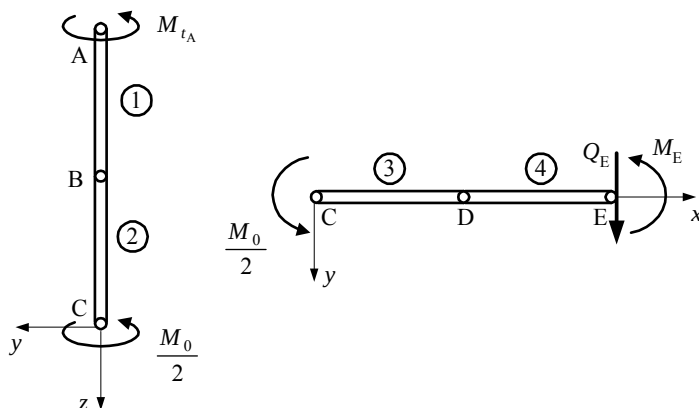
$$E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2, G = 0,8 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2, \nu = 0,3$$



Slika 3.19. Primjer 3.7

Dio AC opterećen je na uvijanje, pa je modeliran s dva štapna elementa (1,2); dio CE opterećen je na savijanje, te je modeliran s dva gredna elementa (3,4).

Reakcije u osloncima pretpostavljene su prema 3.20.



Slika 3.20. Primjer 3.7

Matrična jednadžba modela glasi

$$[K] \cdot \{\Delta\} = \{F\}$$

odnosno u razvijenom obliku

$$\begin{bmatrix}
 \text{Element 1} & \text{Element 2} & \text{Element 3} & \text{Element 4} \\
 \text{Element 2} & \text{Element 3} & \text{Element 4} & \text{Element 5}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \psi_A = 0 \\
 \psi_B \\
 w_C = 0 \\
 \varphi_C = \psi_C \\
 w_D \\
 \varphi_D \\
 w_E = 0 \\
 \varphi_E = 0
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 M_{tA} \\
 M_{tB} = 0 \\
 Q_C = 0 \\
 M_{tC} = -M_{t0} \\
 Q_D = 0 \\
 M_D = 0 \\
 Q_E \\
 -M_E
 \end{Bmatrix}$$

U točki C progib $w_C = 0$, jer ta točka pripada i dijelu AC okvira s beskonačnom krutosti na savijanje. Kut uvijanja ψ_C dijela AC je ujedno i kut nagiba φ_C kod savijanja dijela CE.

Reducirani sustav jednadžbi glasi

$$\begin{aligned} k_{22}\psi_B + k_{24}\varphi_C &= 0 \\ k_{42}\psi_B + k_{44}\varphi_C + k_{45}w_D + k_{46}\varphi_D &= M_{t_0} \\ k_{54}\varphi_C + k_{55}w_D + k_{56}\varphi_D &= 0 \\ k_{64}\varphi_C + k_{65}w_D + k_{66}\varphi_D &= 0 \end{aligned}$$

gdje je

$$\begin{aligned} k_{22} &= k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{24} &= k_{42} = k_{12}^2 \\ k_{44} &= k_{22}^2 + k_{22}^3 & k_{45} &= k_{23}^3 & k_{46} &= k_{24}^3 \\ k_{54} &= k_{45} & k_{55} &= k_{33}^3 + k_{11}^4 & k_{56} &= k_{34}^3 + k_{12}^4 \\ k_{64} &= k_{46} & k_{65} &= k_{56} \end{aligned}$$

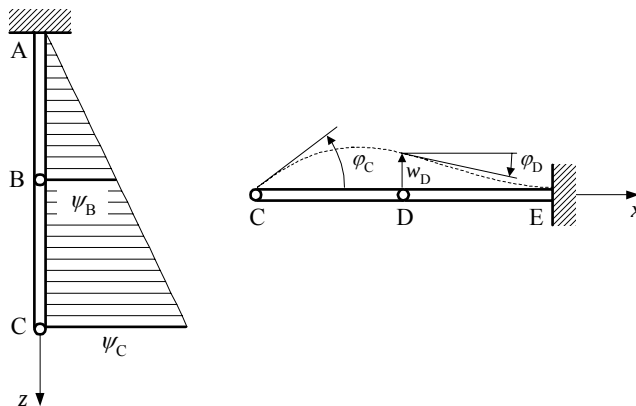
te se dobiva

$$\begin{aligned} \frac{GI_t}{a}(1+1)\psi_B - \frac{GI_t}{a}\varphi_C &= 0 \\ -\frac{GI_t}{a}\psi_B + \left(\frac{GI_t}{a} + \frac{2EI}{a^3}2a^2\right)\varphi_C - \frac{2EI}{a^3}3aw_D + \frac{2EI}{a^3}a^2\varphi_D &= -M_{t_0} \\ -\frac{2EI}{a^3}3a\varphi_C + \frac{2EI}{a^3}(6+6)w_D + \frac{2EI}{a^3}(-3a+3a)\varphi_D &= 0 \\ \frac{2EI}{a^3}a^2\varphi_C + \frac{2EI}{a^3}(-3a+3a)w_D + \frac{2EI}{a^3}(2a^2+2a^2)\varphi_D &= 0 \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava glasi

$$\begin{aligned} \psi_B &= -0,04077 \text{ rad} \\ \psi_C = \varphi_C &= -0,08155 \text{ rad} \\ w_D &= -0,01546 \text{ m} \\ \varphi_D &= 0,015 \text{ rad} \end{aligned}$$

Raspodjela deformacija prikazana je na slici 3.21.



Slika 3.21. Primjer 3.7

Iz nereduciranog sustava jednadžbi neposredno se određuju reakcije

$$M_A = k_{12}\psi_B$$

$$Q_E = k_{75}w_D + k_{76}\varphi_D$$

$$-M_E = k_{85}w_D + k_{86}\varphi_D$$

gdje je

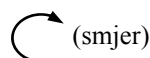
$$\begin{aligned} k_{12} &= k_{12}^1 = -\frac{GI_t}{a} & k_{75} &= k_{31}^4 = \frac{2EI}{a^3}(-6) & k_{76} &= k_{32}^4 = \frac{2EI}{a^3}(-3a) \\ k_{85} &= k_{12}^1 = -\frac{GI_t}{a^3}3a & k_{86} &= k_{42}^4 = \frac{2EI}{a^3}a^2 \end{aligned}$$

Proizlazi

$$M_A = 1,01 \text{ kNm}$$

$$Q_E = 0$$

$$M_E = -0,99 \text{ kNm}$$



(smjer)

Naprezanja u osloncima

$$\tau_A = \frac{M_A}{W_t} = \frac{16M_A}{d^3\pi} = 41 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_E = \frac{M_E}{W} = \frac{32M_E}{d^3\pi} = 82 \text{ N/mm}^2$$

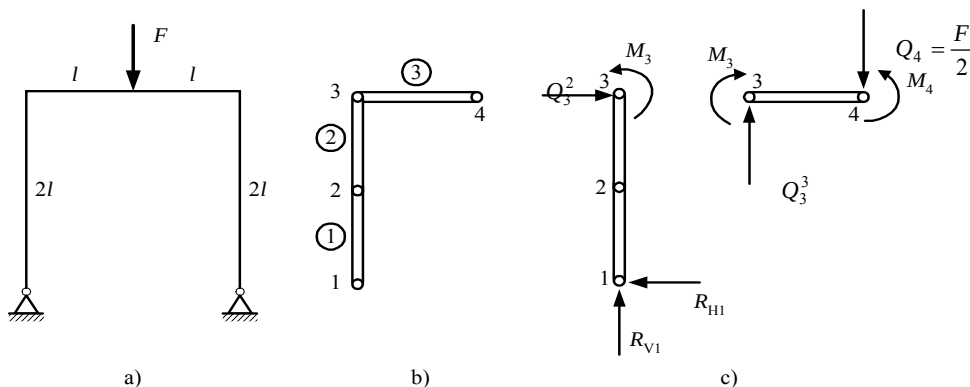
PRIMJER 3.8.

Za okviri nosač opterećen silom F prema slici 3.22.a odrediti

- elastičnu liniju
- reakcije u osloncima
- dijagrame uzdužnih i poprečnih sila te momenata savijanja

Svi dijelovi nosača imaju beskonačno veliku osnu krutost. Zbog simetrije razmatrati samo jednu polovicu nosača. Problem riješiti metodom konačnih elemenata s modelom prema slici 3.22.b.

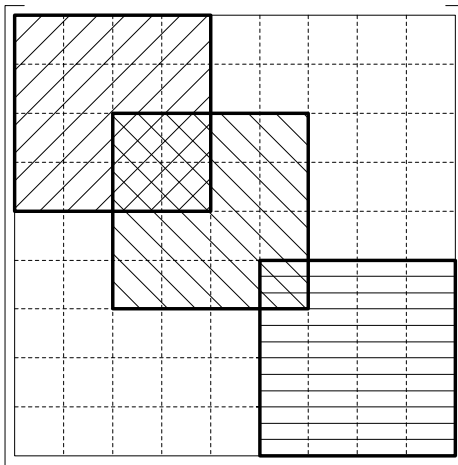
Zadano: $l = 1 \text{ m}$, $F = 5 \text{ kN}$, $EI = 180,81 \text{ kNm}^2$, $\nu = 0,3$



slika 3.22 Primjer 3.8

Model na slici 3.22.b sastoji se od tri gredna elementa s tim da je lokalna os x iz definicije grednog elementa, slika 3.11, različita za vertikalne elemente 1 i 2 u odnosu na horizontalni element 3. Radi pravilnog postavljanja matrične jednadžbe modela prikladno je prikazati sve pretpostavljene sile i momente za oba dijela nosača, slika 3.22.c.

Matrična jednadžba modela $[K]\{\Delta\} = \{F\}$ u razvijenom obliku glasi



$$\begin{Bmatrix} w_1 = 0 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3^2 = 0 \\ \varphi_3 \\ w_3^3 = 0 \\ w_4 \\ \varphi_4 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R_{H1} \\ M_1 = 0 \\ Q_2 = 0 \\ M_2 = 0 \\ Q_3^2 \\ M_3 = 0 \\ -Q_3^3 \\ Q_4 = F/2 \\ -M_4 \end{Bmatrix}$$

 element 1
  element 2
  element 3

U vektoru čvornih pomaka $\{\Delta\}$ imamo

$$\begin{aligned} w_1 &= 0 && \text{zglobni oslonac} \\ w_3^2 &= 0 && \text{beskonačno velika osna krutost horizontalnog dijela} \\ w_3^3 &= 0 && \text{beskonačno velika osna krutost vertikalnog dijela} \\ \varphi_4 &= 0 && \text{uvjet simetrije} \end{aligned}$$

U vektoru čvornih sila $\{F\}$ imamo

$$\begin{aligned} M_1 &= 0 && \text{zglobni oslonac} \\ Q_2 = M_2 = M_3 &= 0 && \text{ravnoteža sila i momenata u spojnim čvorovima} \end{aligned}$$

Zbog zamjene u redoslijedu pomaka w_3^3 i φ_3 treba u matrici krutosti elementa 3 zamijeniti 1. i 2. redak i stupac.

Reducirani sustav jednadžbi glasi

$$\begin{aligned} k_{22}\varphi_1 + k_{23}w_2 + k_{24}\varphi_2 &= 0 \\ k_{32}\varphi_1 + k_{33}w_2 + k_{34}\varphi_2 + k_{36}\varphi_3 &= 0 \\ k_{42}\varphi_1 + k_{43}w_2 + k_{44}\varphi_2 + k_{46}\varphi_3 &= 0 \\ k_{63}w_2 + k_{64}\varphi_2 + k_{66}\varphi_3 + k_{68}w_4 &= 0 \\ k_{86}\varphi_3 + k_{88}w_4 &= 0 \end{aligned}$$

Koeficijenti uz nepoznanice glase

$$\begin{aligned}
 k_{22} = k_{22}^1 &= \frac{4EI}{L} & k_{23} = k_{23}^1 &= -\frac{6EI}{L^2} & k_{24} = k_{24}^1 &= \frac{2EI}{L} \\
 k_{32} = k_{23} & & k_{33} = k_{33}^1 + k_{11}^2 &= \frac{24EI}{L^3} & k_{34} = k_{34}^1 + k_{12}^2 &= 0 & k_{36} = k_{14}^2 &= \frac{6EI}{L^2} \\
 k_{42} = k_{24} & & k_{43} = k_{34} & & k_{44} = k_{44}^1 + k_{22}^2 &= \frac{8EI}{L} & k_{46} = k_{24}^2 &= \frac{2EI}{L} \\
 k_{63} = k_{36} & & k_{64} = k_{46} & & k_{66} = k_{44}^2 + k_{22}^3 &= \frac{8EI}{L} & k_{68} = k_{23}^2 &= -\frac{6EI}{L^2} \\
 k_{86} = k_{68} & & k_{88} = k_{33}^3 &= \frac{12EI}{L^3} & & & &
 \end{aligned}$$

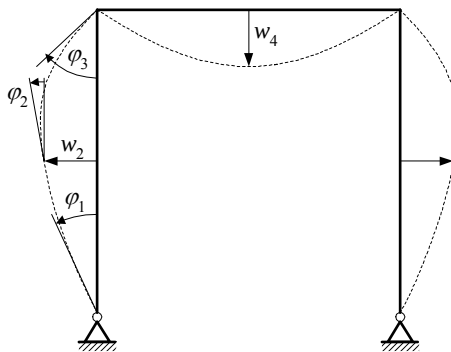
Uvrštavanjem ovih izraza u gornji sustav jednažbi slijedi

$$\begin{aligned}
 2L\varphi_1 - 3w_2 + L\varphi_2 &= 0 \\
 -L\varphi_1 + 4w_2 + L\varphi_3 &= 0 \\
 \varphi_1 + 4\varphi_2 + &= 0 \\
 3w_2 + L\varphi_2 + 4L\varphi_3 - 3w_4 &= 0 \\
 -L\varphi_3 + 2w_4 &= FL^3/12EI
 \end{aligned}$$

Rješenje sustava glasi

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= -0,138 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \\
 w_2 &= -0,104 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\
 \varphi_2 &= -0,035 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \\
 \varphi_3 &= 0,277 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \\
 w_4 &= 0,243 \cdot 10^{-2} \text{ m}
 \end{aligned}$$

Elastična linija okvirnog nosača prikazana je na slici 3.23.



Slika 3.23. Primjer 3.8.

Povratkom u nereduciranu matricnu jednadžbu modela mogu se neposredno odrediti nepoznate sile i momenti. Slijedi

$$\begin{aligned} k_{12}\varphi_1 + k_{13}w_2 + k_{14}\varphi_2 &= -R_{H_1} \\ k_{53}w_2 + k_{54}\varphi_2 + k_{56}\varphi_3 &= Q_3^2 \\ k_{76}\varphi_3 + k_{78}w_4 &= -Q_3^3 \\ k_{96}\varphi_3 + k_{98}w_4 &= -M_4 \end{aligned}$$

gdje je

$$\begin{aligned} k_{12} = k_{12}^1 &= \frac{6EI}{L^2} & k_{13} = k_{13}^1 &= -\frac{12EI}{L^3} & k_{14} = k_{14}^1 &= \frac{6EI}{L^2} \\ k_{53} = k_{31}^2 &= -\frac{12EI}{L^3} & k_{54} = k_{32}^2 &= -\frac{6EI}{L^2} & k_{56} = k_{34}^2 &= -\frac{6EI}{L^2} \\ k_{76} = k_{12}^3 &= \frac{6EI}{L^2} & k_{78} = k_{13}^3 &= -\frac{12EI}{L^3} \\ k_{96} = k_{42}^3 &= \frac{2EI}{L} & k_{98} = k_{43}^3 &= -\frac{6EI}{L^2} \end{aligned}$$

Sile i momenti glase

$$R_{H_1} = -0,375 \text{ kN} \quad \longrightarrow \quad (\text{smjer})$$

$$Q_3^2 = -0,375 \text{ kN} \quad \longleftarrow \quad (\text{smjer})$$

$$Q_3^3 = 2,5 \text{ kN}$$

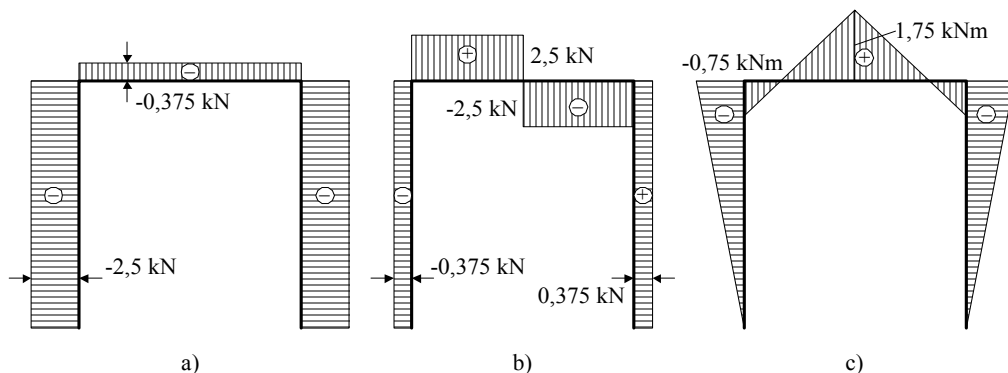
$$M_4 = 1,75 \text{ kNm}$$

Vertikalna reakcija u osloncu

$$R_{V_1} = Q_3^3 = 2,5 \text{ kN}$$

zadovoljava uvjete statičke ravnoteže $R_{V_1} = \frac{F}{2}$

Dijagrami raspodjele uzdužnih i poprečnih sila te momenata savijanja u nosaču prikazani su na slici 3.24.

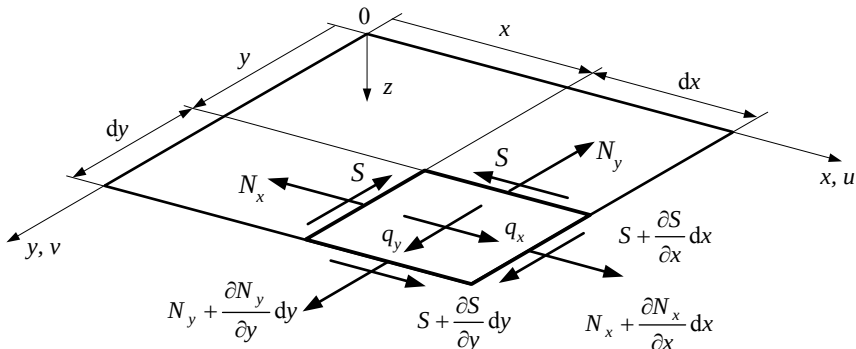


Slika 3.24. Primjer 3.8.

4. RASTEZANJE PRAVOKUTNE PLOČE

4.1. Diferencijalna jednačba rastezanja pravokutne ploče

Na slici 4.1. prikazan je diferencijalni element pravokutne ploče opterećene na rastezanje /6/ sa svojim osnovnim značajkama: u, v - pomaci u ravnini ploče, q_x, q_y - vanjsko opterećenje u ravnini ploče, N_x, N_y - normalne membranske sile po jedinici duljine, S - smična membranska sila po jedinici duljine.



Slika 4.1 Diferencijalni element pravokutne ploče opterećene na rastezanje

Postavljanjem uvjeta ravnoteže za element na slici 4.1. dobivamo jednačbe ravnoteže

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = -q_x \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} = -q_y \quad (a)$$

Iz bilanse pomaka elementa u smjeru x (u) i y (v) slijede jednačbe deformacije

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (b)$$

Veza između deformacija izražena je preko jednačbe kompatibilnosti deformacija

$$2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \quad (c)$$

Hookeov zakon za dvoosno stanje naprezanja daje slijedeće jednačbe

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{Eh} (N_y - \nu N_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} S \quad (d)$$

Ako se izrazi (d) uvrste u (c) i uvede Airy-eva potencijalna funkcija naprezanja θ ,

$$N_x = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \int q_x dx, \quad N_y = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \int q_y dy, \quad S = -\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \quad (e)$$

tada se dobiva diferencijalna jednačba rastezanja pravokutne ploče

$$\frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} = f \quad (4.1)$$

gdje je

$$f = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\int q_x dx \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int q_y dy \right) - \nu \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right)$$

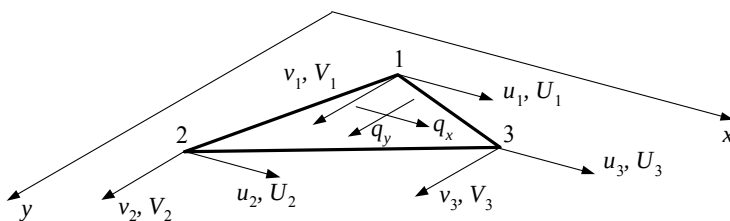
Membranske sile mogu se izraziti u ovisnosti o Airy-evoj funkciji θ

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \int q_x dx \\ N_y &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \int q_y dy \\ S &= - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (4.2)$$

4.2. Numeričko rješenje primjenom metode konačnih elemenata

Pravokutna ploča se modelira sustavom membranskih konačnih elemenata /4/ (trokutasti, pravokutni), te se problem svodi na određivanje membranskih pomaka i sila u spojnim točkama elemenata, tj. u čvorovima. Ovdje je, jednostavnosti radi, prikazano modeliranje samo s trokutastim elementima, ali je tehnika modeliranja s pravokutnim elementima identična.

Trokutasti membranski element prikazan je sa svojim značajkama na slici 4.2.



Slika 4.2. Trokutasti membranski element

Element ima tri čvora, u svakom čvoru su dva stupnja slobode $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$, te dvije membranske sile $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$. Matrična jednačba ima svoj standardni oblik

$$[\mathbf{k}] \cdot \{\delta\} = \{\mathbf{f}\} - \{\mathbf{f}\}_p \quad (4.3)$$

gdje je

$$[\mathbf{k}] = [\mathbf{k}]_1 + [\mathbf{k}]_2 \quad \text{matrica krutosti}$$

matrica krutosti na rastezanje:

$$[k]_1 = D_1 \cdot \begin{bmatrix} y_{23}^2 & \nu x_{32} y_{23} & y_{23} y_{31} & \nu x_{13} y_{23} & y_{12} y_{23} & \nu x_{21} y_{23} \\ & x_{32}^2 & \nu x_{32} y_{31} & x_{32} x_{13} & \nu x_{32} y_{12} & x_{32} x_{21} \\ & & y_{31}^2 & \nu x_{13} y_{31} & y_{12} y_{31} & \nu x_{21} y_{31} \\ & & & x_{13}^2 & \nu x_{13} y_{12} & x_{13} x_{21} \\ \text{simet.} & & & & y_{12}^2 & \nu x_{21} y_{12} \\ & & & & & x_{21}^2 \end{bmatrix}$$

matrica krutosti na smik:

$$[k]_2 = D_2 \cdot \begin{bmatrix} x_{32}^2 & x_{32} y_{23} & x_{32} x_{13} & x_{32} y_{31} & x_{32} y_{21} & x_{32} y_{12} \\ & y_{23}^2 & x_{13} y_{23} & y_{23} y_{31} & x_{21} y_{23} & y_{12} y_{23} \\ & & x_{13}^2 & x_{13} y_{31} & x_{13} x_{21} & x_{13} y_{12} \\ & & & y_{31}^2 & x_{21} y_{31} & y_{12} y_{31} \\ \text{simet.} & & & & x_{21}^2 & x_{21} y_{12} \\ & & & & & y_{12}^2 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \frac{Eh}{4(1-\nu^2)A} \quad A - \text{površina elementa, } x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j$$

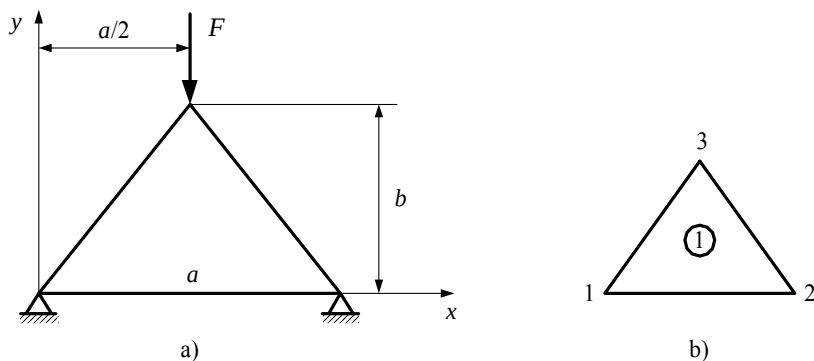
$$D_2 = \frac{Eh}{8(1+\nu)A}$$

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad \text{vektor čvornih pomaka,} \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad \text{vektor čvornih sila}$$

$$\{f\}_p = -\frac{A}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} \quad \text{vektor čvornih sila vanjskog opterećenja}$$

PRIMJER 4.1.

Trokutasta ploča zadana i opterećena silom F prema slici 4.3.a. Odrediti pomak hvatišta sile i reakcije u osloncima. Ploču obuhvatiti s jednim konačnim elementom prema slici 4.3.b.



Slika 4.3 Primjer 4.1

Uzevši u obzir sve rubne uvjete, matrična jednadžba sustava (čitaj: elementa) u razvijenom obliku glasi

$$\begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 = 0 \\ V_3 = -F \end{Bmatrix}$$

Obzirom da su samo pomaci u_3 i v_3 različiti od nule, reducirani sustav jednadžbi glasi

$$\begin{aligned} k_{55} u_3 + k_{56} v_3 &= 0 \\ k_{65} u_3 + k_{66} v_3 &= -F \end{aligned}$$

Kod određivanja koeficijenata uz nepoznanice valja uzeti u obzir obje matrice krutosti (na rastezanje i na smik):

$$\begin{aligned} (k_{55})_1 &= D_1(y_2 - y_1) = 0 & (k_{55})_2 &= D_2(x_2 - x_1)^2 = D_2 a^2 \\ (k_{56})_1 &= D_1 v(x_2 - x_1)(y_1 - y_2) = 0 & (k_{56})_2 &= D_2(x_2 - x_1)(y_1 - y_2) = 0 \\ (k_{65})_1 &= (k_{56})_1 = 0 & (k_{65})_2 &= (k_{56})_2 = 0 \\ (k_{66})_1 &= D_1(x_2 - x_1)^2 = D_1 a^2 & (k_{66})_2 &= D_2(y_1 - y_2) = 0 \end{aligned}$$

Prema tome, reducirani sustav jednadžbi sada glasi

$$D_2 a^2 u_3 = 0$$

$$D_1 a^2 v_3 = -F$$

Odatle proizlazi

$$u_3 = 0$$

$$v_3 = -\frac{4A(1-\nu^2)}{Eha^2} F$$

Reakcije u osloncima se određuju neposredno iz nereduciranog sustava

$$U_1 = k_{16} v_3$$

$$V_1 = k_{26} v_3$$

$$U_2 = k_{36} v_3$$

$$V_2 = k_{46} v_3$$

gdje je

$$(k_{16})_1 = D_1 \nu (x_2 - x_1)(y_2 - y_3) = -D_1 \nu ab$$

$$(k_{16})_2 = D_2 (x_3 - x_2)(y_1 - y_2) = 0$$

$$(k_{26})_1 = D_1 (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) = -D_1 \frac{a^2}{2}$$

$$(k_{26})_2 = D_2 (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) = 0$$

$$(k_{36})_1 = D_1 \nu (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) = D_1 \nu ab$$

$$(k_{36})_2 = D_2 (x_1 - x_3)(y_1 - y_2) = 0$$

$$(k_{46})_1 = D_1 (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) = -D_1 \frac{a^2}{2}$$

$$(k_{46})_2 = D_2 (y_1 - y_2)(y_3 - y_1) = 0$$

te proizlazi

$$U_1 = \nu \frac{a}{b} F$$

$$V_1 = \frac{1}{2} F$$

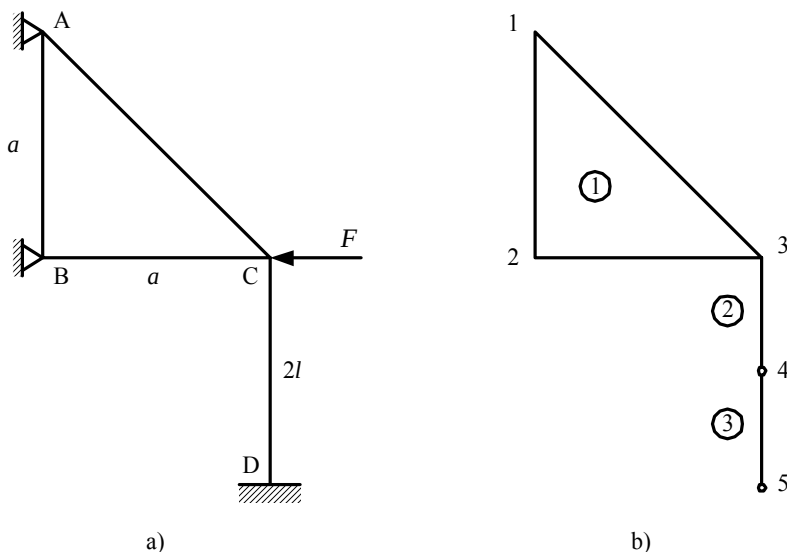
$$U_2 = -\nu \frac{a}{b} F \quad \longleftarrow \quad (\text{smjer})$$

$$V_2 = \frac{1}{2} F$$

PRIMJER 4.2.

Sustav se sastoji od trokutaste ploče ABC i grede CD i opterećen je silom F prema slici 4.4.a. Odrediti pomak hvatišta sile i reakcije u osloncima A, B i D. Problem riješiti uz pomoć modela koji se sastoji od jednog trokutastog membranskog i dva gredna elementa i prikazan je na slici 4.4.b. Greda CD ima beskonačno veliku osnu krutost, a spojnu točku C pretpostaviti u obliku zgloba.

Zadano: $a = 1 \text{ m}$, $h = 0,02 \text{ m}$, $l = 0,5 \text{ m}$, $F = 2 \text{ kN}$, $EI = 359,1 \text{ kNm}^2$, $\nu = 0,3$

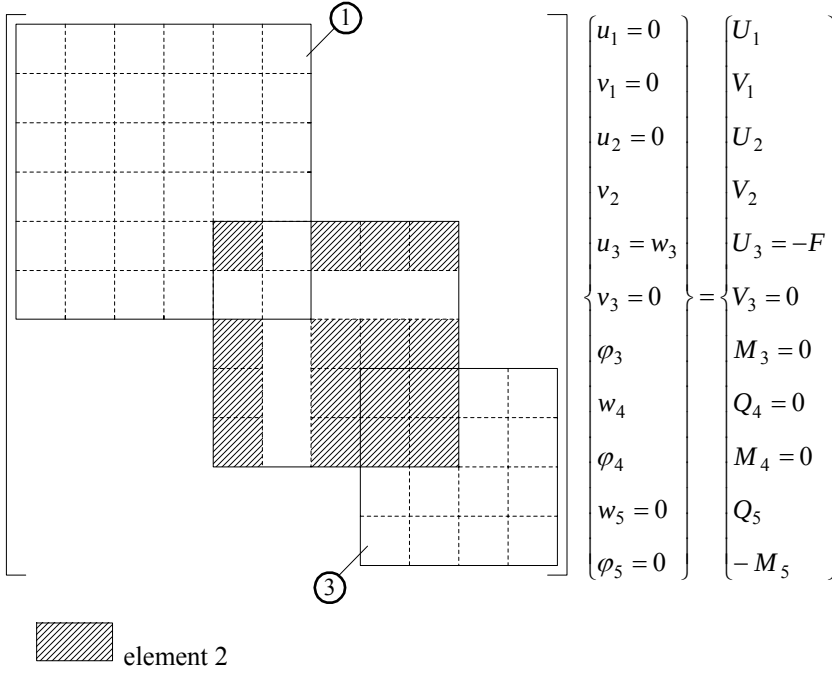


Slika 4.4. Primjer 4.2

Uzevši u obzir sve rubne uvjete, te beskonačno veliku osnu krutost grede CD ($v_3 = 0$), matrična jednačba sustava glasi

$$[K] \cdot \{\Delta\} = \{F\}$$

odnosno, uzevši u obzir sve rubne uvjete, u razvijenom obliku



Obzirom da su pomaci u_3 , φ_3 , w_4 i φ_4 različiti od nule, reducirani sustav jednažbi glasi:

$$\begin{aligned}
 k_{55}u_3 + k_{57}\varphi_3 + k_{58}w_4 + k_{59}\varphi_4 &= -F \\
 k_{75}u_3 + k_{77}\varphi_3 + k_{78}w_4 + k_{79}\varphi_4 &= 0 \\
 k_{85}u_3 + k_{87}\varphi_3 + k_{88}w_4 + k_{89}\varphi_4 &= 0 \\
 k_{95}u_3 + k_{97}\varphi_3 + k_{98}w_4 + k_{99}\varphi_4 &= 0
 \end{aligned}$$

gdje je

$$k_{55} = k_{55}^1 + k_{11}^2 = D_1 a^2 + 2 \frac{EI}{l^3} 6$$

$$k_{57} = k_{12}^2 = 2 \frac{EI}{l^3} 2l$$

$$k_{58} = k_{13}^2 = 2 \frac{EI}{l^3} (-6)$$

$$k_{59} = k_{14}^2 = 2 \frac{EI}{l^3} 3l$$

$$k_{75} = k_{57}$$

$$k_{77} = k_{22}^2 = 2 \frac{EI}{l^3} 2l^2$$

$$k_{78} = k_{23}^2 = 2 \frac{EI}{l^3} (-3l)$$

$$k_{79} = k_{24}^2 = 2 \frac{EI}{l^3} l^2$$

$$k_{85} = k_{58}$$

$$k_{87} = k_{78}$$

$$k_{88} = k_{33}^2 + k_{11}^3 = 2 \frac{EI}{l^3} 6 + 2 \frac{EI}{l^3} 6$$

$$k_{89} = k_{34}^2 + k_{12}^3 = 2 \frac{EI}{l^3} (-3l) + 2 \frac{EI}{l^3} (3l)$$

$$k_{95} = k_{59}$$

$$k_{97} = k_{79}$$

$$k_{98} = k_{89}$$

$$k_{99} = k_{44}^2 + k_{22}^3 = 2 \frac{EI}{l^3} 2l^2 + 2 \frac{EI}{l^3} 2l^2$$

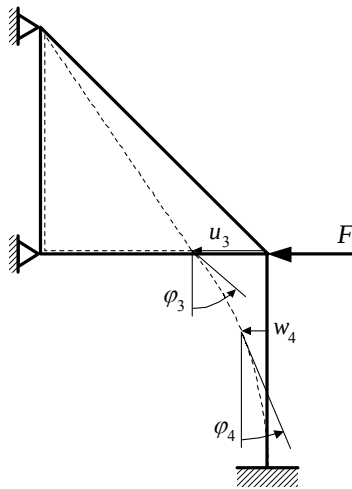
Nakon što se uvedu numeričke vrijednosti u gornje izraze, dobiva se

$$\begin{aligned}(2307692,308 + 34473,6)u_3 + 8618,4\varphi_3 - 34473,6w_4 + 8618,4\varphi_4 &= -F \\ 8618,4u_3 + 2872,8\varphi_3 - 8618,4w_4 + 1436,4\varphi_4 &= 0 \\ -34473,6u_3 - 8618,4\varphi_3 + 68947,2w_4 &= 0 \\ 8618,4u_3 + 1436,4\varphi_3 &+ 5475,6\varphi_4 = 0\end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava glasi:

$$\begin{aligned}u_3 &= -0,00087 \text{ mm} & w_4 &= -0,000271 \text{ mm} \\ \varphi_3 &= 0,0000013 \text{ rad} & \varphi_4 &= 0,000000975 \text{ rad}\end{aligned}$$

Konstrukcija u deformiranom obliku prikazana je na slici 4.5



Slika 4.5. Primjer 4.2

Povratkom u nereducirani sustav jednadžbi određuju se nepoznate reakcije u osloncima

$$\begin{aligned}k_{15}u_3 &= U_1 & k_{35}u_3 &= U_2 & k_{10,8}w_4 + k_{10,9}\varphi_4 &= Q_5 \\ k_{25}u_3 &= V_1 & k_{45}u_3 &= V_2 & k_{11,8}w_4 + k_{11,9}\varphi_4 &= -M_5\end{aligned}$$

gdje je

$$\begin{aligned}k_{15} &= k_{15}^1 = 0 & k_{10,8} &= k_{31}^3 = 2 \frac{EI}{l^3} (-6) \\ k_{25} &= k_{25}^1 = D_1 a^2 & k_{10,9} &= k_{32}^3 = 2 \frac{EI}{l^3} (-3l) \\ k_{35} &= k_{35}^1 = -D_1 a^2 & k_{11,8} &= k_{41}^3 = 2 \frac{EI}{l^3} 3l \\ k_{45} &= k_{45}^1 = -D_1 a^2 & k_{11,9} &= k_{42}^3 = 2 \frac{EI}{l^3} l^2\end{aligned}$$

Kada se uvrste brožčani podaci proizlazi

$$U_1 = 0$$

$$V_1 = -0,6 \text{ kN} \quad \downarrow \quad (\text{smjer})$$

$$U_2 = 2 \text{ kN}$$

$$V_2 = 0,6 \text{ kN}$$

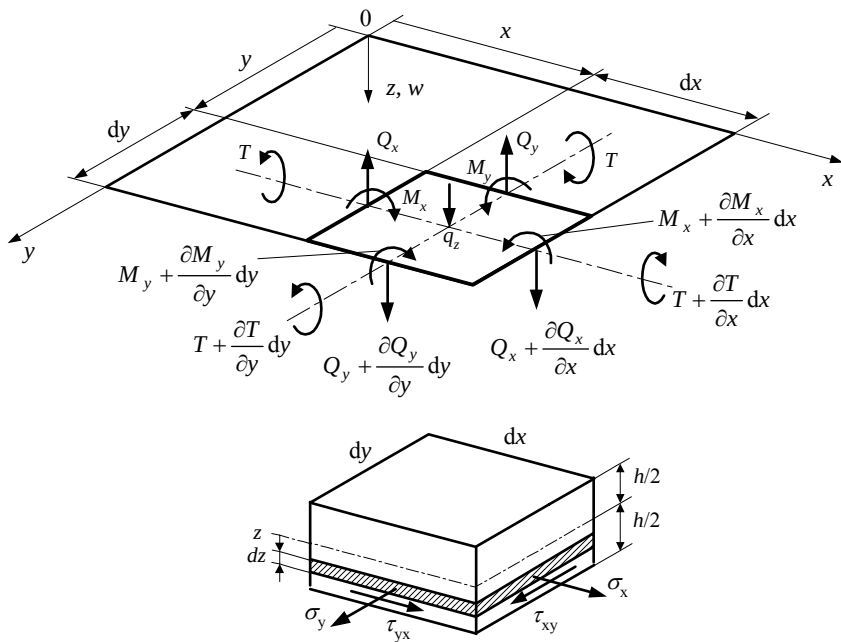
$$Q_5 = 0,00093 \text{ kN}$$

$$M_5 = -0,00093 \text{ kNm} \quad \curvearrowright \quad (\text{smjer})$$

5. SAVIJANJE PRAVOKUTNE PLOČE

5.1. Diferencijalna jednačba savijanja pravokutne ploče

Na slici 5.1 prikazan je diferencijalni element pravokutne ploče opterećene na savijanje /6/ sa svojim osnovnim značajkama: w -progib, M -moment savijanja, Q -poprečna sila, T -moment uvijanja, q_z -vanjsko opterećenje. Veličine M , Q i T izražene su po jedinici duljine, a na slici 5.1. prikazane su s pozitivnim predznakom.



Slika 5.1. Diferencijalni element pravokutne ploče opterećene na savijanje

Postavljanjem uvjeta ravnoteže sila i momenata za element ploče na slici 5.1. slijedi jednačba ravnoteže

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q_z \quad (a)$$

Veza između progiba ploče w i deformacija u smjeru x i y glasi

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (b)$$

Unutarnji momenti M_x , M_y i T mogu se izraziti preko naprezanja u presjeku ploče

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz, \quad T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \quad (c)$$

Ako se primijene izrazi Hookeovog zakona za dvoosno stanje naprezanja

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (d)$$

i međusobno povežu gornje jednadžbe, dobiva se diferencijalna jednadžba savijanja pravokutne ploče

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_z}{D} \quad (5.1)$$

gdje je

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{krutost ploče na savijanje}$$

$$w(x, y) \quad \text{funkcija progiba ploče}$$

Unutarnje sile i momenti mogu se izraziti u ovisnosti o progibnoj funkciji

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (5.2)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

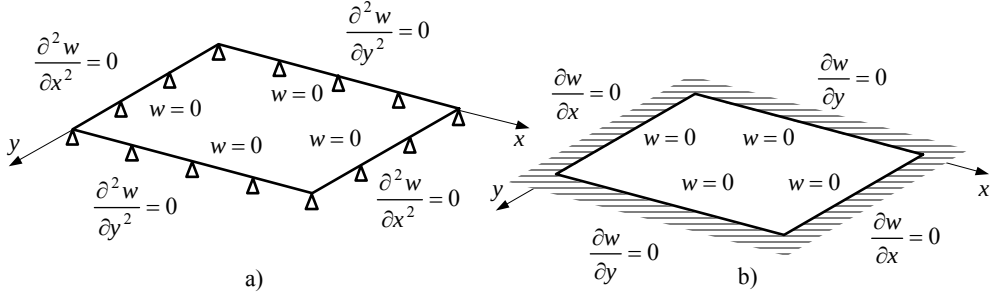
$$T = -(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (5.3)$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \quad (5.4)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x}$$

5.2 Rubni uvjeti

Rubni uvjeti su od bitnog značenja kod određivanja rješenja diferencijalne jednačbe (5.1). Ovdje su razmatrani rubni uvjeti za dva tipična načina oslanjanja ploče, tj. za zgloбно oslonjenu i za upetu ploču.



Slika 5.2. Rubni uvjeti ploče

Na **zgljono oslonjenim** rubovima progib i odgovarajući moment savijanja jednaki su nuli. To znači slijedeće:

Rubovi $x=0$, $x=a$

$$w=0, M_x=0,$$

što prema izrazu (5.2) daje $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$

Obzirom da je na tim rubovima zakrivljenost ploče $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ to je i promjena te

zakrivljenosti $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ automatski zadovoljena. Prema tome, uvjet momenta

$M_x = 0$ svodi se na razmatranim rubovima na uvjet $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$

Rubovi $y=0$, $y=b$

$$w=0, M_y=0,$$

što prema izrazu (5.2) daje $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$

Ovdje je, zbog analognih razloga kao i za ostala dva ruba, promjena zakrivljenosti $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$

automatski zadovoljena, te se uvjet momenta $M_x = 0$ svodi na uvjet $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$

Ovi uvjeti prikazani su na slici 5.2.a.

Na **upetim** rubovima progib i nagib ploče jednaki su nuli. To znači slijedeće:

Rubovi $x = 0$, $x = a$

$$w = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Rubovi $y = 0$, $y = b$

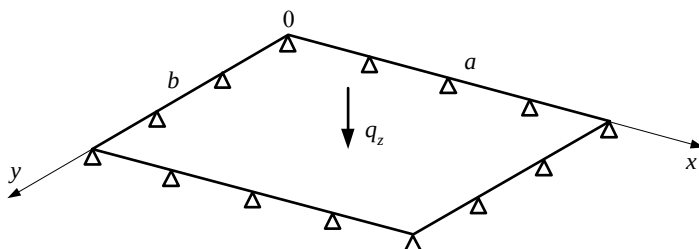
$$w = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Ovi uvjeti prikazani su na slici 5.2.b.

5.3. Analitičko rješenje primjenom dvostrukog trigonometrijskog reda (Navier-ova metoda)

Rješenje na osnovi Navier-ove metode [5] razvijeno je za **pravokutnu zglobno oslonjenu ploču** prema slici 5.3., opterećenu vanjskim opterećenjem $q_z = f(x, y)$.



Slika 5.3 Zglobno oslonjena ploča za rješenje Navier

Funkcija progiba $w(x, y)$ pretpostavlja se u obliku dvostrukog reda funkcija

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.5)$$

gdje svaki član za sebe zadovoljava rubne uvjete na slici 5.2.a.

Vanjsko opterećenje $q_z(x, y)$ se takođe razvija u dvostruki red sinus funkcija

$$q_z(x, y) = \sum_m \sum_n q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.6)$$

Koeficijenti razvoja reda q_{mn} određuju se na poznati način /5/

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (5.7)$$

Izrazi (5.5) i (5.6) uvode se u diferencijalnu jednadžbu (5.1) te se dobiva algebarska jednadžba u obliku

$$\sum_m \sum_n w_{mn} \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \sum_m \sum_n \frac{q_{mn}}{D} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Izjednačavanjem odgovarajućih članova reda (isti m i n) na lijevoj i desnoj strani ove jednadžbe slijedi

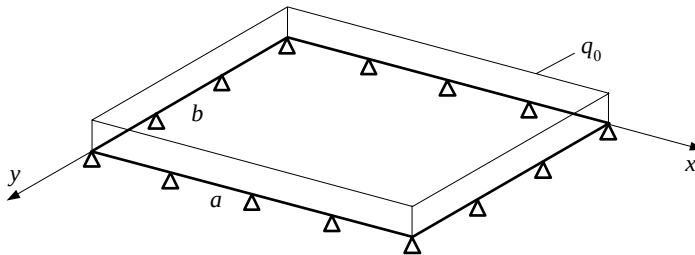
$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{D \pi^4 \left(\frac{m^2}{\pi^2} + \frac{n^2}{\pi^2} \right)^2} \quad (5.8)$$

Rješenje na osnovi Navier-ove metode s ishodištem u uglu ploče, slika 5.3, pogodno je za sve oblike opterećenja, samo valja voditi računa da funkcije progiba i opterećenja budu kompatibilne, u protivnom se može desiti da integral (5.7) poprimi vrijednost nula.

U slučaju jednolikog ili simetričnog opterećenja q_z može se rješenje Navier upotrijebiti i kada je ishodište koordinatnog sustava postavljeno u sredini ploče. U tom slučaju treba u izrazima (5.5), (5.6) i (5.7) funkcije **sinus** zamijeniti s funkcijama **cosinus**, a u integralu (5.7) treba postaviti granice integriranja od $-a/2$ do $a/2$ i od $-b/2$ do $b/2$.

PRIMJER 5.1

Pravokutna ploča dimenzija $a \times b$ i debljine h , zgloбно oslonjena na krajevima, opterećena je jednolikim opterećenjem q_0 prema slici 5.4. Odrediti funkciju progiba $w(x, y)$ i progib u sredini.



Slika 5.4 Primjer 5.1

Zbog **jednolikog** opterećenja funkcija progiba $w(x,y)$ se pretpostavlja redom **simetričnih** sinus funkcija u smjeru x i y . S tri člana reda funkcija glasi

$$w(x,y) = w_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + w_{31} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + w_{33} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}$$

a progib u sredini

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = w_{11} + w_{31} + w_{33}$$

Nepoznati koeficijenti progiba w_{11} , w_{31} i w_{33} određuju se primjenom izraza (5.8)

$$w_{11} = \frac{q_{11}}{D\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \quad w_{31} = \frac{q_{31}}{D\pi^4 \left(\frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \quad w_{33} = \frac{q_{33}}{D\pi^4 \left(\frac{9}{a^2} + \frac{9}{b^2}\right)^2}$$

Nepoznati koeficijenti opterećenja q_{11} , q_{31} i q_{33} određuju se primjenom izraza (5.7)

$$\begin{aligned} q_{11} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{16}{\pi^2} q_0 \\ q_{31} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_0 \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{16}{3\pi^2} q_0 \\ q_{33} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_0 \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} dx dy = \frac{16}{9\pi^2} q_0 \end{aligned}$$

Uvođenjem ovih vrijednosti u izraze za koeficijente progiba proizlazi

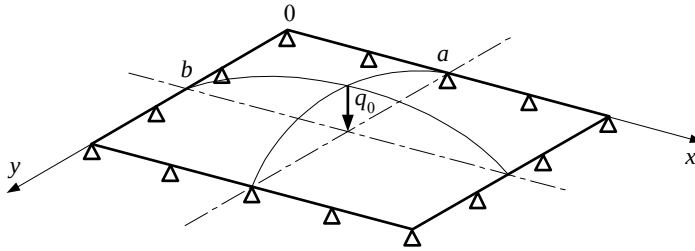
$$w_{11} = \frac{16q_0}{D\pi^6} \frac{a^4 b^4}{(a^2 + b^2)^2} \quad w_{31} = \frac{16q_0}{D\pi^6} \frac{a^4 b^4}{3(a^2 + 9b^2)^2} \quad w_{33} = \frac{16q_0}{D\pi^6} \frac{a^4 b^4}{9(9a^2 + 9b^2)^2}$$

te je progib u sredini ploče

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{16q_0 a^4 b^4}{D\pi^6} \left(\frac{1}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{1}{3(a^2 + 9b^2)^2} + \frac{1}{9(9a^2 + 9b^2)^2} \right)$$

PRIMJER 5.2

Pravokutna ploča iz Primjera 5.1 opterećena je opterećenjem $q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$ prema slici 5.5. Odrediti funkciju progiba $w(x, y)$ i progib u sredini.



Slika 5.5 Primjer 5.2

Zbog **simetričnosti** opterećenja i u ovom slučaju se funkcija progiba $w(x, y)$ pretpostavlja redom **simetričnih** sinus funkcija u smjeru x i y

$$w(x, y) = w_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + w_{31} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + w_{33} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}$$

a progib u sredini ploče

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = w_{11} + w_{31} + w_{33}$$

Problem se opet svodi na određivanje nepoznatih koeficijenata opterećenja q_{11} , q_{31} i q_{33}

$$q_{11} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_0 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} dx dy = q_0$$

$$q_{31} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} dx dy = 0$$

$$q_{33} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{3\pi y}{b} dx dy = 0$$

Proizlazi, da doprinos progibu daju samo oni članovi reda koji su potpuno kompatibilni funkciji opterećenja ($m=1, n=1$), tj.

$$w_{11} = \frac{q_0 a^4 b^4}{D \pi^4 (a^2 + b^2)^2} \quad w_{31} = w_{33} = 0$$

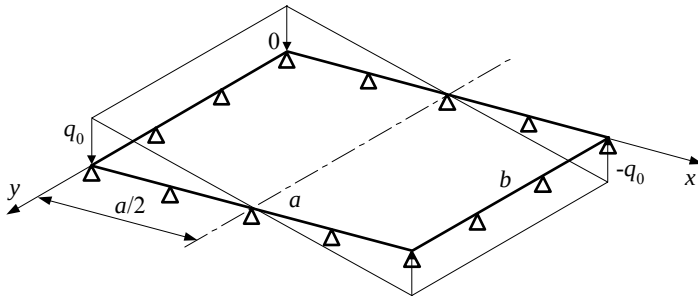
te progib u sredini ploče iznosi

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = w_{11}$$

PRIMJER 5.3.

Pravokutna ploča dimenzija $a \times b$ i debljine h opterećena je opterećenjem $q(x, y) = q_0(1 - 2x/a)$ prema slici 5.6. Odrediti funkciju progiba, te mjesto i iznos najvećeg progiba.

Zadano: $a = 4 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $h = 0,01 \text{ m}$, $q_0 = 1 \text{ kN/m}^2$, $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,3$



Slika 5.6 Primjer 5.3

Zbog **antisimetričnosti** opterećenja funkcija progiba $w(x, y)$ je pretpostavljena redom **antisimetričnih** sinus funkcija u smjeru x . S dva člana reda funkcija $w(x, y)$ glasi

$$w(x, y) = w_{21} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + w_{41} \sin \frac{4\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

Nepoznati koeficijenti progiba w_{21} i w_{41} prema (5.8) glase

$$w_{21} = \frac{q_{21}}{D\pi^4 \left(\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \quad w_{41} = \frac{q_{41}}{D\pi^4 \left(\frac{16}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}$$

Nepoznati koeficijenti opterećenja q_{21} i q_{41} određuju se prema (5.7), tj.

$$q_{21} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_0 \left(1 - \frac{2x}{a} \right) \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{8q_0}{\pi^2}$$

$$q_{41} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_0 \left(1 - \frac{2x}{a} \right) \sin \frac{4\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{4q_0}{\pi^2}$$

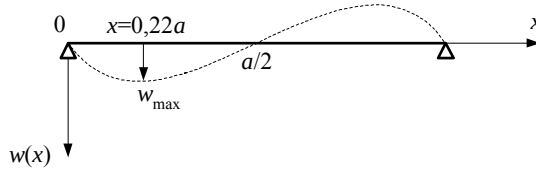
te se dobiva

$$w_{21} = \frac{4q_0 a^4 b^4 \cdot 2}{D\pi^6 (a^2 + 4b^2)^2} = 1,7 \text{ mm} \quad w_{41} = \frac{4q_0 a^4 b^4}{D\pi^6 (a^2 + 16b^2)^2} = 0,138 \text{ mm}$$

Funkcija progiba glasi

$$w(x, y) = 0,0017 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + 0,000138 \sin \frac{4\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

Raspodjela progiba duž simetrale $y = b/2$ prikazana je na slici 5.6.a, gdje je naznačen i približan položaj mjesta najvećeg progiba $w_{\max} = 1,7 \text{ mm}$

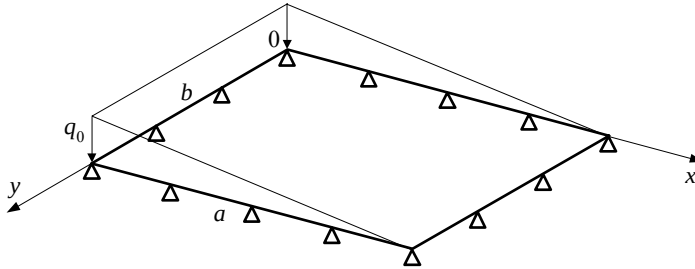


Slika 5.6.a Primjer 5.3

PRIMJER 5.4.

Pravokutna ploča dimenzija $a \times b$ i debljine h opterećena je opterećenjem $q(x, y) = q_0(1 - x/a)$ prema slici 5.7. Odrediti funkciju progiba $w(x, y)$, te mjesto i iznos najvećeg progiba.

Zadano: $a = 4 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $h = 0,01 \text{ m}$, $q_0 = 1 \text{ kN/m}^2$, $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,3$



Slika 5.7 Primjer 5.4

Zbog **nesimetričnosti** opterećenja funkcija progiba $w(x, y)$ je pretpostavljena redom **simetričnih i antisimetričnih** sinus funkcija u smjeru osi x . Uzeta su tri člana reda, te funkcija $w(x, y)$ glasi:

$$w(x, y) = w_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + w_{21} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + w_{31} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

Nepoznati koeficijenti progiba w_{11} , w_{21} i w_{31} prema (5.8) iznose

$$w_{11} = \frac{q_{11}}{D\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \quad w_{21} = \frac{q_{21}}{D\pi^4 \left(\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \quad w_{31} = \frac{q_{31}}{D\pi^4 \left(\frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}$$

Nepoznati koeficijenti opterećenja q_{11} , q_{21} i q_{31} određeni su prema (5.7)

$$q_{11} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{8q_0}{\pi^2}$$

$$q_{21} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right) \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{4q_0}{\pi^2}$$

$$q_{31} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right) \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{8q_0}{3\pi^2}$$

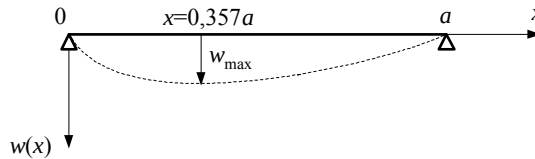
Proizlazi

$$w_{11} = \frac{8q_0}{D\pi^6} \frac{a^4 b^4}{(a^2 + b^2)^2} \quad w_{21} = \frac{4q_0}{D\pi^6} \frac{a^4 b^4}{(a^2 + 4b^2)^2} \quad w_{31} = \frac{8q_0}{D\pi^6} \frac{a^4 b^4}{3(a^2 + 9b^2)^2}$$

Najveći progib se nalazi na simetrali ploče $y = b/2$, te su približno mjesto i njegov iznos određeni uvođenjem zadanih brojčanih vrijednosti. Dobiva se

$$\begin{array}{lll} q_{11} = 0,81 \text{ kN/m}^2 & q_{21} = 0,045 \text{ kN/m}^2 & q_{31} = 0,27 \text{ kN/m}^2 \\ w_{11} = 0,0044 \text{ m} & w_{21} = 0,000865 \text{ m} & w_{31} = 0,000218 \text{ m} \end{array}$$

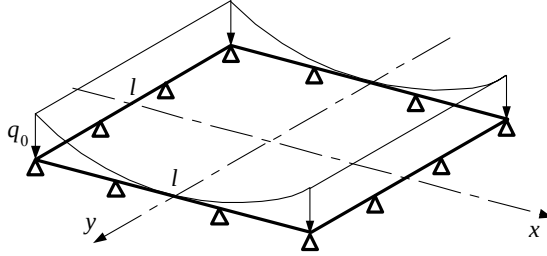
Raspodjela progiba duž simetrale $y = b/2$ prikazana je na slici 5.8 i na njoj je naznačen položaj najvećeg progiba koji iznosi $w_{\max} = 4,62 \text{ mm}$



Slika 5.8. Primjer 5.4

PRIMJER 5.5.

Kvadratna ploča duljine stranice l i debljine h slobodno je oslonjena na svojim krajevima i opterećena s $q(x, y) = q_0(1 - \cos \pi x/l)$ prema slici 5.9. Odrediti funkciju progiba $w(x, y)$ i iznos progiba u sredini ploče.



Slika 5.9 Primjer 5.5

Funkcija progiba je pretpostavljena s jednim članom reda

$$w(x, y) = w_{11} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

Progib u sredini iznosi: $w(0, 0) = w_{11}$

Nepoznati koeficijent progiba w_{11} određen je izrazom (5.8)

$$w_{11} = \frac{q_{11}}{D\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}$$

Nepoznati koeficijent opterećenja q_{11} slijedi iz izraza (5.7)

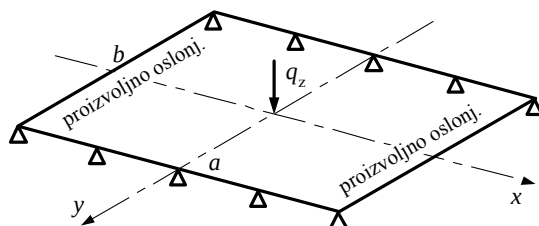
$$q_{11} = \frac{4}{ab} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} q_0 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right) \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l} dx dy = \frac{16 - 4\pi}{\pi^2} q_0$$

te proizlazi
$$w_{11} = \frac{(4 - \pi)l^4 q_0}{D\pi^6}$$

To je ujedno i progib u sredini ploče.

5.4. Analitičko rješenje primjenom jednostrukog Fourierovog reda (Levy-eva metoda)

Rješenje na osnovi Levy-eve metode [6] razvijeno je za pravokutnu ploču koja je zglobno oslonjena na krajevima $y = b/2$ i $y = -b/2$, proizvoljno učvršćena na druga dva kraja i opterećena opterećenjem $q_z = f(x)$ prema slici 5.10., dakle opterećenje se ne mijenja u smjeru osi y .



Slika 5.10. Pravokutna ploča za rješenje Levy

Funkcija progiba je pretpostavljena u obliku jednostrukog Fourierovog reda

$$w(x, y) = \sum_n w_n(x) \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (5.9)$$

Nepoznati koeficijent reda $w_n(x)$ rješenje je diferencijalne jednadžbe savijanja ploče (5.1) za smjer x

$$\frac{d^4 w_n}{dx^4} - 2\beta_n^2 \frac{d^2 w_n}{dx^2} + \beta_n^4 w_n = \frac{f(x)}{D} \quad (5.10.)$$

gdje je $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$

Ovo rješenje se sastoji od homogenog i partikularnog dijela

$$w_n = w_{nh}(x) + w_{np}(x)$$

Homogeno rješenje $w_{nh}(x)$ glasi

$$w_{nh}(x) = B_{n1} \operatorname{sh} \beta_n x + B_{n2} \operatorname{ch} \beta_n x + B_{n3} \beta_n x \operatorname{ch} \beta_n x + B_{n4} \beta_n x \operatorname{sh} \beta_n x$$

Partikularno rješenje $w_{np}(x)$ određuje se od slučaja do slučaja, ovisno o funkciji opterećenja $f(x)$ na desnoj strani jednadžbe (5.10). Ukoliko je $f(x)$ jednostavna funkcija (pravac, parabola, polinom, trigonometrijska funkcija), tada se i $w_{np}(x)$ može pretpostaviti u obliku funkcije $f(x)$.

Dakle, problem se svodi na određivanje konstanti integracije B_{n1} do B_{n4} . Problem se može pojednostavniti u slučaju simetrije (antisimetrije) vanjskog opterećenja. U tom slučaju eliminiraju se iz homogenog rješenja funkcije koje nisu simetrične (antisimetrične) izjednačavanjem pripadnih konstanti integracije s nulom, kako slijedi

Simetrija..... izostaviti $\text{sh}\beta_n x$ i $\beta_n x \text{ch}\beta_n x$, dakle $B_{n1} = B_{n3} = 0$

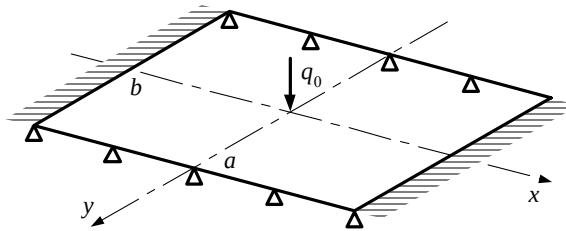
Antisimetrija..... izostaviti $\text{ch}\beta_n x$ i $\beta_n x \text{sh}\beta_n x$, dakle $B_{n2} = B_{n4} = 0$

Preostale konstante integracije određuju se iz rubnih uvjeta.

PRIMJER 5.6.

Pravokutna ploča dimenzija $a \times b$ i debljine h oslonjena je i opterećena jednolikim opterećenjem q_0 prema slici 5.11. Odrediti funkciju progiba i iznos progiba u sredini ploče.

Zadano: $a = 4 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $h = 0,01 \text{ m}$, $q_0 = 1 \text{ kN/m}^2$, $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,3$



Slika 5.11 Primjer 5.6

Funkcija progiba se pretpostavlja samo s jednim članom reda, tj. $n=1$.

Homogeno rješenje $w_{1h}(x)$, zbog simetričnog vanjskog opterećenja, ($B_{11} = B_{13} = 0$), glasi:

$$w_{1h}(x) = B_{12} \text{ch}\beta_1 x + B_{14} \beta_1 x \text{sh}\beta_1 x$$

gdje je $\beta_1 = \frac{\pi}{b}$

Partikularno rješenje $w_{1p}(x)$ se pretpostavlja na osnovu funkcije smetnje $f(x) = q_0$ kao

$$w_{1p}(x) = A_1$$

Kada se ovo rješenje s derivacijama uvrsti u jednadžbu (5.10) proizlazi

$$A_1 = \frac{q_0}{D\beta_1^4} \quad \text{dakle} \quad w_{1p}(x) = \frac{q_0}{D\beta_1^4}$$

Prema tome, koeficijent reda $w_1(x)$ glasi

$$w_1(x) = B_{12} \text{ch}\beta_1 x + B_{14} \beta_1 x \text{sh}\beta_1 x + \frac{q_0}{D\beta_1^4}$$

Nepoznate konstante B_{12} i B_{14} određuju se iz rubnih uvjeta

$$x = \frac{a}{2} \quad w = 0 \quad \frac{dw}{dx} = 0$$

što daje potrebne dvije jednadžbe

$$B_{12} \operatorname{ch} \beta_1 \frac{a}{2} + B_{14} \beta_1 \frac{a}{2} \operatorname{sh} \beta_1 \frac{a}{2} + \frac{q_0}{\beta_1^4 D} = 0$$

$$B_{12} \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 \frac{a}{2} + B_{14} \left(\beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 \frac{a}{2} + \beta_1^2 \frac{a}{2} \operatorname{ch} \beta_1 \frac{a}{2} \right) = 0$$

Rješenjem ovog sustava i uvođenjem zadanih brojčanih vrijednosti dobiva se

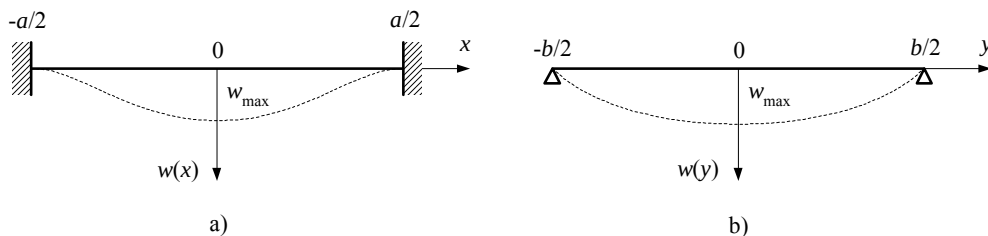
$$B_{12} = -0,001894 \text{ m}$$

$$B_{14} = 0,000319 \text{ m}$$

te funkcija progiba glasi

$$w(x, y) = \left(-0,001894 \operatorname{ch} \beta_1 x + 0,000319 \beta_1 x \operatorname{sh} \beta_1 x + \frac{q_0}{\beta_1^4 D} \right) \operatorname{ch} \beta_1 y$$

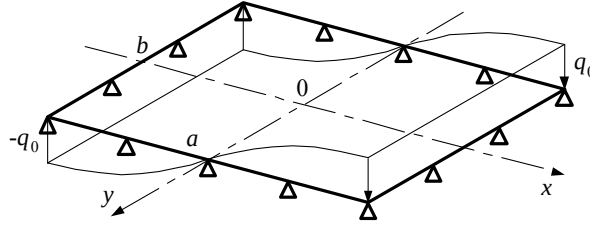
Raspodjela progiba duž simetrala $y = 0$ i $x = 0$ prikazana je na slici 5.12.a i b. Iznos progiba u sredini ploče iznosi $w(0,0) = 0,00665 \text{ m}$



Slika 5.12 Primjer 5.6

PRIMJER 5.7.

Pravokutna ploča iz Primjera 5.6 slobodno je oslonjena na svojim krajevima i opterećena opterećenjem $q = q_0 \sin \pi x/a$ prema slici 5.13. Odrediti funkciju progiba, te približno mjesto i iznos najvećeg progiba.



Slika 5.13 Primjer 5.7

Uzimajući u obzir jedan član reda ($n=1$) i asimetričnost opterećenja ($B_{12} = B_{14} = 0$), **homogeno rješenje** glasi

$$w_{1h}(x) = B_{11} \operatorname{sh} \beta_1 x + B_{13} \beta_1 x \operatorname{ch} \beta_1 x$$

Partikularno rješenje se pretpostavlja u obliku

$$w_{1p} = A_1 \sin \frac{\pi x}{a}$$

Kada se ovo rješenje s derivacijama uvrsti u jednadžbu (5.10) proizlazi

$$A_1 = \frac{q_0}{D} \cdot \frac{a^4 b^4}{\pi^4 (a^2 + b^2)^2}$$

Dakle, koeficijent $w_1(x)$ glasi

$$w_1(x) = B_{11} \operatorname{sh} \beta_1 x + B_{13} \beta_1 x \operatorname{ch} \beta_1 x + \frac{q_0}{D} \cdot \frac{a^4 b^4}{\pi^4 (a^2 + b^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a}$$

Nepoznate konstante B_{11} i B_{13} određuju se iz rubnih uvjeta

$$x = \frac{a}{2} \quad w = 0 \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

što daje potrebne dvije jednadžbe

$$B_{11} \operatorname{sh} \beta_1 \frac{a}{2} + B_{13} \beta_1 \frac{a}{2} \operatorname{ch} \beta_1 \frac{a}{2} + \frac{q_0}{D} \cdot \frac{a^4 b^4}{\pi^4 (a^2 + b^2)^2} \sin \frac{\pi}{2} = 0$$

$$B_{11} \beta_1^2 \operatorname{sh} \beta_1 \frac{a}{2} + B_{13} \beta_1^2 \left(2 \operatorname{sh} \beta_1 \frac{a}{2} + \beta_1 \frac{a}{2} \operatorname{ch} \beta_1 \frac{a}{2} \right) - \frac{q_0}{D} \cdot \frac{a^4 b^4}{\pi^4 (a^2 + b^2)^2} \frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{\pi}{2} = 0$$

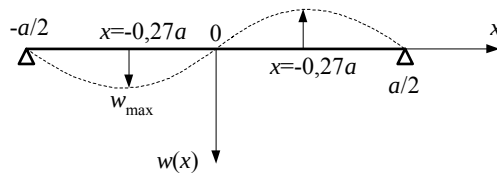
Rješenje sa zadanim brojčanim vrijednostima glasi

$$B_{11} = -0,0014 \text{ m} \quad B_{13} = 0,00029 \text{ m}$$

te je funkcija progiba

$$w(x, y) = \left(-0,0014 \operatorname{sh} \beta_1 x + 0,00029 \beta_1 x \operatorname{ch} \beta_1 x + \frac{q_0}{D} \cdot \frac{a^4 b^4}{\pi^4 (a^2 + b^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \right) \cos \beta_1 y$$

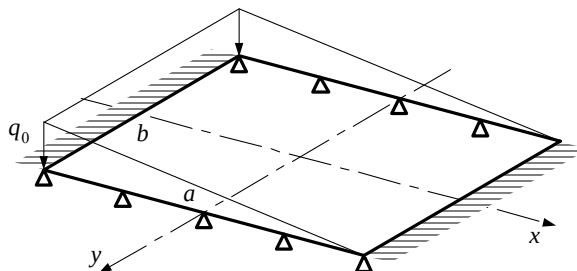
Raspodjela progiba duž simetrale $y = 0$ prikazana je na slici 5.14, gdje je ujedno naznačen i položaj najvećeg progiba $w_{\max} = \pm 1,81 \text{ mm}$



Slika 5.14 Primjer 5.7

PRIMJER 5.8.

Pravokutna ploča iz Primjera 5.6 opterećena je opterećenjem $q = q_0 \left(-\frac{1}{a}x + \frac{1}{2} \right)$ prema slici 5.15. Odrediti funkciju progiba, te približno mjesto i iznos najvećeg progiba.



Slika 5.15 Primjer 5.8

Obzirom da je **opterećenje nesimetrično**, homogeno rješenje glasi

$$w_{1h}(x) = B_{11} \operatorname{sh} \beta_1 x + B_{12} \operatorname{ch} \beta_1 x + B_{13} \beta_1 x \operatorname{ch} \beta_1 x + B_{14} \beta_1 x \operatorname{sh} \beta_1 x$$

Partikularno rješenje se pretpostavlja u obliku polinoma 1. stupnja

$$w_{1p}(x) = A_1 x + A_2$$

Kada se ovo rješenje s derivacijama uvrsti u jednadžbu (5.10) proizlazi

$$A_1 = -\frac{q_0 b^4}{D\pi^4} \frac{1}{a} \quad A_2 = \frac{q_0 b^4}{D\pi^4} \frac{1}{2}$$

Dakle, koeficijent $w_1(x)$ glasi

$$w_1(x) = B_{11} \operatorname{sh} \beta_1 x + B_{12} \operatorname{ch} \beta_1 x + B_{13} \beta_1 x \operatorname{ch} \beta_1 x + B_{14} \beta_1 x \operatorname{sh} \beta_1 x + \frac{q_0 b^4}{D\pi^4} \left(-\frac{1}{a} x + \frac{1}{2} \right)$$

Nepoznate konstante B_{11} , B_{12} , B_{13} i B_{14} određuju se iz rubnih uvjeta

$$\begin{aligned} x = \frac{a}{2} \quad , \quad w = 0 \quad , \quad \frac{dw}{dx} = 0 \\ x = -\frac{a}{2} \quad , \quad w = 0 \quad , \quad \frac{dw}{dx} = 0 \end{aligned}$$

što daje potrebne četiri jednadžbe

$$\begin{aligned} B_{11} \operatorname{sh} \beta_1 \frac{a}{2} + B_{12} \operatorname{ch} \beta_1 \frac{a}{2} + B_{13} \beta_1 \frac{a}{2} \operatorname{ch} \beta_1 \frac{a}{2} + B_{14} \beta_1 \frac{a}{2} \operatorname{sh} \beta_1 \frac{a}{2} &= 0 \\ B_{11} \beta_1 \operatorname{ch} \beta_1 \frac{a}{2} + B_{12} \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 \frac{a}{2} + B_{13} \left(\beta_1 \operatorname{ch} \beta_1 \frac{a}{2} + \beta_1^2 \frac{a}{2} \operatorname{sh} \beta_1 \frac{a}{2} \right) &+ \\ + B_{14} \left(\beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 \frac{a}{2} + \beta_1^2 \frac{a}{2} \operatorname{ch} \beta_1 \frac{a}{2} \right) - \frac{q_0 b^4}{D\pi^4} \frac{1}{a} &= 0 \\ -B_{11} \operatorname{sh} \beta_1 \frac{a}{2} + B_{12} \operatorname{ch} \beta_1 \frac{a}{2} - B_{13} \beta_1 \frac{a}{2} \operatorname{ch} \beta_1 \frac{a}{2} + B_{14} \beta_1 \frac{a}{2} \operatorname{sh} \beta_1 \frac{a}{2} + \frac{q_0 b^4}{D\pi^4} &= 0 \\ B_{11} \beta_1 \operatorname{ch} \beta_1 \frac{a}{2} - B_{12} \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 \frac{a}{2} + B_{13} \left(\beta_1 \operatorname{ch} \beta_1 \frac{a}{2} + \beta_1^2 \frac{a}{2} \operatorname{sh} \beta_1 \frac{a}{2} \right) &- \\ - B_{14} \left(\beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 \frac{a}{2} + \beta_1^2 \frac{a}{2} \operatorname{ch} \beta_1 \frac{a}{2} \right) - \frac{q_0 b^4}{D\pi^4} \frac{1}{a} &= 0 \end{aligned}$$

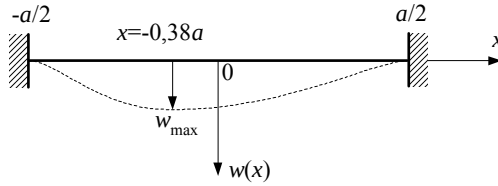
Rješenjem ovog sustava jednadžbi dobiva se

$$B_{11} = 0,001 \text{ m}, \quad B_{12} = -0,001 \text{ m}, \quad B_{13} = -0,00026 \text{ m}, \quad B_{14} = 0,00036 \text{ m}$$

što daje funkciju progiba $w(x, y)$ u obliku

$$\begin{aligned} w(x, y) = [0,001 \operatorname{sh} \beta_1 x - 0,001 \operatorname{ch} \beta_1 x - 0,00026 \beta_1 x \operatorname{ch} \beta_1 x + 0,00036 \beta_1 x \operatorname{sh} \beta_1 x + \\ + 0,0085(0,5 - 0,25x)] \cos \beta_1 y \end{aligned}$$

Budući da se najveći progib nalazi na simetrali $y = 0$, na slici 5.16 prikazana je raspodjela progiba duž nje, gdje je takođe naznačen položaj najvećeg progiba u iznosu $w_{\max} = 4,6 \text{ mm}$.



Slika 5.16 Primjer 5.8

Kako je zadano nesimetrično opterećenje superpozicija simetričnog (konstantnog) i asimetričnog opterećenja, vidjeti proračun $w_{1p}(x)$, ovaj zadatak se mogao riješiti i parcijalnim određivanjem konstanti B_{11} i B_{13} (asimetrično opterećenje) te konstanti B_{12} i B_{14} (konstantno opterećenje). Dobitak se sastoji u tome, što se umjesto jednog sustava od 4 jednadžbe rješavaju 2 sustava s po 2 nepoznanice.

5.5. Približno analitičko rješenje primjenom Ritz-ove metode

Ritz-ova metoda [6] je energetska metoda na osnovi principa minimuma ukupne energije kod savijanja ploče, a to znači: od svih funkcija progiba ploče, koje zadovoljavaju rubne uvjete, treba odrediti one koje daju minimalnu ukupnu energiju strukturi ploče i time stabilno stanje ravnoteže iste.

Stoga se progibna funkcija $w(x,y)$ pretpostavlja u obliku reda funkcija

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^n A_i f_i(x,y) \quad (5.11)$$

gdje su $f_i(x,y)$ neprekinute funkcije koje, **svaka za sebe**, moraju zadovoljavati geometrijske rubne uvjete i opisivati deformaciju ploče. Nepoznati koeficijenti $A_1, A_2, \dots, A_n$ određuju se iz uvjeta minimuma ukupne energije

$$\frac{\partial W}{\partial A_1} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial A_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial A_n} = 0 \quad (5.12)$$

Ovaj postupak minimizacije daje n algebarskih jednadžbi s nepoznaticama $A_1, A_2, \dots, A_n$. Ukupna energija kod savijanja ploče glasi

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right] dx dy - \iint_S q_z w dx dy \quad (5.13)$$

gdje je S - površina ploče

Točnost Ritzove metode u mnogome ovisi o tome, u kojoj mjeri mogu funkcije $f_i(x,y)$ dobro opisati progibnu plohu uslijed stvarnog opterećenja. Ovdje su u tu svrhu upotrebljene **trigonometrijske funkcije**. U Tablicama 5.1 i 5.2 prikazan je za zglobno oslonjenu i upetu ploču izbor takvih funkcija za razna opterećenja i položaje ishodišta koordinatnog sustava.

Opterećenje	Koordinatni sustav	
	u uglu ploče	u sredini ploče
Jednoliko, Simetrično	$\sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}$ $i=1,3,5,\dots j=1,3,5,\dots$	$\cos \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b}$ $i=1,3,5,\dots j=1,3,5,\dots$
Antisimetrično	$\sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}$ $i=2,4,6,\dots j=2,4,6,\dots$	$\sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}$ $i=2,4,6,\dots j=2,4,6,\dots$
Nesimetrično	$\sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}$ $i=1,2,3,\dots j=1,2,3,\dots$	

Tablica 5.1 Trigonometrijske funkcije oblika za zglobno oslonjenu ploču

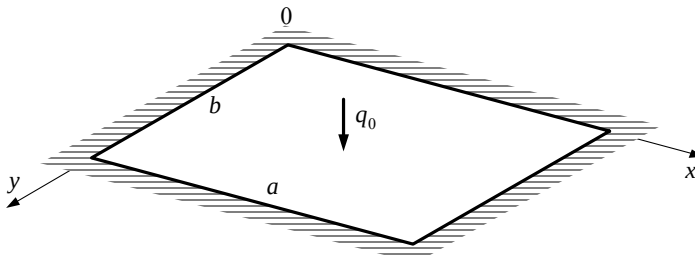
Opterećenje	Koordinatni sustav	
	u uglu ploče	u sredini ploče
Jednoliko, simetrično	$\left(\sin \frac{i\pi x}{a} \right)^2 \left(\sin \frac{j\pi y}{b} \right)^2$ $i=1,2,3,\dots j=1,2,3,\dots$ $\frac{1}{4} \left(1 - \cos \frac{i\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{j\pi y}{b} \right)$ $i=2,4,6,\dots j=2,4,6,\dots$	$\left(\cos \frac{i\pi x}{a} \right)^2 \left(\cos \frac{j\pi y}{b} \right)^2$ $i=1,3,5,\dots j=1,3,5,\dots$ $\frac{1}{4} \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b} \right)$

Tablica 5.2 Trigonometrijske funkcije oblika za upetu ploču

U slučaju kada su dvije i dvije nasuprotne stranice ploče različito učvršćene, tada valja kombinirati funkcije iz obje tablice.

PRIMJER 5.9.

Pravokutna ploča dimenzija $a \times b$ i debljine h upeta je na svim stranicama i opterećena jednolikim opterećenjem q_0 prema slici 5.17. Odrediti funkciju progiba i progib u sredini ploče.



Slika 5.17 Primjer 5.9

Funkcija progiba pretpostavljena je s jednim članom reda prema tablici 5.2

$$w(x, y) = A_1 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b}$$

Kada se za ukupnu energiju W (5.13) izvedu potrebne derivacije funkcije $w(x, y)$ i potom izvrši njihovo integriranje u granicama $\int_0^a \int_0^b (\dots) dx dy$, proizlazi

$$W = 2DA_1^2 \pi^4 \frac{3b^4 + 2a^2b^2 + 3a^4}{16a^3b^3} - \frac{1}{4} q_0 ab A_1$$

Uvjet minimuma ukupne energije $\frac{\partial W}{\partial A_1} = 0$ daje potrebnu jednadžbu za određivanje koeficijenta A_1

$$4D\pi^4 \frac{3b^4 + 2a^2b^2 + 3a^4}{16a^3b^3} A_1 - \frac{1}{4} q_0 ab = 0$$

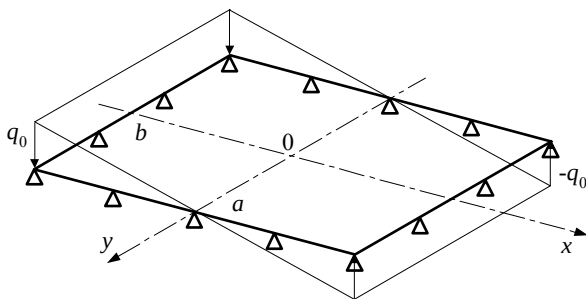
iz koje proizlazi

$$A_1 = \frac{a^4 b^4 q_0}{D\pi^4 (3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4)}$$

što je ujedno i iznos progiba u sredini $w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.

PRIMJER 5.10.

Pravokutna ploča dimenzija $a \times b$ i debljine h zglobno je oslonjena i opterećena opterećenjem $q = 2 \frac{q_0}{a} x$ prema slici 5.18. Odrediti progibnu funkciju, te mjesto i iznos najvećeg progiba.



Slika 5.18 Primjer 5.10

Funkcija progiba pretpostavljena je s jednim članom reda prema tablici 5.1.

$$w(x, y) = A_1 \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

Prema izrazu (5.13) za ukupnu energiju W , nakon izvođenja potrebnih derivacija funkcije

$w(x, y)$ i njihovog integriranja u granicama $\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (...) dx dy$, proizlazi da ukupna energija iznosi

$$W = \frac{D}{8} A_1^2 \pi^4 ab \frac{(a^2 + 4b^2)^2}{a^4 b^4} + 2 \frac{q_0 ab}{\pi^2} A_1$$

Primjenom uvjeta minimuma $\frac{\partial W}{\partial A_1} = 0$ dobiva se jednadžba

$$2 \frac{D}{8} A_1 \pi^4 ab \frac{(a^2 + 4b^2)^2}{a^4 b^4} + 2 \frac{q_0 ab}{\pi^2} = 0$$

iz koje proizlazi

$$A_1 = - \frac{8a^4 b^4 q_0}{D \pi^6 (a^2 + 4b^2)^2}$$

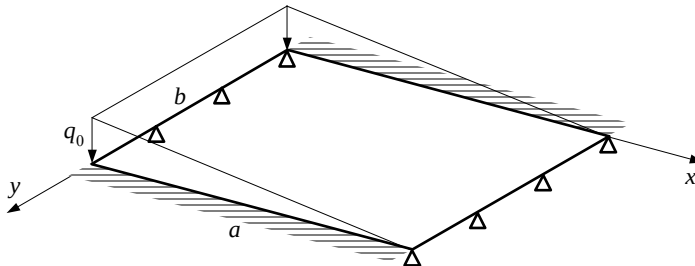
U skladu s pretpostavljenom funkcijom progiba proizlazi, da se najveći progib nalazi na

simetrali $y = 0$ i to za $x = \pm \frac{a}{4}$ u iznosu $w_{\max} = \pm A_1$

PRIMJER 5.11.

Pravokutna ploča dimenzija $a \times b$ i debljine h učvršćena je i opterećena opterećenjem $q = q_0(1 - x/a)$ prema slici 5.19. Odrediti funkciju progiba, te mjesto i iznos najvećeg progiba.

Zadano: $a = 4 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $h = 0,01 \text{ m}$, $q_0 = 1 \text{ kN/m}^2$, $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,3$



Slika 5.19 Primjer 5.11

Zbog nesimetričnosti opterećenja (i deformacije) funkcija progiba je u smjeru x pretpostavljena s dva člana reda

$$w(x, y) = A_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b}$$

Po načelu superpozicije vrijedi

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y)$$

te se za svaku komponentu progiba može zasebno primijeniti Ritz-ova metoda. Nakon izvođenja potrebnih derivacija dobiva se ukupna energija po komponentama

$$W_1 = \frac{1}{2} D \left[\frac{291}{512} \pi^4 A_1^2 - 2(1-\nu) \frac{1}{32} \pi^4 A_1^2 \right] + \frac{4}{\pi} A_1$$

$$W_2 = \frac{1}{2} D \left[\frac{83}{32} \pi^4 A_2^2 - 2(1-\nu) \frac{7}{32} \pi^4 A_2^2 \right] + \frac{2}{\pi} A_2$$

Uvođenjem uvjeta minimuma energije po komponentama

$$\frac{\partial W_1}{\partial A_1} = 0, \quad \frac{\partial W_2}{\partial A_2} = 0$$

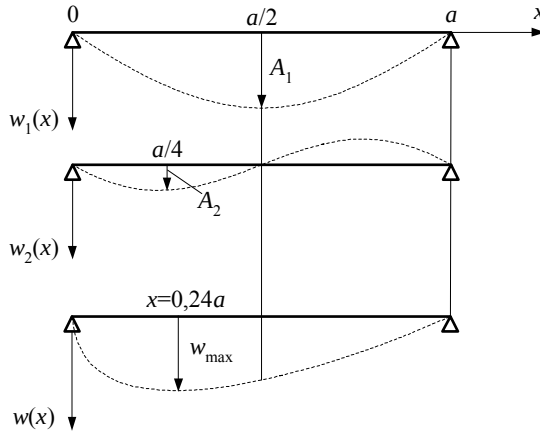
slijedi

$$A_1 = \frac{2048}{D\pi^5(259 + 32\nu)} = 0,997 \text{ mm}, \quad A_2 = \frac{64}{D\pi^5(69 + 14\nu)} = 0,114 \text{ mm}$$

Funkcija progiba glasi

$$w(x, y) = \left(0,997 \sin \frac{\pi x}{a} + 0,114 \sin \frac{2\pi x}{a} \right) \sin^2 \frac{\pi y}{b}$$

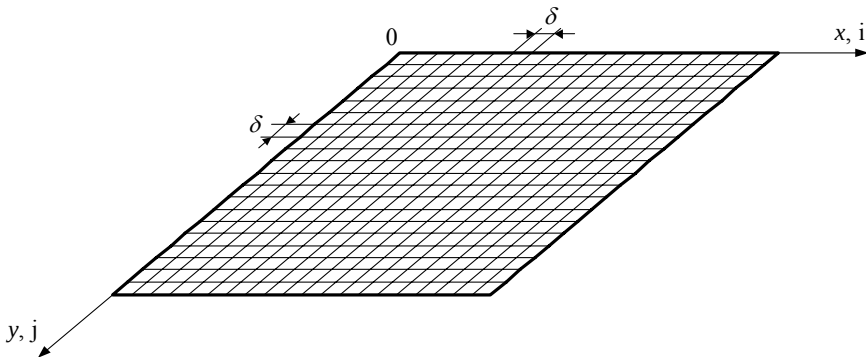
Raspodjela progiba duž simetrale $y = b/2$, po komponentama (po članovima reda) i u cijelosti, prikazana je na slici 5.20, gdje je označeno mjesto najvećeg progiba u iznosu $w_{\max} = 1,035 \text{ mm}$.



Slika 5.20 Primjer 5.11

5.6. Numeričko rješenje primjenom metode konačnih razlika

Kod primjene metode konačnih razlika [6] ploča se modelira s dvodimenzionalnom mrežom konačnih razlika, slika 5.21, te se problem svodi na određivanje progiba, sila i momenata u točkama mreže.

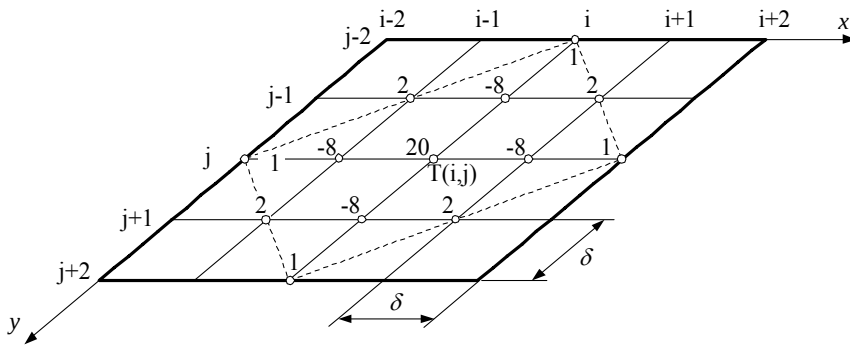


Slika 5.21 Mreža konačnih razlika

Svaka točka mreže ima svoju mrežnu koordinatu $\mathbf{T(i,j)}$, te se za nju može postaviti slijedeća algebarska jednačba

$$w_{i,j-2} + 2w_{i-1,j-1} - 8w_{i,j-1} + 2w_{i+1,j-1} + w_{i-2,j} + 8w_{i-1,j} + 20w_{ij} - 8w_{i+1,j} + w_{i+2,j} + 2w_{i-1,j+1} - 8w_{i,j+1} + 2w_{i+1,j+1} + w_{i,j+2} = \frac{q_{ij}}{D} \delta^4 \quad (5.14)$$

Ova jednačba zamjenjuje diferencijalnu jednačbu savijanja ploče (5.1) i naziva se **diferencijska jednačba** u točki $\mathbf{T(i,j)}$ mreže konačnih razlika. Raspored koeficijenata uz progibi u ovoj jednačbi prikazana je shematski na slici 5.22.



Slika 5.22 Shema koeficijenata diferencijske jednačbe za točku T(i,j)

Jednačba (5.14) postavlja se za sve točke mreže osim za točke na rubu. Na taj način se problem svodi na rješavanje sustava linearnih algebarskih jednačbi, čije rješenje su progibi u točkama mreže.

Na analogan način mogu se diferencijalni izrazi (5.2), (5.3) i (5.4) za unutarnje sile i momente zamijeniti s odgovarajućim diferencijskim izrazima

$$(M_x)_{ij} = -\frac{D}{\delta^2} \left[(w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}) + \nu(w_{i,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,j-1}) \right] \quad (5.15)$$

$$(M_y)_{ij} = -\frac{D}{\delta^2} \left[(w_{i,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,j-1}) + \nu(w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}) \right]$$

$$T_{ij} = -\frac{(1-\nu)D}{4\delta^2} (w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}) \quad (5.16)$$

$$(Q_x)_{ij} = -\frac{D}{2\delta^3} \left[(w_{i+1,j-1} - 2w_{i+1,j} + w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j-1} + 2w_{i-1,j} - w_{i-1,j+1}) + (w_{i+2,j} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} - w_{i-2,j}) \right] \quad (5.17)$$

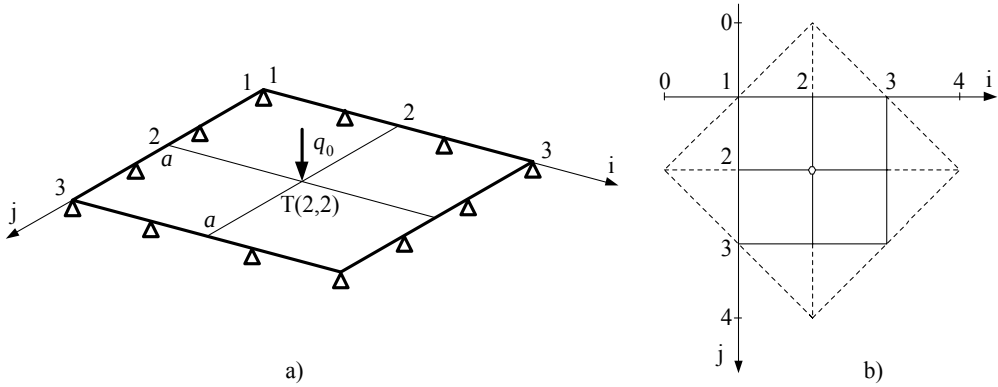
$$(Q_y)_{ij} = -\frac{D}{2\delta^3} \left[(w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} + 2w_{i,j-1} - w_{i-1,j-1}) - (w_{i,j+2} - 2w_{i,j+1} + 2w_{i,j-1} - w_{i,j-2}) \right]$$

Obzirom da se u jednadžbama (5.14), koje se postavljaju za točke ploče **do ruba**, pojavljuju prekobrojne nepoznanice za točke izvan ruba ploče, za ove nepoznanice je nužno postaviti dodatne jednadžbe preko rubnih uvjeta ploče, slika 5.2. Ti rubni uvjeti se takođe dadu izraziti u obliku diferencijskih izraza

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{ij} &= \frac{1}{2\delta}(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{ij} &= \frac{1}{2\delta}(w_{i,j+1} - w_{i,j-1}) \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{ij} &= \frac{1}{\delta^2}(w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}) \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{ij} &= \frac{1}{\delta^2}(w_{i,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,j-1})\end{aligned}\quad (5.18)$$

PRIMJER 5.12.

Kvadratna ploča dimenzija $a \times a$ i debljine h zglibno je oslonjena i opterećena jednolikim opterećenjem q_0 . Odrediti progib u sredini ploče za mrežu konačnih razlika prema slici 5.23.a.



Slika 5.23 Primjer 5.12

Obzirom da je unutar ruba ploče samo točka **T(2,2)**, jednadžba (5.14) za tu točku glasi

$$w_{20} + 2w_{11} - 8w_{21} + 2w_{31} + w_{02} - 8w_{12} + 20w_{22} - 8w_{32} + w_{42} + 2w_{13} - 8w_{23} + 2w_{33} = \frac{q_0}{D} \delta^4$$

gdje je $\delta = \frac{a}{2}$

Za točke na rubu vrijede rubni uvjeti

$$w_{11} = w_{21} = w_{31} = w_{12} = w_{22} = w_{13} = w_{23} = w_{33} = 0$$

Točke izvan ruba povezane su s točkama unutar ruba preko preostalih rubnih uvjeta

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{21} = 0 = w_{22} - 2w_{21} + w_{20} \quad \text{što daje} \quad w_{20} = -w_{22}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{12} = 0 = w_{22} - 2w_{12} + w_{02} \quad \text{što daje} \quad w_{02} = -w_{22}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{23} = 0 = w_{24} - 2w_{23} + w_{22} \quad \text{što daje} \quad w_{24} = -w_{22}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{32} = 0 = w_{42} - 2w_{32} + w_{22} \quad \text{što daje} \quad w_{42} = -w_{22}$$

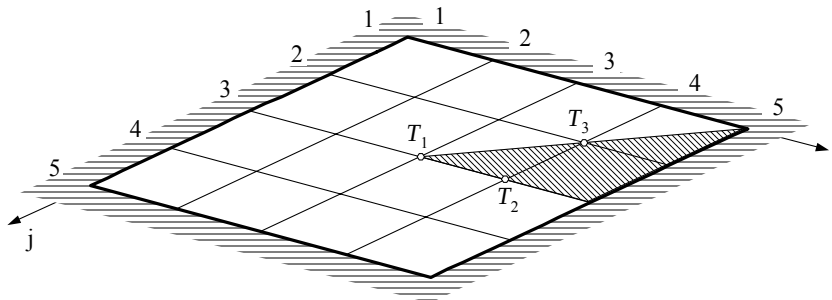
Kada se ovi izrazi uvrste u osnovnu jednažbu, proizlazi da je **progib u sredini ploče**

$$w_{22} = \frac{1}{16} \frac{q_0 \delta^4}{D}$$

PRIMJER 5.13.

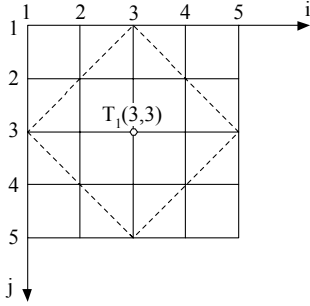
Kvadratna ploča dimenzija $a \times a$ i debljine h upeta je i opterećena jednolikim opterećenjem q_0 . Odrediti raspodjelu progiba u ploči za mrežu konačnih razlika prema slici 5.24.

Zadano: a, q_0, D (krutost ploče)

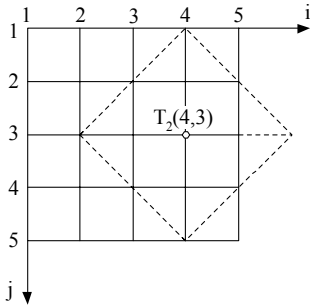


Slika 5.24 Primjer 5.13

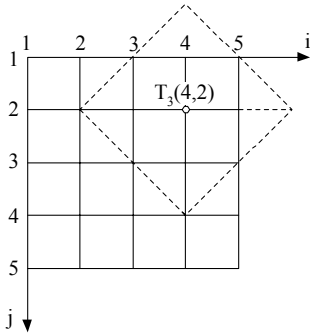
Zbog višestruke simetričnosti dovoljno je razmatrati samo 1/8 ploče (zasjenčena površina) koja sadrži tri točke mreže. Za njih se postavljaju jednadžbe oblika (5.14)



$$w_{31} + 2w_{22} - 8w_{32} + 2w_{42} + w_{13} - 8w_{23} + 20w_{33} - \\ - 8w_{43} + w_{53} + 2w_{24} - 8w_{34} + 2w_{44} + w_{35} = \frac{q_0}{D} \delta^4$$



$$w_{41} + 2w_{32} - 8w_{42} + 2w_{52} + w_{23} - 8w_{33} + 20w_{43} - \\ - 8w_{53} + w_{63} + 2w_{34} - 8w_{44} + 2w_{54} + w_{45} = \frac{q_0}{D} \delta^4$$



$$w_{40} + 2w_{31} - 8w_{41} + 2w_{51} + w_{22} - 8w_{32} + 20w_{42} - \\ - 8w_{52} + w_{62} + 2w_{33} - 8w_{43} + 2w_{53} + w_{44} = \frac{q_0}{D} \delta^4$$

Ove osnovne jednadžbe se mogu odmah značajno pojednostavniti uvođenjem slijedećih uvjeta simetrije

$$w_{22} = w_{24} = w_{44} = w_{42}, \quad w_{32} = w_{23} = w_{34} = w_{43}$$

i rubnih uvjeta

$$w_{31} = w_{41} = w_{51} = w_{13} = w_{35} = w_{45} = w_{52} = w_{53} = w_{54} = 0$$

Proizlazi

$$-32w_{43} + 20w_{33} + 8w_{42} = \frac{q_0}{D} \delta^4$$

$$25w_{43} - 8w_{33} - 16w_{42} + w_{63} = \frac{q_0}{D} \delta^4$$

$$-16w_{43} + 2w_{33} + 22w_{42} + w_{62} + w_{40} = \frac{q_0}{D} \delta^4$$

U gornjim jednadžbama još su kao višak nepoznanice w_{62} , w_{63} i w_{40} koje se pomoću rubnih uvjeta mogu izraziti preko osnovnih nepoznanica

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{41} = 0 = \frac{1}{2\delta} (w_{42} - w_{40}) \quad \text{što daje} \quad w_{40} = w_{42}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{52} = 0 = \frac{1}{2\delta} (w_{62} - w_{42}) \quad \text{što daje} \quad w_{62} = w_{42}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{53} = 0 = \frac{1}{2\delta} (w_{63} - w_{43}) \quad \text{što daje} \quad w_{63} = w_{43}$$

Uvođenjem ovih izraza, osnovne jednadžbe dobivaju svoj konačni oblik

$$-32w_{43} + 20w_{33} + 8w_{42} = \frac{q_0}{D} \delta^4$$

$$26w_{43} - 8w_{33} - 16w_{42} = \frac{q_0}{D} \delta^4$$

$$-16w_{43} + 2w_{33} + 24w_{42} = \frac{q_0}{D} \delta^4$$

Rješenje glasi

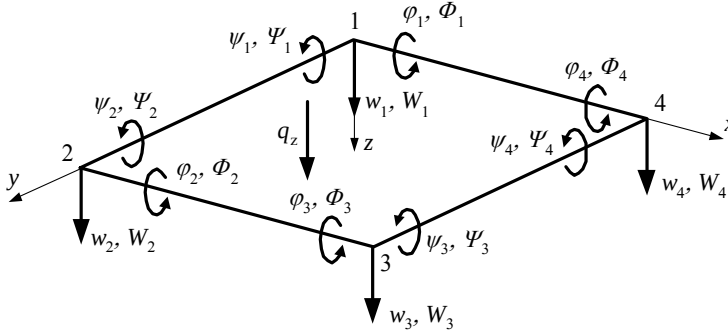
$$w_{33} = 0,461 \frac{q_0}{D} \delta^4, \quad w_{43} = 0,309 \frac{q_0}{D} \delta^4, \quad w_{42} = 0,209 \frac{q_0}{D} \delta^4$$

5.7 Numeričko rješenje primjenom metode konačnih elemenata

Pravokutna ploča se modelira sustavom pločastih konačnih elemenata (trokutasti, pravokutni), te se problem svodi na određivanje progiba, nagiba i unutarnjih sila u spojnim točkama elemenata, tj. u čvorovima. Ovdje će se prikazati modeliranje samo s pravokutnim pločastim elementima /7/.

Numerički primjeri koji slijede obrađeni su s modelima koji sadrže vrlo malen broj konačnih elemenata. Obzirom da konvergencija prema točnom analitičkom rješenju ovisi i o gustoći mreže konačnih elemenata, dobivena rješenja u navedenim primjerima samo su približna.

Pravokutni pločasti element prikazan je sa svojim značajkama na slici 5.25.



Slika 5.25 Pravokutni pločasti konačni element

Element ima 4 čvora, u svakom čvoru su 3 stupnja slobode i to progib w i kutevi zakreta φ i ψ , zatim poprečna sila W i momenti savijanja Φ i Ψ .

Matrična jednadžba konačnog elementa ima svoj uobičajeni oblik

$$[k] \cdot \{\delta\} = \{f\} - \{f\}_q$$

gdje je

$$[k] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)A} \begin{bmatrix} [k]_{11} & [k]_{12} \\ [k]_{21} & [k]_{22} \end{bmatrix} \quad \text{matrica krutosti}$$

$$A = l_x \cdot l_y \quad \text{površina elementa}$$

$$[k]_{12} = [k]_{21}^T$$

Podmatrica $[k]_{11}$

$$\begin{bmatrix} 4(\alpha^2 + b^2) + \frac{1}{5}(14-4\nu) & \begin{bmatrix} 2\alpha^2 + \frac{1}{5}(1+4\nu) \\ \frac{4}{3}\alpha^2 + \frac{4}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} b & -\begin{bmatrix} 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1+4\nu) \\ \frac{4}{3}\beta^2 + \frac{4}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} a & 2(\alpha^2 - 2\beta^2) - \frac{1}{5}(14-4\nu) & \begin{bmatrix} \alpha^2 - \frac{1}{5}(1+4\nu) \\ \frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{4}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} b & -\begin{bmatrix} 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1-\nu) \\ \frac{2}{3}\beta^2 - \frac{1}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} a \\ & b^2 & -\nu ab & \begin{bmatrix} -\alpha^2 + \frac{1}{5}(1+4\nu) \\ 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1-\nu) \end{bmatrix} b & \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{4}{15}(1-\nu) \\ 0 \end{bmatrix} b^2 & 0 \\ & a^2 & & \begin{bmatrix} 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1-\nu) \\ 0 \end{bmatrix} a & 0 & \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\beta^2 - \frac{1}{15}(1-\nu) \\ 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1+4\nu) \end{bmatrix} a^2 \\ & & 4(\alpha^2 + b^2) + \frac{1}{5}(14-4\nu) & \begin{bmatrix} 2\alpha^2 + \frac{1}{5}(1+4\nu) \\ \frac{4}{3}\alpha^2 + \frac{4}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} b & \begin{bmatrix} 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1+4\nu) \\ \nu ab \end{bmatrix} a & \\ & & & & & \begin{bmatrix} \frac{4}{3}\beta^2 + \frac{4}{15}(1-\nu) \\ \frac{4}{3}\beta^2 + \frac{4}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} a^2 \end{bmatrix}$$

simet.

Podmatrica $[k]_{12}$

$$\begin{bmatrix} -2(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{5}(14-4\nu) & \begin{bmatrix} \alpha^2 - \frac{1}{5}(1-\nu) \\ \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{1}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} b & \begin{bmatrix} -\beta^2 + \frac{1}{5}(1-\nu) \\ \frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} a & 2(\beta^2 - 2\alpha^2) - \frac{1}{5}(14-4\nu) & \begin{bmatrix} 2\alpha^2 + \frac{1}{5}(1-\nu) \\ \frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{1}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} b & \begin{bmatrix} -\beta^2 + \frac{1}{5}(1+4\nu) \\ \frac{2}{3}\beta^2 - \frac{4}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} b \\ & b^2 & 0 & -\begin{bmatrix} 2\alpha^2 + \frac{1}{5}(1-\nu) \\ \frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{1}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} b & \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{1}{15}(1-\nu) \\ 0 \end{bmatrix} b^2 & 0 \\ & a & \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{15}(1-\nu) \\ \frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} a^2 & \begin{bmatrix} -\beta^2 + \frac{1}{5}(1+4\nu) \\ 0 \end{bmatrix} a & 0 & \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\beta^2 - \frac{4}{15}(1-\nu) \\ \frac{2}{3}\beta^2 - \frac{4}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} a^2 \\ 2(\beta^2 - 2\alpha^2) - \frac{1}{5}(14-4\nu) & \begin{bmatrix} 2\alpha^2 + \frac{1}{5}(1-\nu) \\ \frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{1}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} b & \begin{bmatrix} \beta^2 - \frac{1}{5}(1+4\nu) \\ \frac{2}{3}\beta^2 - \frac{4}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} a & -2(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{5}(14-4\nu) & \begin{bmatrix} \alpha^2 - \frac{1}{5}(1-\nu) \\ \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{1}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} b & \begin{bmatrix} \beta^2 - \frac{1}{5}(1-\nu) \\ \frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} a \\ & b^2 & 0 & -\begin{bmatrix} \alpha^2 + \frac{1}{5}(1-\nu) \\ \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{1}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} b & \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{1}{15}(1-\nu) \\ 0 \end{bmatrix} b^2 & 0 \\ & a & \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\beta^2 - \frac{4}{15}(1-\nu) \\ \frac{2}{3}\beta^2 - \frac{4}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} a^2 & \begin{bmatrix} -\beta^2 + \frac{1}{5}(1-\nu) \\ 0 \end{bmatrix} a & 0 & \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{15}(1-\nu) \\ \frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} a^2 \end{bmatrix}$$

Podmatrica $[k]_{22}$

$$\begin{bmatrix} 4(\alpha^2 + b^2) + \frac{1}{5}(14-4\nu) & -\begin{bmatrix} 2\alpha^2 + \frac{1}{5}(1+4\nu) \\ \frac{4}{3}\alpha^2 + \frac{4}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} b & \begin{bmatrix} 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1+4\nu) \\ \frac{4}{3}\beta^2 + \frac{4}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} a & 2(\alpha^2 - 2\beta^2) - \frac{1}{5}(14-4\nu) & \begin{bmatrix} -\alpha^2 + \frac{1}{5}(1+4\nu) \\ \frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{4}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} b & \begin{bmatrix} 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1-\nu) \\ \frac{2}{3}\beta^2 - \frac{1}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} a \\ & b^2 & -\nu ab & \begin{bmatrix} -\alpha^2 + \frac{1}{5}(1+4\nu) \\ 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1-\nu) \end{bmatrix} b & \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{4}{15}(1-\nu) \\ 0 \end{bmatrix} b^2 & 0 \\ & a^2 & & \begin{bmatrix} 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1-\nu) \\ 0 \end{bmatrix} a & 0 & \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\beta^2 - \frac{1}{15}(1-\nu) \\ 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1+4\nu) \end{bmatrix} a^2 \\ & & 4(\alpha^2 + b^2) + \frac{1}{5}(14-4\nu) & -\begin{bmatrix} 2\alpha^2 + \frac{1}{5}(1+4\nu) \\ \frac{4}{3}\alpha^2 + \frac{4}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} b & -\begin{bmatrix} 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1+4\nu) \\ \nu ab \end{bmatrix} a & \\ & & & & & \begin{bmatrix} \frac{4}{3}\beta^2 + \frac{4}{15}(1-\nu) \\ \frac{4}{3}\beta^2 + \frac{4}{15}(1-\nu) \end{bmatrix} a^2 \end{bmatrix}$$

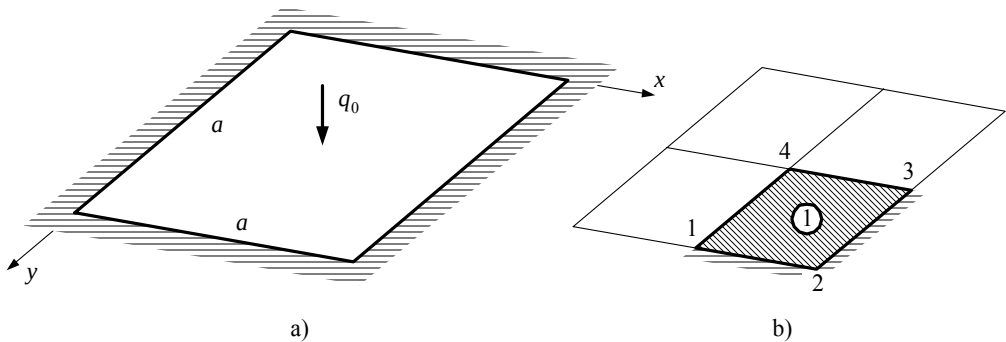
simet.

gdje je $\alpha = \frac{a}{b}$, $\beta = \frac{b}{a}$

Vektor čvornih pomaka	Vektor čvornih sila	Vektor čvornih sila uslijed vanjskog opterećenja
$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \psi_2 \\ w_3 \\ \varphi_3 \\ \psi_3 \\ w_4 \\ \varphi_4 \\ \psi_4 \end{Bmatrix}$	$\{f\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ \Phi_1 \\ \Psi_1 \\ W_2 \\ \Phi_2 \\ \Psi_2 \\ W_3 \\ \Phi_3 \\ \Psi_3 \\ W_4 \\ \Phi_4 \\ \Psi_4 \end{Bmatrix}$	$\{f\}_q = \begin{Bmatrix} 6 \\ l_y \\ -l_x \\ 6 \\ l_x \\ l_y \\ 6 \\ -l_y \\ l_x \\ 6 \\ -l_x \\ -l_y \end{Bmatrix}$

PRIMJER 5.14.

Kvadratna ploča dimenzija $a \times a$ i debljine h upeta je i opterećena jednolikim opterećenjem q_0 prema slici 5.26.a. Odrediti progib u sredini. Zbog dvostruke simetrije dovoljno je razmatrati 1/4 ploče i nju modelirati s jednim elementom prema slici 5.26.b.



Slika 5.26 Primjer 5.14

Ako se uzmu u obzir uvjeti simetrije u čvoru **4** i rubni uvjeti u čvorovima **1**, **2** i **3**, tada matrična jednačba sustava (čitaj: elementa 1) glasi

$$[k] \cdot \begin{Bmatrix} w_1 = 0 \\ \varphi_1 = 0 \\ \psi_1 = 0 \\ w_2 = 0 \\ \varphi_2 = 0 \\ \psi_2 = 0 \\ w_3 = 0 \\ \varphi_3 = 0 \\ \psi_3 = 0 \\ w_4 \\ \varphi_4 = 0 \\ \psi_4 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ \Phi_1 \\ \Psi_1 \\ W_2 \\ \Phi_2 \\ \Psi_2 \\ W_3 \\ \Phi_3 \\ \Psi_3 \\ W_4 = 0 \\ \Phi_4 \\ \Psi_4 \end{Bmatrix} - \left(-\frac{q_0}{24} \cdot \frac{a^2}{4} \right) \begin{Bmatrix} 6 \\ a/2 \\ -a/2 \\ 6 \\ a/2 \\ a/2 \\ 6 \\ -a/2 \\ a/2 \\ 6 \\ -a/2 \\ -a/2 \end{Bmatrix}$$

Redukcijom ovog sustava dobiva se

$$k_{10,10} w_4 = \frac{q_0 a^2}{96} 6$$

gdje je

$$k_{10,10} = (k_{44})_{22} = \left[4(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{5}(14 - 4\nu) \right] \cdot \frac{Eh^3 4}{12(1 - \nu^2)a^2}$$

$$\alpha = \beta = 1$$

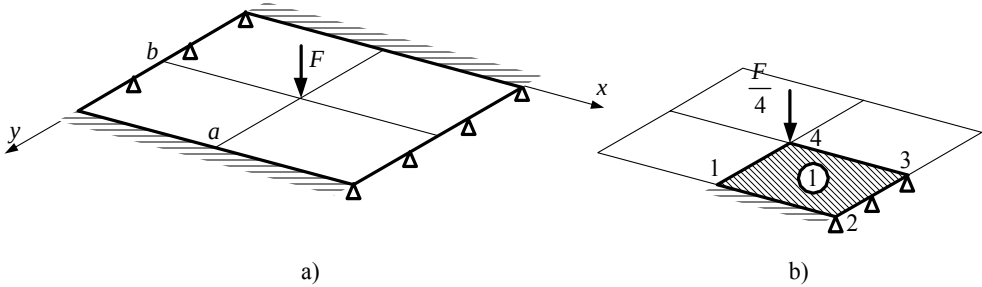
Progib u sredini ploče glasi

$$w_4 = \frac{3(1 - \nu^2)q_0 a^4}{16Eh^3 \left[4 + \frac{1}{5}(14 - 4\nu) \right]}$$

PRIMJER 5.15.

Pravokutna ploča dimenzija $a \times b$ i debljine h učvršćena je i opterećena silom F u sredini prema slici 5.27.a. Odrediti progib u sredini ploče. Zbog simetrije razmotriti samo 1/4 ploče s jednim elementom prema slici 5.27.b.

Zadano: $a = 4 \text{ m}$, $h = 0,02 \text{ m}$, $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,3$



Slika 5.27 Primjer 5.15

Uvjeti simetrije u čvoru 4 i rubni uvjeti u čvorovima 1, 2 i 3 daju slijedeću matričnu jednadžbu sustava

$$[k] \cdot \begin{Bmatrix} w_1 = 0 \\ \varphi_1 = 0 \\ \psi_1 = 0 \\ w_2 = 0 \\ \varphi_2 = 0 \\ \psi_2 = 0 \\ w_3 = 0 \\ \varphi_3 = 0 \\ \psi_3 \\ w_4 \\ \varphi_4 = 0 \\ \psi_4 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ \Phi_1 \\ \Psi_1 \\ W_2 \\ \Phi_2 \\ \Psi_2 \\ W_3 \\ \Phi_3 \\ \Psi_3 = 0 \\ W_4 = F/4 \\ \Phi_4 \\ \Psi_4 \end{Bmatrix}$$

Redukcijom ovog sustava dobiva se

$$k_{9,9}\psi_3 + k_{9,10}w_4 = 0$$

$$k_{10,9}\psi_3 + k_{10,10}w_4 = \frac{F}{4}$$

gdje je

$$k_{9,9} = (k_{33})_{22} = \frac{4Eh^3}{12(1-\nu^2)a^2} \frac{a^2}{4} \left[\frac{4}{3}\alpha + \frac{4}{15}(1-\nu) \right]$$

$$k_{9,10} = (k_{34})_{22} = -\frac{4Eh^3}{12(1-\nu^2)a^2} \frac{a}{4} \left[2\alpha + \frac{1}{15}(1-\nu) \right] = k_{10,9}$$

$$k_{10,10} = (k_{44})_{22} = \frac{4Eh^3}{12(1-\nu^2)a^2} \left[4(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{5}(14-4\nu) \right]$$

$$\alpha = \beta = 1$$

Uvođenjem zadanih broječnih vrijednosti rješenje sustava glasi

$$w_4 = 0,000214 \cdot F \cdot m$$

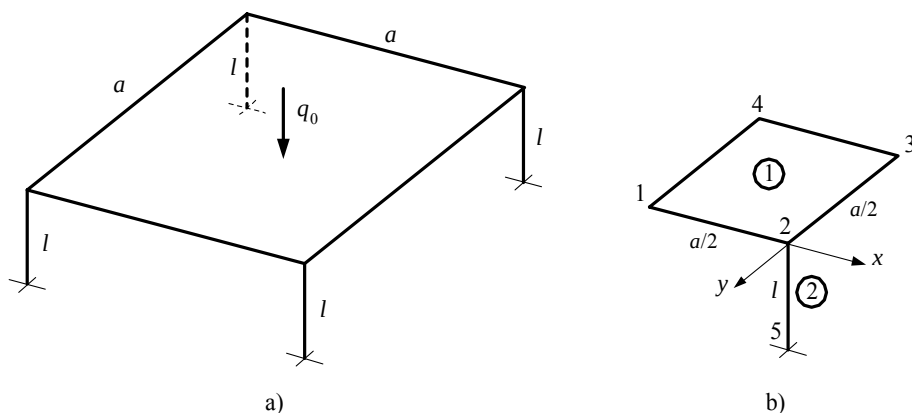
$$\psi_3 = 0,0003 \cdot F \cdot \text{rad}$$

PRIMJER 5.16.

Kvadratna ploča dimenzija $a \times a$ i debljine h kruto je spojena i oslonjena na 4 stupa i opterećena jednolikim opterećenjem prema slici 5.28.a. Odrediti deformacije ploče i stupova, te normalno naprezanje u stupovima. Pretpostaviti neizmjernu krutost stupova na savijanje.

Zbog dvoosne simetrije dovoljno je razmotriti 1/4 konstrukcije, te istu modelirati s jednim pločastim i jednim štapnim elementom prema slici 5.28.b.

Zadano: $a = 4 \text{ m}$, $l = 1 \text{ m}$, $h = 0,02 \text{ m}$, $q_0 = 2 \text{ kN/m}^2$, $EA = 24 \cdot 10^5 \text{ kN}$, $\nu = 0,3$



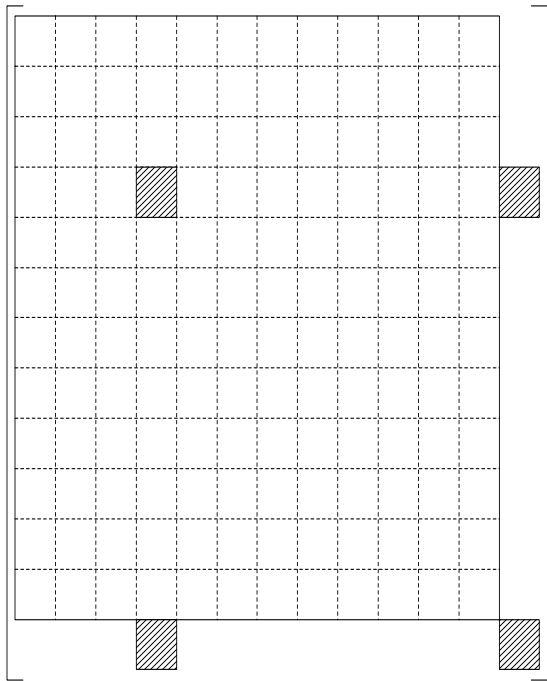
Slika 5.28. Primjer 5.16

Iz razloga simetrije $\psi_1 = \varphi_3 = 0$, $w_1 = w_3$, $\varphi_1 = -\psi_3$, $\varphi_4 = \psi_4 = 0$

Zbog krutosti stupa $\varphi_2 = \psi_2 = 0$

Na mjestu učvršćenja stupa $u_5 = 0$

Ako se gornji uvjeti uzmu u obzir, dobiva se slijedeća matrična jednačba sustava



$$\begin{Bmatrix} w_1 = w_3 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 = 0 \\ w_2 = u_2 \\ \varphi_2 = 0 \\ \psi_2 = 0 \\ w_3 \\ \varphi_3 = 0 \\ \psi_3 = \varphi_1 \\ w_4 \\ \varphi_4 = 0 \\ \psi_4 = 0 \\ u_5 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_1 = 0 \\ \Phi_1 = 0 \\ \Psi_1 \\ W_2 = 0 \\ \Phi_2 \\ \Psi_2 \\ W_3 = 0 \\ \Phi_3 \\ \Psi_3 = 0 \\ W_4 = 0 \\ \Phi_4 \\ \Psi_4 \\ N_5 \end{Bmatrix} - \left(-\frac{q_0 a^2}{96} \right) \begin{Bmatrix} 6 \\ a/2 \\ -a/2 \\ 6 \\ a/2 \\ a/2 \\ 6 \\ -a/2 \\ a/2 \\ 6 \\ -a/2 \\ -a/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

 element 2

Redukcijom gornje jednačbe dobiva se sustav jednačbi koji glasi

$$\begin{aligned}
 k_{21}w_3 + k_{22}\varphi_1 + k_{24}w_2 + k_{27}w_3 + k_{29}\varphi_1 + k_{2,10}w_4 &= \frac{qa^3}{192} \\
 k_{41}w_3 + k_{42}\varphi_1 + k_{44}w_2 + k_{47}w_3 + k_{49}\varphi_1 + k_{4,10}w_4 &= \frac{qa^2}{16} \\
 k_{71}w_3 + k_{72}\varphi_1 + k_{74}w_2 + k_{77}w_3 + k_{79}\varphi_1 + k_{7,10}w_4 &= \frac{qa^2}{16} \\
 k_{10,1}w_3 + k_{10,2}\varphi_1 + k_{10,4}w_2 + k_{10,7}w_3 + k_{10,9}\varphi_1 + k_{10,10}w_4 &= \frac{qa^2}{16}
 \end{aligned}$$

Svi koeficijenti uz nepoznanice elementi su matrice krutosti pločastog elementa 1 s istim indeksima, samo je $k_{44} = k_{44}^1 + k_{11}^2$. Oni se određuju iz odgovarajućih podmatrica $[k]_{11}, [k]_{12}, [k]_{22}$ prikazanih na strani 90. Pritom je

$$A = \frac{a^2}{4} = 4 \text{ m}^2 \quad \text{površina elementa 1}$$

$$\alpha = \beta = 1$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)A} = 38,5 \text{ kN/m}$$

Uvođenjem zadanih brojčanih vrijednosti reducirani sustav poprima oblik

$$\begin{array}{rclcl} 3,16w_3 + 6,08\varphi_1 - & 1,12w_2 - & 4,28w_4 = & \frac{2}{3D} \\ -9,12w_3 - 2,24\varphi_1 + (10,56 + 61689)w_2 - & 1,44w_4 = & \frac{2}{D} \\ 9,12w_3 - 6,6\varphi_1 - & 4,56w_2 - & 4,56w_4 = & \frac{2}{D} \\ -7,12w_3 + 0 \cdot \varphi_1 - & 1,44w_2 + 10,56w_4 = & \frac{2}{D} \end{array}$$

Rješenje sustava glasi

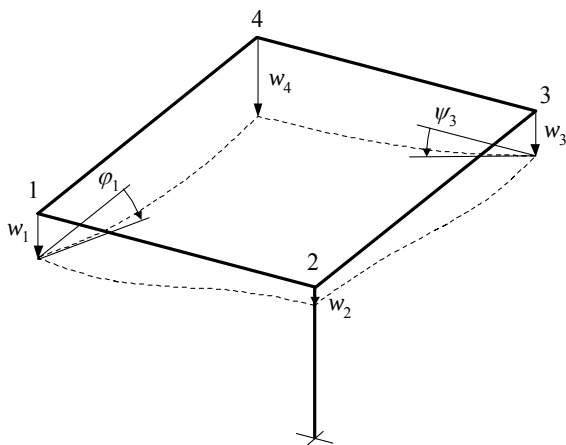
$$w_1 = w_3 = 18,3 \text{ mm}$$

$$w_2 = 0,0034 \text{ mm}$$

$$w_4 = 24 \text{ mm}$$

$$\varphi_1 = -\psi_3 = 0,006 \text{ rad}$$

Raspodjela deformacija na 1/4 konstrukcije prikazana je na slici 5.29.



Slika 5.29. Primjer 5.16

Izraz za normalno naprezanje u stupu glasi

$$\sigma = \frac{N_s}{A_s}$$

gdje je

$$A_s = 0,01131 \text{ m}^2 \quad \text{površina poprečnog presjeka stupa}$$

$$N_s \quad \text{poprečna sila u stupu}$$

Sila N_5 određuje se iz nereducirane jednačbe sustava

$$N_5 = k_{13,4} w_2 = 8,075 \text{ kN}$$

gdje je $k_{13,4} = -\frac{EA_s}{l} = -2375037 \text{ kN/m}$

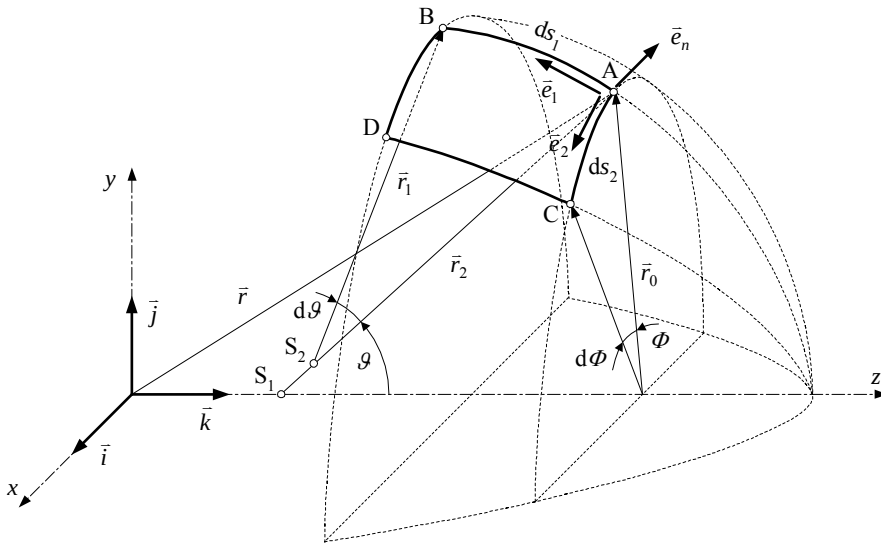
Normalno naprezanje u stupu iznosi

$$\sigma = 0,714 \text{ N/mm}^2$$

6. OSNOSIMETRIČNE LJUSKE I OKRUGLA PLOČA

6.1. Diferencijalni element osnosimetrične ljuske

Na slici 6.1 prikazan je diferencijalni element osnosimetrične ljuske /7/, koji je dobiven presjecanjem ljuske s dva para međusobno okomitih ravnina. Dvije uzdužne ravnine, međusobno postavljene pod kutem $d\phi$, prolaze kroz os rotacije (simetrije) z , a dvije poprečne ravnine su okomite na tu os.

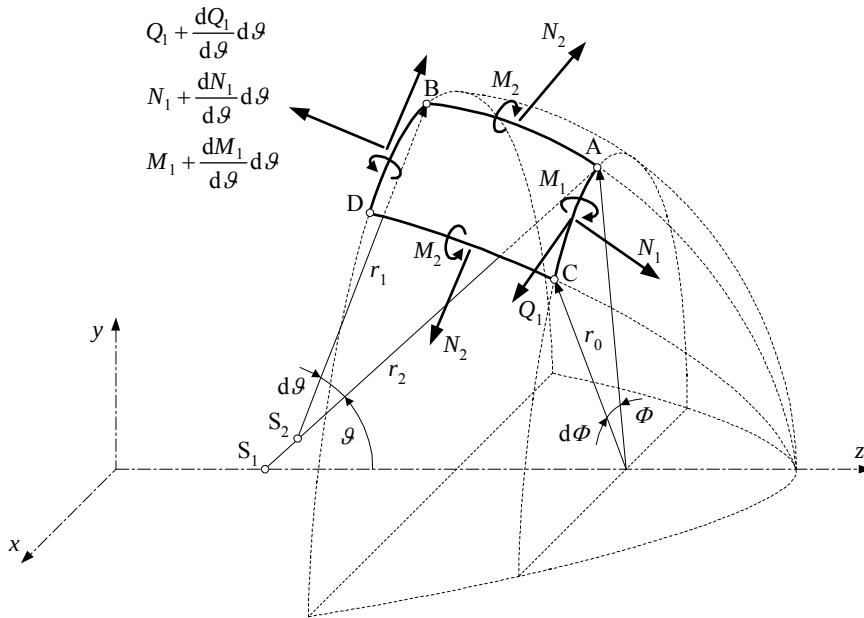


Slika 6.1 Diferencijalni element osnosimetrične ljuske, geometrijske značajke

Osnovne geometrijske značajke prikazanog elementa jesu

r_1, r_2	polumjeri meridijalne i cirkularne zakrivljenosti
$r_0 = r_2 \sin \vartheta$	projekcija polumjera r u poprečnoj ravnini
ϑ	kut između normale na površinu ljuske i osi simetrije z
z	os simetrije (rotacije) ljuske

Na slici 6.2 prikazan je diferencijalni element sa silama i momentima /7/ pozitivnog smjera djelovanja u skladu s izabranim koordinatnim sustavom prikazanim na slici 6.1.



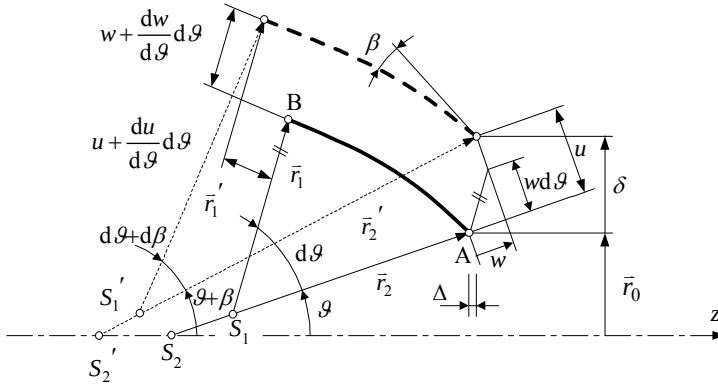
Slika 6.2 Diferencijalni element osnosimetrične ljuske, sile i momenti

Sile i momenti savijanja diferencijalnog elementa jesu

p	tlak
M_1, M_2	momenti savijanja u meridijalnom i cirkularnom smjeru
N_1, N_2	membranske sile u meridijalnom i cirkularnom smjeru
Q_1	poprečna sila
$Y = N_1 \cos \vartheta + Q_1 \sin \vartheta$	radijalna sila
$Z = N_1 \sin \vartheta - Q_1 \cos \vartheta$	osna sila

Sve sile i momenti izraženi su po jedinici duljine ljuske.

Na slici 6.3 prikazan je diferencijalni element s pomacima /7/ u pozitivnom smjeru.



Slika 6.3 Diferencijalni element osnosimetrične ljuske, pomaci

Pomaci ljuske jesu

u	meridijalni pomak
w	normalni pomak
$\delta = u \cos \vartheta - w \sin \vartheta$	radijalni pomak
$\Delta = w \cos \vartheta - u \sin \vartheta$	osni pomak
$\beta = \frac{1}{r_1} \left(u - \frac{dw}{d\vartheta} \right)$	kut savijanja u meridijalnoj ravnini

6.2. Diferencijalna jednadžba osnosimetrične ljuske

Postavljanjem jednadžbi ravnoteže sila i kompatibilnosti pomaka za dane značajke diferencijalnog elementa te koristeći jednadžbe teorije elastičnosti, dobiva se **kompleksna nehomogena linearna diferencijalna jednadžba** drugog reda s promjenjivim koeficijentima u obliku /7/

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2 W}{d\vartheta^2} + \left(\frac{d\rho}{d\vartheta} + \rho \operatorname{ctg} \vartheta \right) \frac{dW}{d\vartheta} - \left(i\lambda + 1 + \frac{1}{\rho} \operatorname{ctg}^2 \vartheta \right) W = \\ = 2pr_2^2 \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \operatorname{ctg} \vartheta + \left(\frac{pr_2^2}{2} + \frac{C'}{\sin^2 \vartheta} \right) \left[\frac{d\rho}{d\vartheta} + \left(\frac{1}{\rho} - \rho \right) \operatorname{ctg} \vartheta \right] \end{aligned} \quad (6.1)$$

gdje je

$$\rho = \frac{r_2}{r_1} \quad \lambda = \frac{cr_1}{h} \quad c = \sqrt{12(1-\nu^2)} \quad W = r_2 Q_1 + i \frac{Eh^2}{c} \beta$$

Iz rješenja ove jednadžbe proizlaze izrazi za sile i pomake, koji se sastoje iz **savojnog** i **membranskog** dijela, što u općem obliku ima izgled

$$A = A^* + A^\circ \quad \text{gdje je} \quad A^* = f(U_i, V_i), \quad A^\circ = f(p)$$

Prema tome, dobivamo /7/

$$\begin{aligned}
 N_1 &= -\sqrt{\frac{h}{2cr_2}} \operatorname{ctg} \vartheta (-A_1 U_4 + A_2 U_3 + A_3 V_3 - A_4 V_4) + \frac{pr_2}{2} + \frac{C'}{r_2 \sin^2 \vartheta} \\
 N_2 &= (A_1 U_1 + A_2 U_2 + A_3 V_2 - A_4 V_1) + \frac{pr_2}{2} \left(2 - \frac{r_2}{r_1} \right) - \frac{C'}{r_1 \sin^2 \vartheta} \\
 M_1 &= -\frac{h}{c} (-A_1 U_2 + A_2 U_2 + A_3 V_2 + A_4 V_1) \\
 M_2 &= \nu M_1 \\
 Y &= -\sqrt{\frac{h}{2cr_2}} \frac{1}{\sin \vartheta} (-A_1 U_4 + A_2 U_3 + A_3 V_3 - A_4 V_4) + \frac{pr_2}{2} \cos \vartheta + \frac{C'}{r_2 \sin^2 \vartheta} \cos \vartheta \\
 Z &= \frac{pr_2}{2} \sin \vartheta + \frac{C'}{r_2 \sin \vartheta} \\
 \delta &= \frac{r_2}{Eh} \sin \vartheta (A_1 U_1 + A_2 U_2 + A_3 V_1 - A_4 V_2) + \frac{pr_2^2}{2Eh} \left(2 - \nu - \frac{r_2}{r_1} \right) \sin \vartheta - \frac{C'}{Eh \sin \vartheta} \left(\nu + \frac{r_2}{r_1} \right) \\
 \Delta &= -\int r_1 (\beta \cos \vartheta + \varepsilon_1 \sin \vartheta) d\vartheta \\
 \beta &= -\frac{1}{Eh} \sqrt{\frac{cr_2}{2h}} (A_1 U_3 + A_2 U_4 - A_3 V_4 - A_4 V_3) - \frac{1}{Eh} \frac{r_2}{r_1} \frac{d}{d\vartheta} (N_1^\circ + N_2^\circ)
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

U izrazima (6.2) pojavljuju se konstante integracije A_1 do A_4 i C' , te trigonometrijsko-eksponencijalne funkcije

$$\begin{aligned}
 U_1 &= e^\alpha \cos \alpha & V_1 &= e^{-\alpha} \cos \alpha \\
 U_2 &= e^\alpha \sin \alpha & V_2 &= e^{-\alpha} \sin \alpha \\
 U_3 &= U_1 - U_2 & V_3 &= V_1 - V_2 \\
 U_4 &= U_1 + U_2 & V_4 &= V_1 + V_2
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

koje za $\alpha = 0$ poprimaju vrijednost: $U_i = V_i = \begin{cases} 1 & \text{za } i \neq 2 \\ 0 & \text{za } i = 2 \end{cases}$

Argument α ovisi o geometrijskim značajkama pojedinih tipova ljsaka.

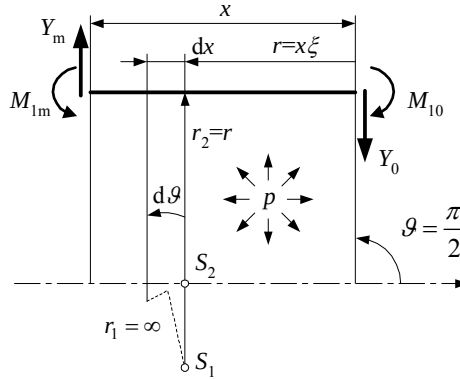
Konstante integracije se određuju iz rubnih uvjeta. Pritom se u praktičkim proračunima, u slučaju dugih ljsaka, postupak za njihovo određivanje može pojednostavniti upotrebom **načela o zanemarenju međusobnog utjecaja rubova**. Naime, utjecaj ruba se u stijenci ljske prigušuje udaljavanjem od ruba. Taj utjecaj je u izrazima (6.2) izražen sa svojinim dijelom, tj. s funkcijama U i V , te se njegovo prigušenje može izraziti samo s funkcijama koje u sebi sadrže prigušni faktor $e^{-\alpha}$. Preostale funkcije s faktorom pojačanja e^α se izostavljaju na način, da se njima pridružene konstante integracije izjednače s nulom. O tome, da li će to biti funkcije U ili V , to ovisi o predznaku argumenta.

Konstanta C' se određuje na osnovi rubnih uvjeta u aksijalnom smjeru. Za statički određeno oslanjanje $C'=0$.

Izrazi (6.2) vrijede za slučaj opterećenja u obliku konstantnog tlaka p koji je pozitivan, kada djeluje iznutra.

6.3. Cilindrična ljska

Jedan segment cilindrične ljske prikazan je na slici 6.4.



Slika 6.4 Cilindrična ljska

Geometrijske značajke cilindrične ljske jesu

$$r_1 = \infty$$

$$r_2 = r = \text{const.}$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}$$

$$\xi = \frac{x}{r}$$

Argument $\alpha = \sqrt{\frac{cr}{2h}} \xi$ (uvijek pozitivan)

Sile i pomaci cilindrične ljske slijede iz jednadžbi (6.2)

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{pr}{2} \\ N_2 &= (A_1 U_1 + A_2 U_2 + A_3 V_1 - A_4 V_2) + pr \\ M_1 &= -\frac{h}{c} (-A_1 U_2 + A_2 U_1 + A_3 V_2 + A_4 V_1) \\ M_2 &= \nu M_1 \\ Y &= -\sqrt{\frac{h}{2cr}} (-A_1 U_4 + A_2 U_3 + A_3 V_3 - A_4 V_4) \\ \delta &= \frac{r}{Eh} (A_1 U_1 + A_2 U_2 + A_3 V_1 - A_4 V_2) + \frac{pr^2}{Eh} \left(1 - \frac{1}{2} \nu \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\Delta = -\frac{\nu}{Eh} \sqrt{\frac{rh}{2c}} (-A_1 U_4 + A_2 U_3 + A_3 V_3 - A_4 V_4) - \frac{1}{Eh} \left[\frac{pr^2}{2} (1 - 2\nu) \xi \right]$$

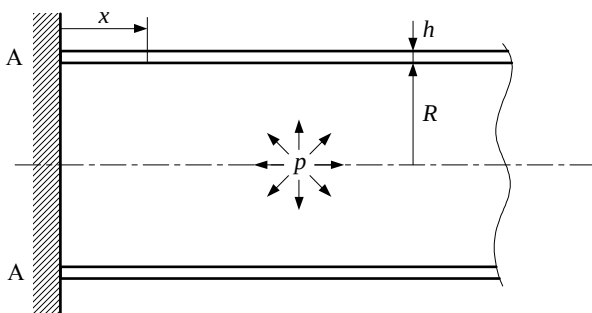
$$\beta = -\frac{1}{Eh} \sqrt{\frac{cr}{2h}} (A_1 U_3 + A_2 U_4 - A_3 V_4 - A_4 V_3)$$

Izrazi (6.4) vrijede za slučaj opterećenja u obliku konstantnog tlaka p koji je pozitivan, kada djeluje iznutra.

PRIMJER 6.1.

Cijev polumjera R i debljine stijenke h učvršćena je na jednom kraju i opterećena iznutra tlakom p prema slici 6.5. Odrediti raspodjelu pomaka i sila u stijenci cijevi u okolini spoja s krutim zidom.

Zadano: $R = 0,1 \text{ m}$, $h = 0,001 \text{ m}$, $p = 100 \text{ kPa}$, $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,3$



Slika 6.5 Primjer 6.1

Zadana cijev se može smatrati polubeskonačnom cilindričnom ljuskom s rubom **A**. Za nju će se odrediti raspodjela δ , β , M i Y pomoću izraza (6.4). Pritom će se koristiti princip zanemarenja utjecaja ruba **A**, te će se iz navedenih izraza odstraniti funkcije U ($\alpha > 0$) postavljanjem uvjeta $A_1 = A_2 = 0$. Dakle, kao nepoznanice preostaju konstante A_3 i A_4 koje se određuju iz rubnih uvjeta na rubu **A**

$$\alpha_A = 0 \quad (x=0) \quad \delta_A = 0 \quad \beta_A = 0$$

što daje dvije jednačbe

$$\frac{R}{Eh} A_3 + \frac{pR^2}{Eh} \left(1 - \frac{1}{2} \nu \right) = 0$$

$$-A_3 - A_4 = 0$$

Rješenje glasi: $A_3 = -pR \left(1 - \frac{1}{2} \nu \right) = -8,5 \text{ kN/m}$ $A_4 = 8,5 \text{ kN/m}$

Tražene veličine iznose

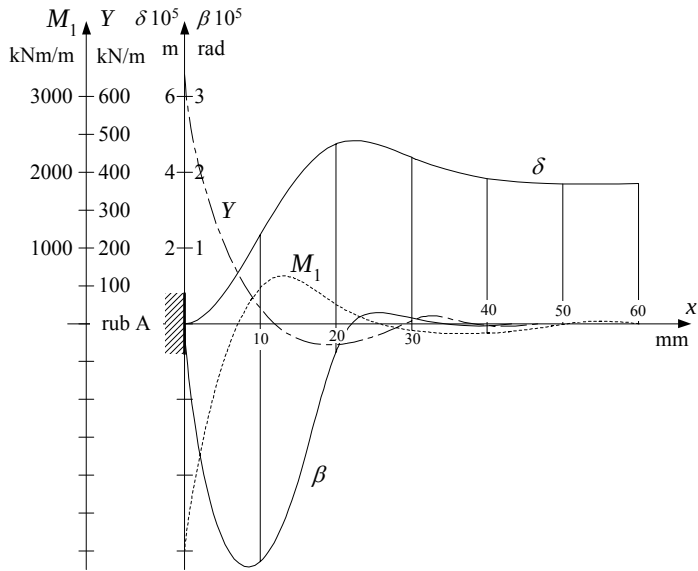
$$\delta = -0,0000004V_1(\alpha) + 0,0000004V_2(\alpha) + 0,0000004$$

$$\beta = -0,000016V_4(\alpha) + 0,000016V_3(\alpha)$$

$$M = 0,0258V_2(\alpha) - 0,0258V_1(\alpha)$$

$$Y = 1,046V_3(\alpha) - 1,046V_4(\alpha)$$

Njihova raspodjela u blizini ruba A prikazana je na slici 6.6

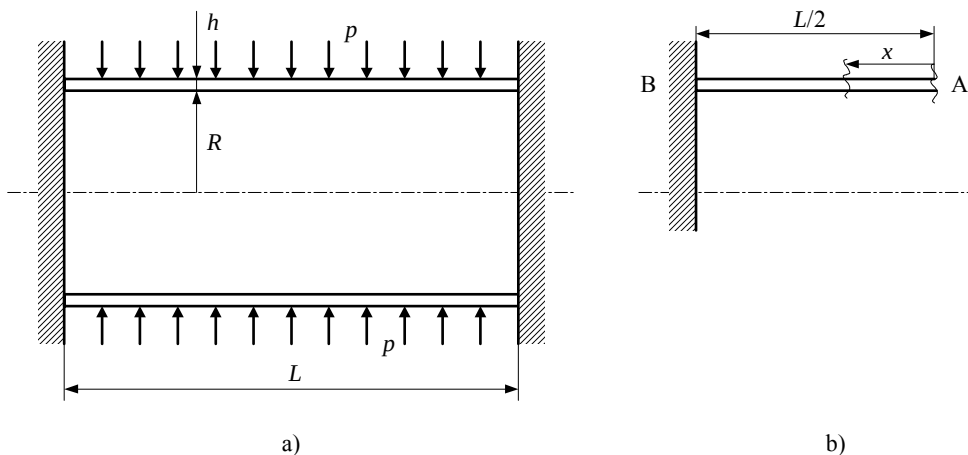


Slika 6.6 Primjer 6.1

PRIMJER 6.2.

Cijev polumjera R , duljine L i debljine stijenke h učvršćena je na oba kraja za kruti zid i opterećena izvana tlakom p prema slici 6.7.a. Odrediti radijalni pomak δ na sredini raspona cijevi.

Zadano: $R = 0,1 \text{ m}$, $L = 2 \text{ m}$, $h = 0,02 \text{ m}$, $p = 200 \text{ kPa}$, $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,3$



Slika 6.7 Primjer 6.2

Zbog simetričnosti problema dovoljno je razmatrati 1/2 cijevi s dva ruba **A** i **B**, te s koordinatnim sustavom prema slici 6.7.b.

U slučaju kada se **međusobni utjecaj rubova A i B uzima u obzir**, tada se u izrazu (6.4) za δ zadržavaju sve konstante A_i i one se određuju iz rubnih uvjeta na ovim rubovima.

<u>Rub A</u>	$x = 0 \quad (\alpha_A = 0)$	$\beta_A = 0$
		$\Delta_A = 0$
<u>Rub B</u>	$x = L/2 \quad (\alpha_B = 9,09 \text{ rad})$	$\delta_B = 0$
		$\beta_B = 0$

što daje jednadžbe

$$A_1 + A_2 - A_3 - A_4 = 0$$

$$-A_1 + A_2 + A_3 - A_4 = 0$$

$$\frac{R}{Eh} [A_1 U_1(\alpha_B) + A_2 U_2(\alpha_B) + A_3 V_1(\alpha_B) - A_4 V_2(\alpha_B)] - \frac{pR^2}{Eh} \left(1 - \frac{1}{2}\nu\right) = 0$$

$$A_1 U_3(\alpha_B) + A_2 U_4(\alpha_B) - A_3 V_4(\alpha_B) - A_4 V_3(\alpha_B) = 0$$

Rješenje ovog sustava glasi

$$A_1 = A_3 = 20,343 \text{ kN/m}$$

$$A_2 = A_4 = -31,278 \text{ kN/m}$$

Radijalni pomak δ na rubu A iznosi

$$\delta_A = \frac{R}{Eh} (A_1 + A_3) - \frac{pR^2}{Eh} \left(1 - \frac{1}{2} \nu \right) = -0,04 \text{ mm}$$

Isti primjer može se riješiti na jednostavniji način, **primjenom načela o zanemarenju međusobnog utjecaja ruba A na rub B**. U tom slučaju se razmatra samo rub A, a u izrazu (6.4) za δ su $A_1 = A_2 = 0$. Za određivanje konstanti A_3 i A_4 upotrijebit će se već ranije postavljeni rubni uvjeti za rub A ($\alpha_A = 0$, $\beta_A = 0$, $\Delta_A = 0$), što daje jednadžbe

$$-A_3 - A_4 = 0$$

$$A_3 - A_4 = 0$$

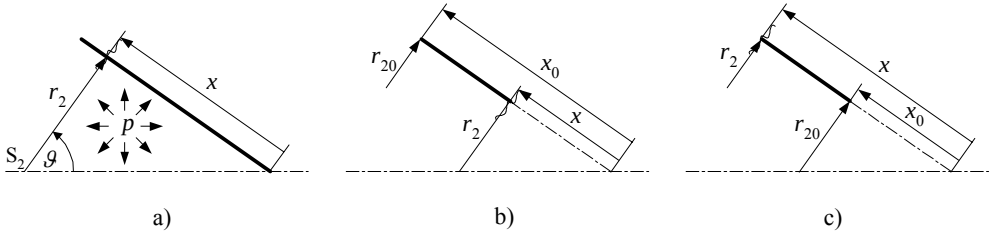
Rješenje ovog sustava je trivijalno, tj. $A_3 = A_4 = 0$, te pomak poprima oblik

$$\delta = -\frac{pR^2}{Eh} \left(1 - \frac{1}{2} \nu \right) = -0,0405 \text{ mm}$$

Ovaj rezultat je praktički isti kao i u slučaju kada je međusobni utjecaj rubova uzet u obzir. To znači, da je sredina raspona cijevi (rub A) toliko udaljena od zida (rub B), da su utjecaji savijanja od zida u potpunosti prigušeni, te su u stijenci cijevi preostali samo membranski efekti.

6.4. Konusna ljuska

Jedan segment konusne ljuske prikazan je na slici 6.8.a.



Slika 6.8 Konusna ljuska

Geometrijske značajke konusne ljuske

$$r_1 = \infty$$

$$g = \text{const.}$$

$$r_0 = x \text{ctg } g$$

$$\text{Argument} \quad \alpha = 2\sqrt{\frac{c}{2h}} \text{tg } g (\sqrt{r_2} - \sqrt{r_{20}})$$

Vrijednost argumenta α ovisi o položaju promatranog ruba konusne ljuske. U slučaju **donjeg ruba**, slika 6.8.c, argument α je pozitivan ($x > x_0$), a u slučaju **gornjeg ruba**, slika 6.8.b, argument α je negativan ($x < x_0$).

Izrazi za sile i pomake konusne ljuske slijede iz jednažbi (6.2)

$$\begin{aligned}
 N_1 &= -\sqrt{\frac{h}{2cr_2}} \operatorname{ctg} \vartheta (-A_1 U_4 + A_2 U_3 + A_3 V_3 - A_4 V_4) + \frac{pr_2}{2} \\
 N_2 &= (A_1 U_1 + A_2 U_2 + A_3 V_1 - A_4 V_2) + pr_2 \\
 M_1 &= -\frac{h}{c} (-A_1 U_2 + A_2 U_1 + A_3 V_2 + A_4 V_1) \\
 M_2 &= \nu M_1 \\
 Y &= -\sqrt{\frac{h}{2cr_2}} \frac{1}{\sin \vartheta} (-A_1 U_4 + A_2 U_3 + A_3 V_3 - A_4 V_4) + \frac{pr_2}{2} \sin \vartheta \\
 Z &= \frac{pr_2}{2} \sin \vartheta \\
 \delta &= \frac{r_2}{Eh} \sin \vartheta (A_1 U_1 + A_2 U_2 + A_3 V_1 - A_4 V_2) + \frac{pr_2}{2Eh} (2 - \nu) \sin \vartheta \\
 \beta &= -\frac{1}{Eh} \sqrt{\frac{cr_2}{2h}} (A_1 U_3 + A_2 U_4 - A_3 V_4 - A_4 V_3) - \frac{3}{2} \frac{pr_2}{Eh} \operatorname{ctg} \vartheta
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

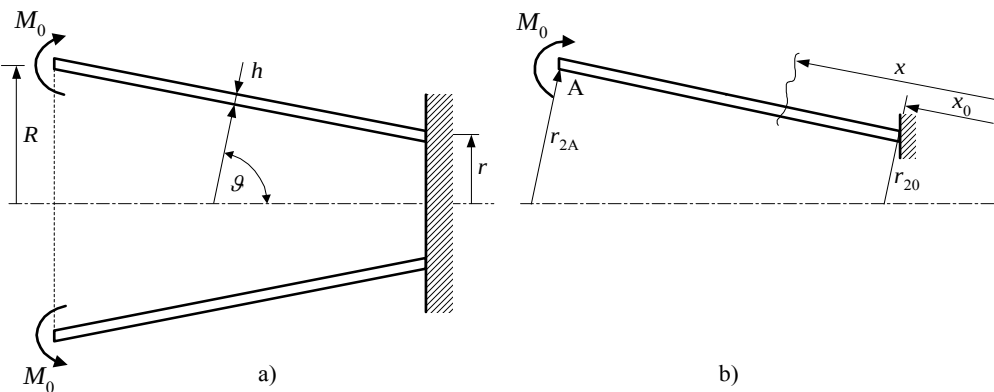
Izrazi (6.5) vrijede za slučaj opterećenja u obliku konstantnog tlaka p , koji je pozitivan, kada djeluje iznutra, te za ljuske s kutem $45^\circ \leq \vartheta < 90^\circ$.

PRIMJER 6.3.

Konusna ljuska na užem je kraju učvršćena za zid, a na širem, slobodnom kraju opterećena je momentom savijanja M_0 prema slici 6.9.a. Odrediti radijalni pomak δ na slobodnom kraju konusa, te raspodjelu M , Y i δ u njegovoj okolini.

Zadano: $r = 0,5 \text{ m}$, $R = 1 \text{ m}$, $h = 0,01 \text{ m}$, $\vartheta = 60^\circ$, $M_0 = 0,1 \text{ kNm/m}$,

$$E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2, \nu = 0,3$$



Slika 6.9 Primjer 6.3

Obzirom da je ljuska opterećena momentom na svom rubu, čije djelovanje se prenosi na čitavu ljusku, ovdje se **ne može** primijeniti princip zanemarenja utjecaja rubova. Stoga se u izrazima (6.5) moraju odrediti sve konstante A_i . Argument α je definiran prema koordinatnom sustavu na slici 6.9.b. Za određivanje konstanti A_i postavljaju se rubni uvjeti

$$\alpha_0 = 0$$

$$\delta = 0$$

$$\beta = 0$$

$$\alpha_A = 2\sqrt{\frac{c \sin \vartheta}{2h}} \frac{1}{\cos \vartheta} (\sqrt{R} - \sqrt{r}) = 14 \text{ rad} \quad M_1 = -M_0$$

$$Y = 0$$

iz kojih slijede jednadžbe

$$\frac{r_{20}}{Eh} \sin \vartheta (A_1 + A_3) = 0$$

$$-\frac{1}{Eh} \sqrt{\frac{cr_{20}}{2h}} (A_1 + A_2 - A_3 - A_4) = 0$$

$$-\frac{h}{c} [-A_1 U_2(\alpha_A) + A_2 U_1(\alpha_A) + A_3 V_2(\alpha_A) + A_4 V_1(\alpha_A)] = -M_0$$

$$-\sqrt{\frac{h}{2cr_{2A}}} \frac{1}{\sin \vartheta} [-A_1 U_4(\alpha_A) + A_2 U_3(\alpha_A) + A_3 V_3(\alpha_A) - A_4 V_4(\alpha_A)] = 0$$

Rješenje ovog sustava glasi

$$A_1 = -0,000027 \text{ kN/m}$$

$$A_2 = 0,000036 \text{ kN/m}$$

$$A_3 = 0,000027 \text{ kN/m}$$

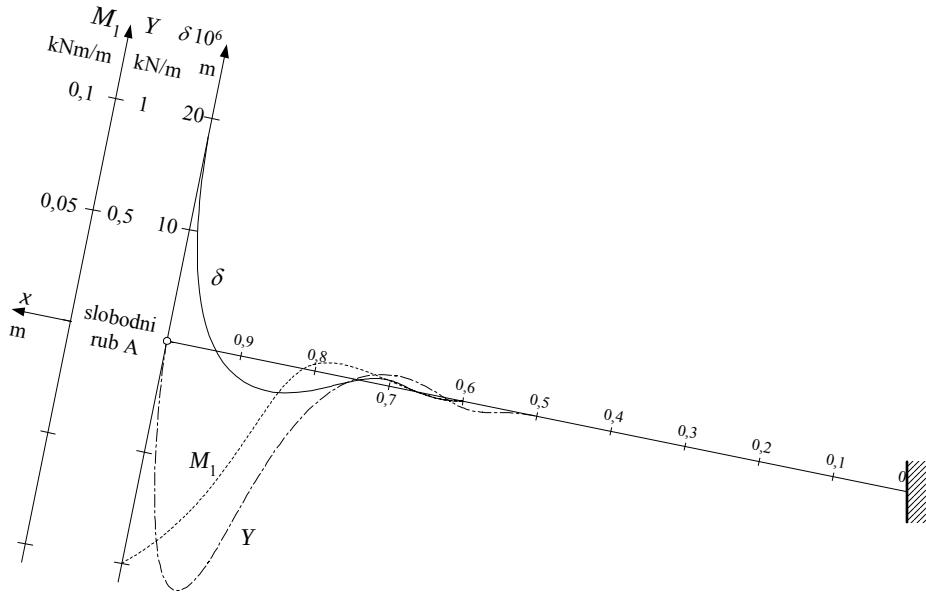
$$A_4 = -0,000018 \text{ kN/m}$$

Uvođenjem ovih vrijednosti u izraze (6.5) mogu se odrediti tražene veličine u bilo kojem presjeku stijenke ljuske.

Radijalni pomak δ_A na slobodnom kraju ljuske iznosi

$$\delta_A = 0,000018 \text{ m}$$

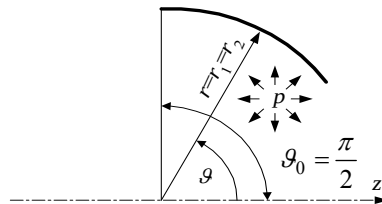
Raspodjela traženih veličina δ , M_1 i Y u okolini slobodnog kraja ljske prikazana je na slici 6.10.



Slika 6.10 Primjer 6.3

6.5. Sferna ljska

Jedan segment sferne ljske sa svojim značajkama prikazan je na slici 6.11.



Slika 6.11 Sferna ljska

Geometrijske značajke sferne ljske

$$r_1 = r_2 = \text{const.} \quad \text{argument } \alpha = \sqrt{\frac{cr}{2h}} (\vartheta - \vartheta_0)$$

U okviru ove knjige analiziraju se sferne ljuske u okolini $\vartheta = \pi/2$ (visoke ljuske) tako, da se redovito uzima $\vartheta_0 = \pi/2$ što znači, da je $\vartheta < \vartheta_0$ i $\alpha < 0$.

Izrazi za sile i pomake sferne ljuske slijede iz jednadžbi (6.2)

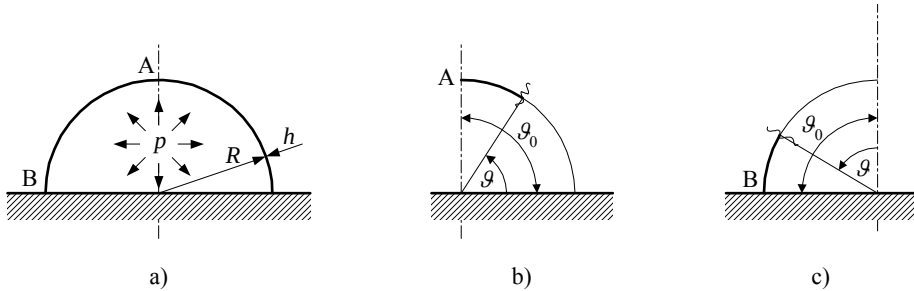
$$\begin{aligned}
 N_1 &= -\sqrt{\frac{h}{2cr}} \operatorname{ctg} \vartheta (-A_1 U_4 + A_2 U_3 + A_3 V_3 - A_4 V_4) + \frac{pr}{2} \\
 N_2 &= (A_1 U_1 + A_2 U_2 + A_3 V_1 - A_4 V_2) + \frac{pr}{2} \\
 M_1 &= -\frac{h}{c} (-A_1 U_2 + A_2 U_1 + A_3 V_2 + A_4 V_1) \\
 M_2 &= \nu M_1 \\
 Y &= -\sqrt{\frac{h}{2cr}} \frac{1}{\sin \vartheta} (-A_1 U_4 + A_2 U_3 + A_3 V_3 - A_4 V_4) + \frac{pr}{2} \cos \vartheta \\
 Z &= \frac{pr}{2} \sin \vartheta \\
 \delta &= \frac{r}{Eh} \sin \vartheta (A_1 U_1 + A_2 U_2 + A_3 V_1 - A_4 V_2) + \frac{pr}{2Eh} (1 - \nu) \sin \vartheta \\
 \beta &= -\frac{1}{Eh} \sqrt{\frac{cr}{2h}} (A_1 U_3 + A_2 U_4 - A_3 V_4 - A_4 V_3)
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Izrazi (6.6) vrijede za slučaj opterećenja u obliku konstantnog tlaka p , koji je pozitivan, kada djeluje iznutra.

PRIMJER 6.4.

Spremnik u obliku polusfere polumjera R i debljine stijenke h opterećen je iznutra tlakom p prema slici 6.12.a. Odrediti radijalni pomak δ vrha spremnika A, meridijalno naprezanje σ_1 u vrhu A i u spoju B spremnika s podlogom, te raspodjelu δ i M_1 u okolini spoja B.

Zadano: $R = 2,5 \text{ m}$, $h = 0,02 \text{ m}$, $p = 500 \text{ kPa}$, $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,3$



Slika 6.12 Primjer 6.4

U ovom primjeru se razmatra sferna ljuska s dva ruba A i B. Svaki od rubova i njegova okolina mogu se analizirati zasebno prema slikama 6.12.b i 6.12.c uz primjenu načela o zanemarenju međusobnog utjecaja rubova.

Rub A

Primjenom spomenutog načela i zbog $\alpha < 0$ isključuju se iz izraza (6.6) funkcije V_i , što znači da su konstante $A_3 = A_4 = 0$, te kao nepoznanice preostaju konstante A_1 i A_2 . Za njihovo rješavanje upotrijebiti će se slijedeći rubni uvjeti (uvjeti simetrije)

$$\begin{aligned}\alpha_A &= 0 & \beta_A &= 0 \\ Y_A &= 0\end{aligned}$$

iz čega slijede jednačbe

$$\begin{aligned}-\frac{1}{Eh} \sqrt{\frac{cR}{2h}} (A_1 + A_2) &= 0 \\ -\sqrt{\frac{h}{2cR}} \frac{1}{\sin \vartheta} (-A_1 + A_2) + \frac{pR}{2} \cos \frac{\pi}{2} &= 0\end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je trivijalno, tj. $A_1 = A_2 = 0$

To znači da vrh A spremnika u stvarnosti nije rub, tako da u toj točki nema efekta savijanja, već postoje samo membranski efekti.

Radijalni pomak vrha A

$$\delta_A = \frac{pR^2}{2Eh} (1 - \nu) \sin \frac{\pi}{2} = 0,26 \text{ m}$$

Naprezanje u vrhu A

$$\sigma_{1A} = \frac{N_1}{h} = 31,25 \text{ N/mm}^2 \quad \text{gdje je} \quad N_1 = \frac{pR}{2} = 625 \text{ kN/m}$$

Rub B

I ovdje, primjenom principa zanemarenja utjecaja rubova i zbog $\alpha < 0$ vrijedi uvjet $A_3 = A_4 = 0$. Nepoznate konstante A_1 i A_2 određuju se iz slijedećih rubnih uvjeta

$$\begin{aligned}\alpha_B &= 0 & \delta_B &= 0 \\ \beta_B &= 0\end{aligned}$$

Dobivaju se jednačbe

$$\begin{aligned}\frac{R}{Eh} \sin \frac{\pi}{2} A_1 + \frac{pR^2}{2Eh} (1 - \nu) \sin \frac{\pi}{2} &= 0 \\ -\frac{1}{Eh} \sqrt{\frac{cR}{2h}} (A_1 + A_2) &= 0\end{aligned}$$

s rješenjem

$$A_1 = -1250 \text{ kN/m} \quad A_2 = -A_1 = 1250 \text{ kN/m}$$

Naprezanje u točki **B**

$$\sigma_{1B} = \frac{N_1}{h} \pm \frac{6M_1}{h^2} = 62,5 \pm 113,5 \text{ MPa}$$

gdje je

$$N_1 = -\sqrt{\frac{h}{2cR}} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} (-A_1 + A_2) + \frac{pR}{2} = 1250 \text{ kN/m}$$

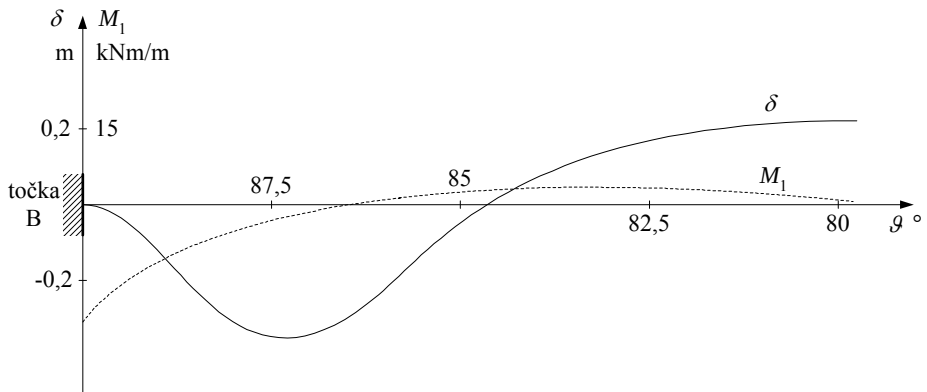
$$M_1 = -A_2 \frac{h}{c} = -7,56 \text{ kNm/m}$$

Raspodjela radijalnog pomaka δ i momenta M_1 u okolini točke B dana je izrazima

$$\delta = \frac{R}{Eh} \sin \vartheta (A_1 U_1 + A_2 U_2) + \frac{pR^2}{2Eh} (1 - \nu) \sin \vartheta$$

$$M_1 = -\frac{h}{c} (-A_1 U_2 + A_2 U_1)$$

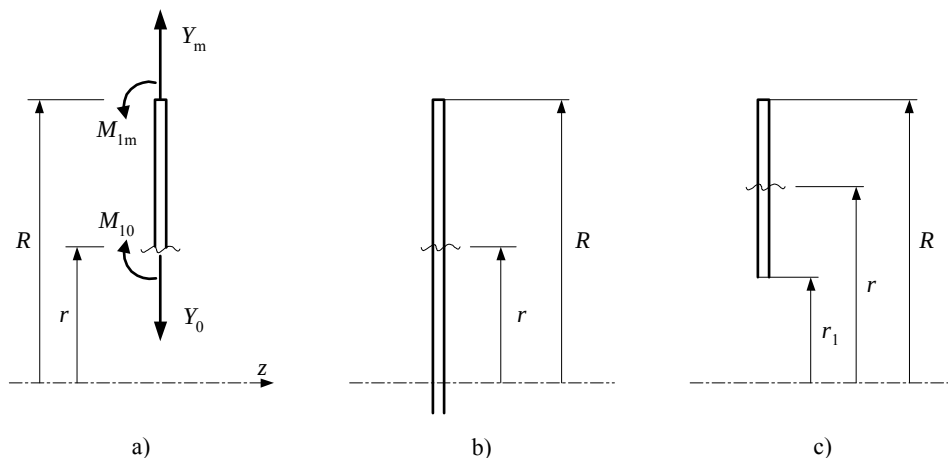
i prikazana je na slici 6.13.



Slika 6.13 Primjer 6.4

6.6. Okrugla ploča

Jedan segment okrugle ploče sa svojim značajkama prikazan je na slici 6.14.



Slika 6.14 Okrugla ploča

Geometrijske značajke okrugle ploče

$$r_{\min} = \begin{cases} 0 & \leftarrow \text{bez otvora} \\ r_1 & \leftarrow \text{sa otvorom} \end{cases}$$

$$r_{\max} = R$$

$$\xi = \frac{r}{R}$$

$$\vartheta = 0^\circ$$

Izrazi za sile i pomake okrugle ploče glase /7/

$$N_1 = Y = \frac{A_1}{R} + \frac{A_3}{R} \frac{1}{\xi^2}$$

$$N_2 = \frac{A_1}{R} - \frac{A_3}{R} \frac{1}{\xi^2}$$

$$M_1 = \frac{h}{cR} \left[(1 + \nu)A_2 - (1 - \nu)A_4 \frac{1}{\xi^2} \right] - \frac{pR^2}{16} (3 + \nu)\xi^2 - \frac{C'}{2} [(1 + \nu)\ln \xi + 1]$$

$$M_2 = \nu M_1$$

$$Z = \frac{pR}{2} \xi + \frac{C'}{R\xi} \quad (6.7)$$

$$\delta = \frac{\xi}{Eh} \left[(1 - \nu)A_1 - (1 + \nu)A_3 \frac{1}{\xi^2} \right]$$

$$\Delta = w = -\frac{cR}{Eh^2} \left[A_2 \frac{\xi^2}{2} + A_4 \ln \xi \right] + \frac{c^2}{Eh^3} \left[\frac{pR^4}{64} \xi^4 - \frac{R^2 C'}{8} \xi^2 (2 \ln \xi - 1) \right] + C''$$

$$\beta = \frac{c}{Eh^2} \left(A_2 \xi + A_4 \frac{1}{\xi} \right) - \frac{c^2}{Eh^3} \left(\frac{pR^3}{16} \xi^3 + \frac{RC'}{2} \xi \ln \xi \right)$$

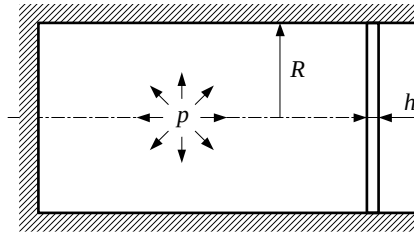
Razlikujemo punu ploču i ploču sa središnjim otvorom. U slučaju **pune ploče**, slika 6.14.b, bezdimenzionalna koordinata ξ poprima sve vrijednosti od 0 do 1. Stoga treba iz izraza (6.7) isključiti sve članove koji sadrže $\ln \xi$ i $1/\xi^2$. To se postiže uvjetom $A_4 = C' = 0$. U slučaju **ploče s otvorom** vrijednost od ξ se kreće od r_1/R do 1.

U nekim slučajevima može se analiza ploče pojednostavniti tako, da se zanemare ili membranski efekti ili efekti savijanja. U slučaju **zanemarenja membranskih efekata** otpadaju membranske veličine (N_1, N_2, δ) što se postiže uvjetom $A_1 = A_3 = 0$, a u slučaju **zanemarenja efekta savijanja** otpadaju veličine savijanja $(M_1, M_2, \Delta, \beta)$ što se postiže uvjetom $A_2 = A_4 = C' = C'' = 0$.

PRIMJER 6.5.

Okrugla ploča polumjera R i debljine stijenke h , opterećena je s jedne strane tlakom p prema slici 6.15. Odrediti raspodjelu progiba w , kuta savijanja β i momenta savijanja M_1 u radijalnom smjeru ploče.

Zadano: $R = 1 \text{ m}$, $h = 0,015 \text{ m}$, $p = 500 \text{ kPa}$, $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,3$



Slika 6.15 Primjer 6.5

Zbog prirode opterećenja mogu se u ploči zanemariti membranski efekti. Kako se radi o punoj ploči, to su u izrazima (6.7) konstante $A_1 = A_3 = A_4 = C' = 0$. Ostaju kao nepoznanice A_2 i C'' . Za njihovo određivanje postavljaju se sljedeći rubni uvjeti

$$\begin{aligned} \xi = 1 \quad \Delta &= 0 \\ \beta &= 0 \end{aligned}$$

iz čega slijede jednačbe

$$-\frac{cR}{Eh} \frac{1}{2} + \frac{c^2}{Eh^3} \frac{pR^4}{64} + C'' = 0$$

$$\frac{c}{Eh^2} A_2 - \frac{c^2}{Eh^3} \frac{pR^3}{16} = 0$$

Rješenje ovih jednačbi glasi

$$A_2 = 6875000 \text{ kN} \quad C'' = 0,12 \text{ m}$$

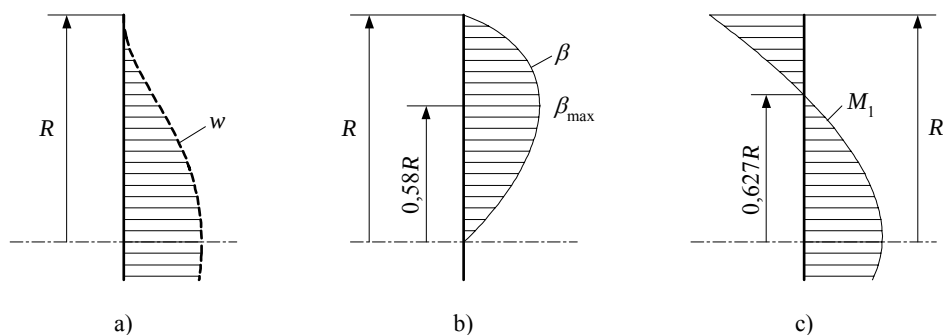
Konačni izrazi za radijalnu raspodjelu traženih veličina

$$w = -0,24\xi^2 + 0,12\xi^4 + 0,12$$

$$\beta = 0,48\xi - 0,48\xi^2$$

$$M_1 = 40,625 - 103,125\xi^2$$

Raspodjela ovih veličina je prikazana na slici 6.16.a, b i c.



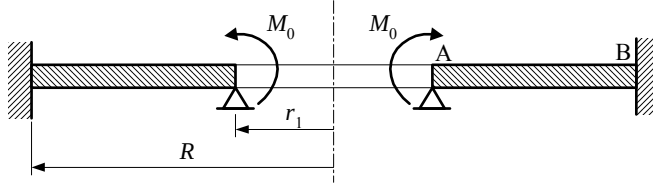
Slika 6.16 Primjer 6.5

Progib u sredini	$w = 0,12 \text{ m}$
Kut savijanja u sredini	$\beta = 0$
Najveći kut savijanja (na $0,577R$)	$\beta_{\max} = 0,185 \text{ rad}$
Moment savijanja u sredini	$M_1 = 40,625 \text{ kNm/m}$
Moment savijanja u uklještenju	$M_1 = -62,5 \text{ kNm/m}$

PRIMJER 6.6.

Okrugla ploča polumjera R s otvorom polumjera r , debljine stijenke h , opterećena je na unutarnjem rubu s momentom savijanja M_0 prema slici 6.17. Odrediti raspodjelu progiba w i momenta M_1 u radijalnom smjeru ploče.

Zadano: $R = 1,5 \text{ m}$, $r = 0,5 \text{ m}$, $M_0 = 5 \text{ kNm/m}$, $h = 0,02 \text{ m}$, $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,3$



Slika 6.17 Primjer 6.6

U ovom slučaju se mogu zanemariti membranski efekti u ploči, tako da u izrazima (6.7) vrijedi $A_1 = A_3 = 0$, te kao nepoznanice preostaju A_2 , A_4 , C' i C'' . Postavljanjem rubnih uvjeta

$$\begin{aligned} \xi_A = r/R & \quad w = 0 \\ & \quad M_1 = M_0 \\ \xi_B = 1 & \quad w = 0 \\ & \quad \beta = 0 \end{aligned}$$

dobivaju se potrebne jednadžbe za određivanje nepoznatih konstanti u obliku

$$\begin{aligned} -\frac{cR}{Eh^2} \left(A_2 \frac{\xi_A^2}{2} + A_4 \ln \xi_A \right) + \frac{c^2}{Eh^3} \left[-\frac{R^2 C'}{8} \xi_A^2 (2 \ln \xi_A - 1) \right] + C'' &= 0 \\ \frac{h}{cR} \left[(1 + \nu) A_2 - (1 - \nu) A_4 \frac{1}{\xi_A^2} \right] - \frac{1}{2} C' [(1 + \nu) \ln \xi_A + 1] &= M_0 \\ -\frac{cR}{Eh^2} A_2 + \frac{c^2 R^2}{8Eh^3} C' + C'' &= 0 \\ \frac{c}{Eh^2} (A_2 + A_4) &= 0 \end{aligned}$$

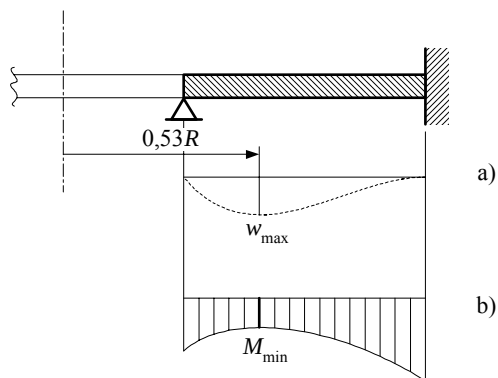
Rješenje ovog sustava glasi

$$\begin{aligned} A_2 &= 211500 \text{ kN/m} & C' &= -6925 \text{ kN/m} \\ A_4 &= -211500 \text{ kN/m} & C'' &= 0,0189 \text{ m} \end{aligned}$$

Funkcije raspodjele traženih veličina u radijalnom smjeru ploče imaju oblik

$$\begin{aligned} w &= -\frac{cR}{Eh^2} \left(211500 \frac{\xi^2}{2} - 211500 \ln \xi \right) + \frac{c^2}{Eh^3} \left[865,625 R^2 \xi^2 (2 \ln \xi - 1) \right] + 0,0189 \\ M_1 &= \frac{h}{cR} \left[211500(1 + \nu) + 211500(1 - \nu) \frac{1}{\xi^2} \right] + 3462,5 [(1 + \nu) \ln \xi + 1] \end{aligned}$$

Njihova raspodjela prikazana je na slikama 6.18.a i b.



Slika 6.18 Primjer 6.6

Najveći progib (na $0,53R$)

$$w_{\max} = 1,15 \text{ mm}$$

Najmanji moment savijanja (na $0,53R$)

$$M_{\min} = 3,838 \text{ kNm/m}$$

Najveći moment savijanja (u uklještenju)

$$M_{\max} = 5,17 \text{ kNm/m}$$

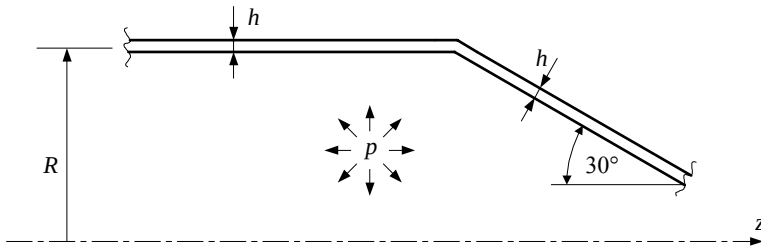
6.7. Spoj ljusaka

Vrlo često su ljuskaste konstrukcije sastavljene od 2 ili više ljusaka. U tom slučaju od posebnog je interesa analizirati mjesta njihovog spoja. Naime, na tim mjestima javlja se velika koncentracija naprezanja uslijed snažno izraženog efekta savijanja. Stoga se u samom spoju računaju iznosi sila i pomaka, a u njegovoj okolini (u svakoj ljusci) njihova raspodjela. Pritom se koriste uvjeti ravnoteže sila i kompatibilnosti pomaka u spoju, posebno vodeći računa o konvenciji predznaka sila i pomaka koja vrijedi za svaku ljusku. Redovito se za svaku ljusku zasebno primjenjuje i načelo zanemarenja utjecaja rubova (čitaj: spoja) na ostatak ljuske.

PRIMJER 6.7.

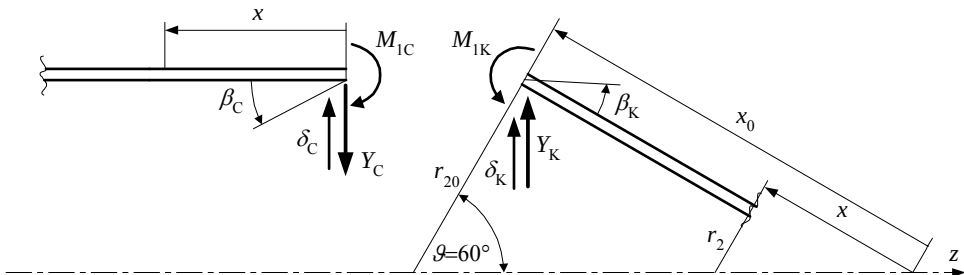
Ljuskasta konstrukcija sastavljena je od cilindrične i konusne ljuske iste debljine h stijenke i opterećena iznutra tlakom p prema slici 6.19. Odrediti radijalni pomak δ u spoju ljusaka, te njegovu raspodjelu u okolini spoja.

Zadano: $R = 1 \text{ m}$, $h = 0,02 \text{ m}$, $p = 300 \text{ kPa}$, $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,3$



Slika 6.19 Primjer 6.7

Na slici 6.20 posebno je prikazana svaka ljuska sa svojim koordinatnim sustavom i pozitivno orjentiranim silama i pomacima na mjestu spoja.



Slika 6.20 Primjer 6.7

Kod cilindrične ljsuke $\alpha_C > 0$, a kod konusne ljsuke $\alpha_K < 0$. Stoga, kod primjene načela zanemarenja utjecaja ruba, otpadaju u izrazima (6.4) za sile i pomake cilindrične ljsuke funkcije U_i uz uvjet $A_{1C} = A_{2C} = 0$, a u izrazima (6.5) konusne ljsuke funkcije V_i uz uvjet $A_{3K} = A_{4K} = 0$. Prema tome, problem se svodi na određivanje nepoznanica A_{3C} , A_{4C} , A_{1K} i A_{2K} .

Postavljanjem uvjeta spoja

$$\begin{aligned}\alpha_C &= \alpha_K \\ \delta_C &= \delta_K \\ \beta_C &= \beta_K \\ M_{1C} &= M_{1K} \\ Y_C &= Y_K\end{aligned}$$

dobiva se sustav jednadžbi

$$\begin{aligned}\frac{R}{Eh} \left[A_{3C} + pR \left(1 - \frac{1}{2} \nu \right) \right] &= \frac{r_{20} \sin \vartheta}{Eh} \left[A_{1K} + pr_{20} \left(1 - \frac{1}{2} \nu \right) \right] \\ -\frac{1}{Eh} \sqrt{\frac{cR}{2h}} (-A_{3C} - A_{4C}) &= -\frac{1}{Eh} \sqrt{\frac{cr_{20}}{2h}} (A_{1K} + A_{2K}) - \frac{3}{2} \frac{pr_{20}^2}{Eh} \operatorname{ctg} \vartheta \\ -\frac{h}{c} A_{4C} &= -\frac{h}{c} A_{2K} \\ -\sqrt{\frac{h}{2cR}} (A_{3C} - A_{4C}) &= -\sqrt{\frac{h}{2cr_{20}}} \frac{1}{\sin \vartheta} (-A_{1K} + A_{2K}) + \frac{pr_{20}^2}{2} \cos \vartheta\end{aligned}$$

s rješenjem

$$\begin{aligned}A_{1K} &= -56,414 \text{ kN/m} \\ A_{2K} &= 1479,33 \text{ kN/m} \\ A_{3C} &= -16,889 \text{ kN/m} \\ A_{4C} &= -56,414 \text{ kN/m}\end{aligned}$$

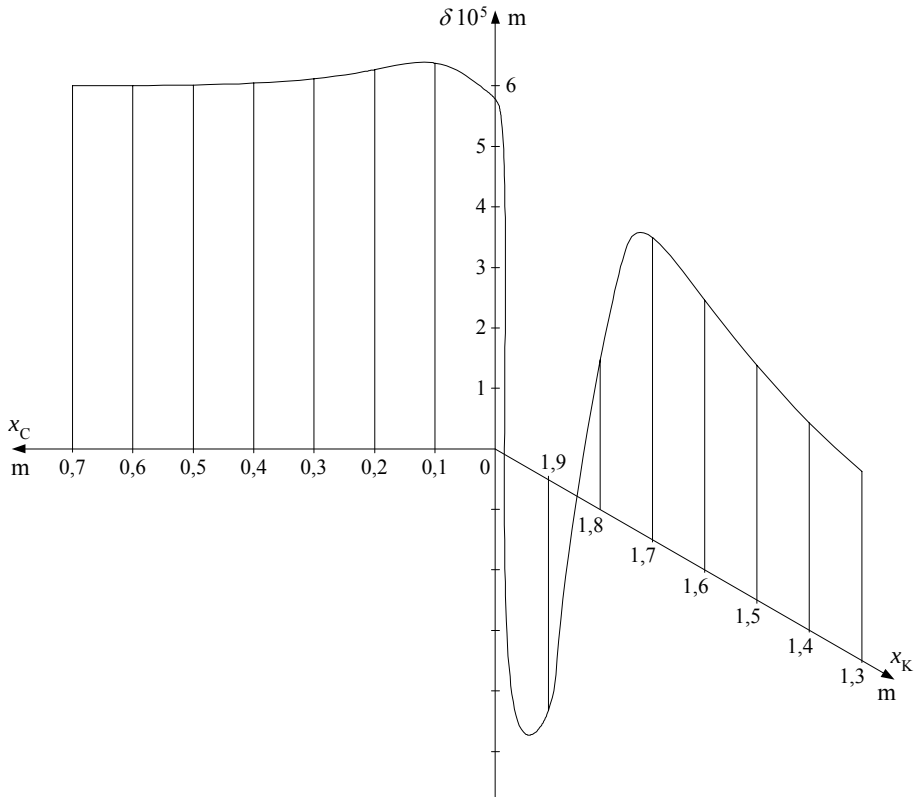
Radijalni pomak u spoju

$$\delta_C = \delta_K = 0,0567 \text{ mm}$$

Funkcije raspodjele pomaka

$$\begin{aligned}\delta_C &= \frac{R}{Eh} (A_{3C} V_1 - A_{4C} V_2) + \frac{pR^2}{Eh} \left(1 - \frac{1}{2} \right) && \text{cilindrična ljsuka} \\ \delta_K &= \frac{r_2 \sin \vartheta}{Eh} (A_{1K} U_1 + A_{2K} U_2) + \frac{pr_2^2}{Eh} \left(1 - \frac{1}{2} \nu \right) && \text{konusna ljsuka}\end{aligned}$$

Obje raspodjele prikazane su na slici 6.21.

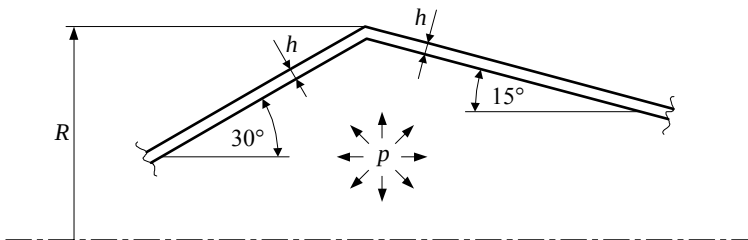


Slika 6.21 Primjer 6.7

PRIMJER 6.8.

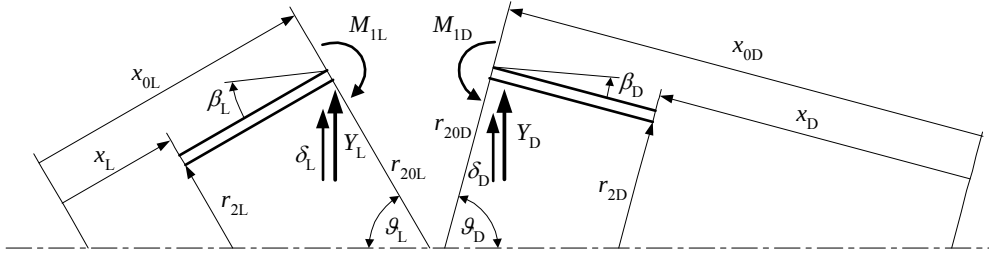
Ljuskasta konstrukcija sastavljena je od dvije konusne ljske iste debljine h stijenske i opterećene iznutra tlakom p prema slici 6.22. Odrediti iznos radijalnog pomaka δ , membranske sile N_1 i momenta savijanja M_1 na mjestu spoja.

Zadano: $R = 1 \text{ m}$, $h = 0,02 \text{ m}$, $p = 200 \text{ kPa}$, $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,3$



Slika 6.22 Primjer 6.8

Na slici 6.23 posebno je prikazana svaka ljuska s pripadnim koordinatnim sustavom i sa silama i pomacima na mjestu spoja.



Slika 6.23 Primjer 6.8 (L - lijevo, D - desno)

Pošto su $\alpha_L < 0$ i $\alpha_D < 0$, kod primjene načela zanemarenja utjecaja ruba proizlazi da su $A_{3L} = A_{4L} = A_{3D} = A_{4D} = 0$, te u izrazima (6.5) ostaju kao nepoznanice konstante A_{1L} , A_{2L} , A_{1D} i A_{2D} . Postavljanjem uvjeta u spoju

$$\begin{aligned} \alpha_L &= \alpha_D = 0 & \delta_L &= \delta_D \\ \beta_L &= -\beta_D \\ M_{1L} &= M_{1D} \\ Y_L &= -Y_D \end{aligned}$$

dobiva se sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} \frac{r_{20L} \sin \vartheta_L}{Eh} A_{1L} + \frac{pr_{20L}^2}{Eh} \left(1 - \frac{1}{2} \nu\right) \sin \vartheta_L &= \frac{r_{20D} \sin \vartheta_D}{Eh} A_{1D} + \frac{pr_{20D}^2}{Eh} \left(1 - \frac{1}{2} \nu\right) \sin \vartheta_D \\ -\frac{1}{Eh} \sqrt{\frac{cr_{20L}}{2h}} (A_{1L} + A_{2L}) - \frac{3}{2} \frac{pr_{20L}}{Eh} \operatorname{ctg} \vartheta_L &= \frac{1}{Eh} \sqrt{\frac{cr_{20D}}{2h}} (A_{1D} + A_{2D}) + \frac{3}{2} \frac{pr_{20D}}{Eh} \operatorname{ctg} \vartheta_D \\ -\frac{h}{c} A_{2L} &= -\frac{h}{c} A_{2D} \\ -\sqrt{\frac{h}{2cr_{20L}}} \frac{1}{\sin \vartheta_L} (-A_{1L} + A_{2L}) + \frac{pr_{20L}^2}{Eh} \operatorname{ctg} \vartheta_L &= \sqrt{\frac{h}{2cr_{20D}}} \frac{1}{\sin \vartheta_D} (-A_{1D} + A_{2D}) - \frac{pr_{20D}^2}{Eh} \operatorname{ctg} \vartheta_D \end{aligned}$$

s rješenjem:

$$\begin{aligned} A_{1L} &= -5951 \text{ kN/m} & A_{1D} &= -5971 \text{ kN/m} \\ A_{2L} &= 6054 \text{ kN/m} & A_{2D} &= 6054 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

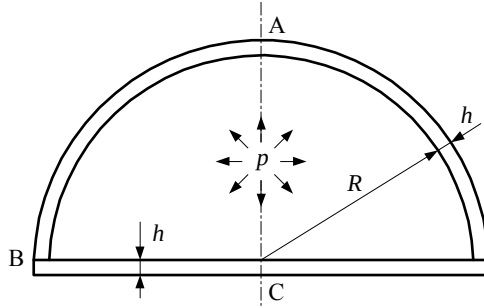
Tražene veličine na mjestu spoja

$$\begin{aligned} \delta &= 1,375 \text{ mm} \\ M_1 &= -36,015 \text{ kN/m} \\ N_{1L} &= 505,5 \text{ kN/m} \\ N_{1D} &= -505,5 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

PRIMJER 6.9.

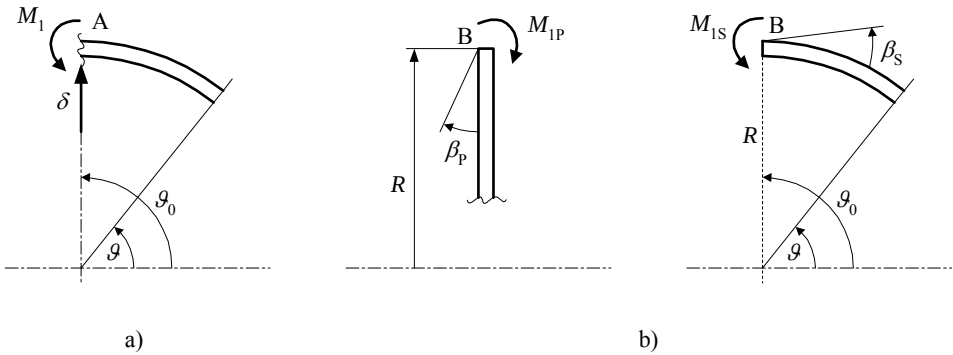
Sferna posuda ravnog dna polumjera R i debljine h stijenke iznutra je opterećena tlakom p prema slici 6.24. Odrediti na vrhu A posude vertikalni pomak δ i moment savijanja M_1 , u točki B spoja sfere s okruglom pločom dna posude moment savijanja M_1 , a u točki C sredine ploče dna posude vertikalni pomak.

Zadano: $R = 1 \text{ m}$, $h = 0,02 \text{ m}$, $p = 200 \text{ kPa}$, $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,3$



Slika 6.24 Primjer 6.9

Ako se primijeni načelo o zanemarenju međusobnog utjecaja rubova, tada se točke A i B sfere mogu razmatrati zasebno. Obje točke prikazane su s pripadnim koordinatnim sustavima, silama i pomacima na slici 6.25.a i b.



Slika 6.25 Primjer 6.9

Točka A

Iz slike 6.25.a uočljivo je, da se razmatra samo 1/2 sfere, te da je $\alpha_s < 0$. Stoga su u izrazima (6.6) za sile i pomake $A_3 = A_4 = 0$, te ostaju kao nepoznanice A_1 i A_2 .

Postavljanjem uvjeta simetričnosti za

$$\begin{aligned}\alpha_A &= 0 & \beta_A &= 0 \\ Y_A &= 0\end{aligned}$$

slijede jednadžbe

$$\begin{aligned}-\frac{1}{Eh} \sqrt{\frac{cR}{2h}} (A_1 + A_2) &= 0 \\ -\sqrt{\frac{h}{2cR}} \frac{1}{\sin \vartheta_0} (-A_1 + A_2) &= 0\end{aligned}$$

s trivijalnim rješenjem $A_1 = A_2 = 0$

Prema tome, na vrhu A sfere nema savijanja, tako da je

$$\begin{aligned}\delta_A &= \frac{pR^2}{2Eh} (1 - \nu) \sin \frac{\pi}{2} = 0,017 \text{ mm} \\ M_1 &= 0\end{aligned}$$

Točke B i C

Iz slike 6.25.c vidljivo je, da je čitava posuda zakrenuta za 90° , tako da se točka **B** može razmatrati kao spoj sferne ljuske i okrugle ploče, dok je točka **C** središte okrugle ploče. Primjenom principa o zanemarenju međusobnog utjecaja rubova u sfernoj ljusci su, zbog $\alpha_s < 0$, konstante $A_{3s} = A_{4s} = 0$. Zanemarivanjem membranskih efekata u punoj okrugloj ploči konstante $A_{1p} = A_{3p} = A_{4p} = C'_p = 0$. Dakle, sveukupno preostaju nepoznanice A_{1s} , A_{2s} , A_{2p} i C'' .

Postavljanjem uvjeta spoja u točki **B**

$$\begin{aligned}(\alpha_B = 0, \xi_B = 1) & & \beta_s &= -\beta_p \\ M_{1s} &= M_{1p} \\ \delta_s &= 0 \\ w_p &= 0\end{aligned}$$

proizlaze slijedeće jednadžbe

$$\begin{aligned}-\frac{1}{Eh} \sqrt{\frac{cR}{2h}} (A_{1s} + A_{2s}) &= -A_{2p} \frac{c}{Eh^2} + \frac{c^2}{Eh^3} \frac{pR^3}{16} \\ -\frac{h}{c} A_{2s} &= A_{2p} \frac{h}{cR} (1 + \nu) - \frac{pR^2}{16} (3 + \nu)\end{aligned}$$

$$\frac{R}{Eh} \sin \vartheta A_{1s} + \frac{pR}{2Eh} (1 - \nu) \sin \vartheta = 0$$

$$-\frac{cR}{Eh^2} A_{2p} \frac{1}{2} + \frac{c^2}{Eh^3} \frac{pR^4}{64} + C_p'' = 0$$

s rješenjem

$$A_{1s} = -70 \text{ kN/m} \quad A_{2p} = 2274,281 \text{ kN}$$

$$A_{2s} = 3918,435 \text{ kN/m} \quad C_p'' = 0,024 \text{ m}$$

Moment savijanja M_1 u točki **B** ploče (isti iznos je i sa strane sfere)

$$M_1 = \frac{h}{cR} (1 + \nu) A_{2p} - \frac{pR^2}{16} (3 + \nu) = -23,35 \text{ kNm/m}$$

Vertikalni pomak točke **C** središta okrugle ploče: $w_c = C_p'' = 0,024 \text{ m}$

Zbrajanjem vertikalnih pomaka točaka **A** i **C**, proizlazi međusobno odmicanje ovih točaka za iznos od 0,024017 m.

PRIMJER 6.10

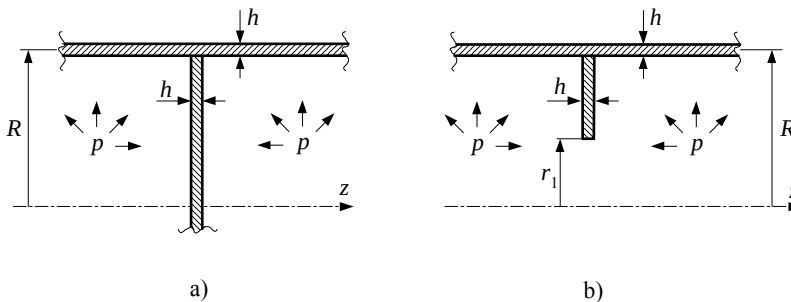
Na spoju cilindrične ljuske, opterećene iznutra tlakom p , s

a) pregradom

b) ukrepom

prema slici 6.26, odrediti veličinu radijalnog pomaka δ , radijalne sile Y i momenta savijanja M_1 . Ujedno odrediti njihovu raspodjelu u ljusci u okolini spoja, te je prikazati u obliku dijagrama.

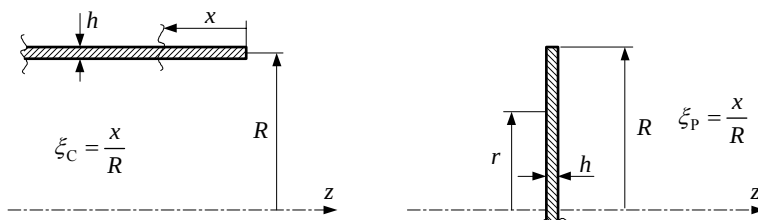
Zadano: $R = 1,5 \text{ m}$, $r = 0,5 \text{ m}$, $h = 0,015 \text{ m}$, $p = 500 \text{ kPa}$, $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,3$



Slika 6.26 Primjer 6.10

Slučaj a)

Obzirom na simetričnost spoja dovoljno je u razmatranje uzeti samo jednu njegovu polovicu.



Zbog simetričnog opterećenja tlakom, u pregradi se javljaju samo membranski efekti, dakle $A_{2p} = A_{4p} = C'_p = C''_p = 0$, a zbog mogućnosti da $\xi = 0$ (puna ploča), je i $A_{3p} = 0$. Kod ljuske će se primijeniti načelo o zanemarivanju međusobnog utjecaja rubova, te je $A_{1c} = A_{2c} = 0$. Dakle u izrazima (6.4) i (6.7) za sile i pomake preostaju nepoznanice A_{3c} , A_{4c} , i A_{1p} , te se za njihovo određivanje na spoju ($\alpha_c = 0$, $\xi_p = 0$) postavljaju slijedeći uvjeti:

$$\begin{aligned}\delta_p &= \delta_c \\ 1/2 Y_p &= Y_c \\ \beta_c &= 0\end{aligned}$$

iz čega slijedi primjenom izraza (6.4) i (6.7) sustav jednačbi

$$\begin{aligned}\frac{2}{Eh}(1-\nu)A_{1p} &= \frac{R}{Eh}A_{3c} + \frac{pR^2}{Eh}\left(1 - \frac{1}{2}\nu\right) \\ \frac{1}{2R}A_{1p} &= \sqrt{\frac{h}{2cR}}(A_{3c} - A_{4c}) \\ -A_{3c} - A_{4c} &= 0\end{aligned}$$

Rješenje sustava, uz uvrštenje zadanih numeričkih vrijednosti, glasi

$$\begin{aligned}A_{3c} &= -523,4 \text{ kN/m} \\ A_{4c} &= 523,4 \text{ kN/m} \\ A_{1p} &= 122,3 \text{ kN/m}\end{aligned}$$

Raspodjela veličina δ , Y i M_1 u ljusci postavlja se primjenom izraza (6.4)

$$\begin{aligned}\delta_c &= \frac{R}{Eh}(A_{3c}V_1 - A_{4c}V_2) + \frac{pR^2}{Eh}\left(1 - \frac{1}{2}\nu\right) = -0,25 \cdot 10^{-3}(V_1 + V_2) + 0,306 \cdot 10^{-3} \\ M_{1c} &= -\frac{h}{c}(A_{3c}V_2 + A_{4c}V_1) = 2,38(V_2 - V_1) \\ Y_c &= -\sqrt{\frac{H}{2cR}}(A_{3c}V_3 - A_{4c}V_4) = 20,26(V_3 + V_4)\end{aligned}$$

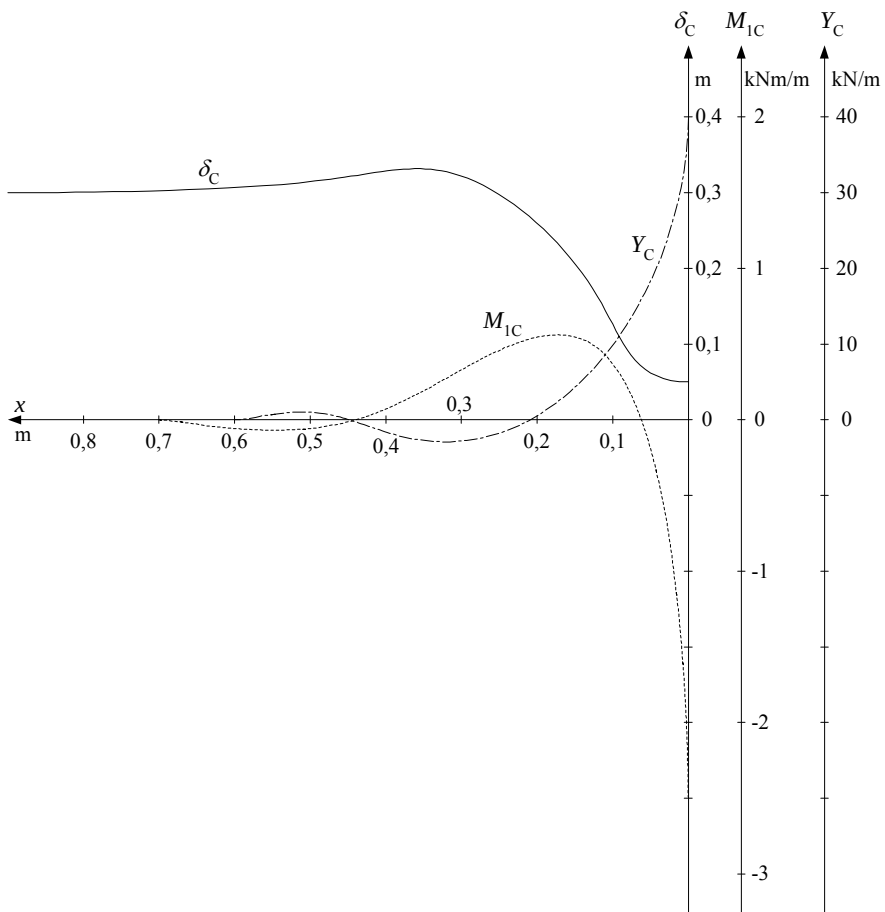
i prikazana je na slici 6.27.

Vrijednost ovih veličina na mjestu spoja ($\alpha_c = 0$) iznosi

$$\delta_c = 0,056 \text{ mm}$$

$$M_{1c} = -2,38 \text{ kNm/m}$$

$$Y_c = 40,52 \text{ kN/m}$$



Slika 6.27 Primjer 6.10, raspodjela δ_c , M_{1c} i Y_c

Slučaj b)

I ovdje se zbog simetrije razmatra samo jedna polovica spoja. Obzirom na membransko opterećenje ukrepe uzima se da je $A_{2U} = A_{4U} = C' = C'' = 0$, a kod ljuske, zbog zanemarenja međusobnog utjecaja rubova, vrijedi $A_{1C} = A_{2C} = 0$. Prema tome, u odgovarajućim izrazima (6.4) i (6.7) za sile i pomake preostaju nepoznanice A_{3C} , A_{4C} , A_{1U} i A_{3U} . Za njihovo određivanje postavljaju se slijedeći uvjeti na spoju ($\alpha_C = 0$, $\xi_U = 0$)

$$\begin{aligned}\delta_U &= \delta_C \\ 1/2 Y_U &= Y_C \\ \beta_C &= 0\end{aligned}$$

i na slobodnom kraju ukrepe $\left(\xi_U = \frac{r}{R} \right)$

$$Y_C = 0$$

Primjenom izraza (6.4) i (6.7) slijedi sustav jednadžbi

$$\begin{aligned}\frac{2}{Eh} [(1-\nu)A_{1U} - (1+\nu)A_{3U}] &= \frac{R}{Eh} A_{3C} + \frac{pR^3}{Eh} \left(1 - \frac{1}{2}\nu \right) \\ \frac{1}{2R} (A_{1U} + A_{3U}) &= -\sqrt{\frac{h}{2cR}} (A_{3C} - A_{4C}) \\ -A_{3C} - A_{4C} &= 0 \\ \frac{1}{R} A_{1U} + \frac{1}{R} A_{3U} \left(\frac{R}{r_1} \right)^2 &= 0\end{aligned}$$

Uvrštavanjem zadanih numeričkih vrijednosti dobiva se slijedeće rješenje ovog sustava

$$\begin{aligned}A_{3C} &= -491,6 \text{ kN/m} & A_{1U} &= 129,6 \text{ kN} \\ A_{4C} &= 491,6 \text{ kN/m} & A_{3U} &= -14,4 \text{ kN}\end{aligned}$$

Raspodjela δ , M_1 i Y u ljusci definirana je odgovarajućim izrazima (6.4)

$$\begin{aligned}\delta_C &= \frac{R}{Eh} (A_{3C}V_1 - A_{4C}V_2) + \frac{pR^2}{Eh} \left(1 - \frac{1}{2}\nu \right) = -0,235 \cdot 10^{-3} (V_1 + V_2) + 0,306 \cdot 10^{-3} \\ M_{1C} &= -\frac{h}{c} (A_{3C}V_2 + A_{4C}V_1) = 2,23(V_2 - V_1) \\ Y_C &= -\sqrt{\frac{h}{2cR}} (A_{3C}V_3 - A_{4C}V_4) = 19,03(V_3 + V_4)\end{aligned}$$

i nije prikazana dijagramima jer je po obliku vrlo slična raspodjeli na slici 6.27

Vrijednosti ovih veličina na mjestu spoja ($\alpha_c = 0$) iznosi

$$\delta_c = 0,071 \text{ mm}$$

$$M_{1c} = -2,23 \text{ kNm/m}$$

$$Y_c = 38 \text{ kN/m}$$

Ako se ove vrijednosti usporede s onima iz slučaja a) (pregrada) uočljivo je, da je kod ukrepe radijalni pomak ljske δ veći nego kod pregrade, ali su zato moment savijanja M_{1c} i radijalna sila Y_c manji.

6.8. Primjena metode konačnih elemenata

Proračun osnosimetričnih ljsaka od velike je praktičke važnosti, stoga je i tu metoda konačnih elemenata našla svoju primjenu.

Obzirom na osnu simetriju strukture i u slučaju osnosimetričnog vanjskog opterećenja, problem opisan konačnim elementima postaje jednodimenzionalan.

No, prije opisa konačnog elementa koji je korišten za modeliranje ljske, valja prikazati neke odnose koji kod osnosimetričnih ljsaka proizlaze iz klasične teorije ljsaka.

6.8.1. Matrica elastičnosti izotropne ljske

Kao i kod svih ljsaka tako se i kod osnosimetričnih ljsaka istovremeno javljaju efekti savijanja i membranski efekti. U slučaju osnosimetričnog opterećenja pomak točke na srednjoj površini ljske jednoznačno je određen s meridijalnom i normalnom komponentom u i w . Ako se kut nagiba ljske ϑ ne mijenja (osnosimetrični element) tada su vektor sila $\{\sigma\}$ i vektor deformacija $\{\epsilon\}$ u ljsuci povezani na slijedeći način

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = [D] \cdot \{\epsilon\} = [D] \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

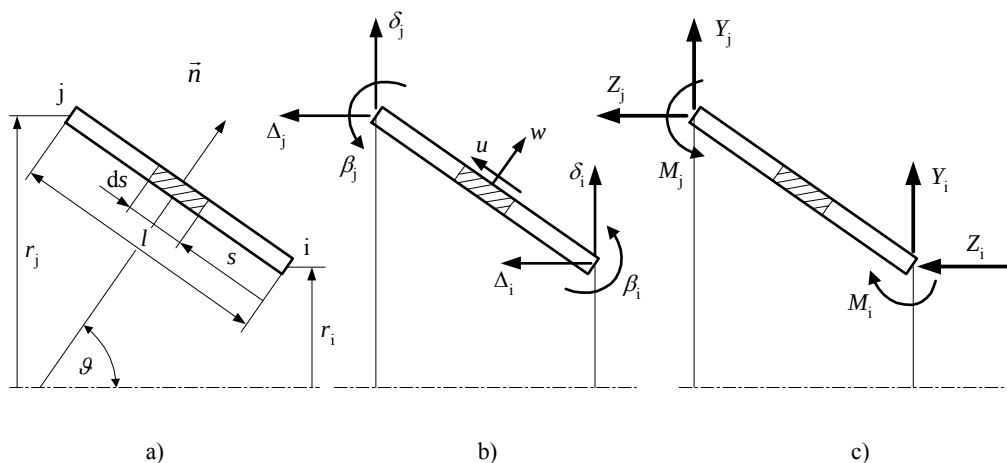
gdje je $[D]$ matrica elastičnosti izotropne ljske,

$$[D] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{12} & \nu \frac{h^2}{12} \\ 0 & 0 & \nu \frac{h^2}{12} & \frac{h^2}{12} \end{bmatrix}$$

a indeksi 1 i 2 označavaju meridijalni i cirkularni smjer u ljsuci.

6.8.2. Konačni element

Za modeliranje osnosimetričnih ljuski najčešće se koristi osnosimetrični konusni element /8/ koji je prikazan na slici 6.28.



Slika 6.28 Osnosimetrični konusni element

Element ima dva čvora (**i**, **j**) s polumjerima r_i i r_j , meridijalnu duljinu l i kut nagiba θ prema osi rotacije z , slika 6.28.a. U svakom čvoru definirana su tri stupnja slobode, slika 6.28.b,

- Δ - osni pomak,
- δ - radijalni pomak,
- β - kut zakreta normale na srednju površinu ljuske

i tri čvorne sile, slika 6.28.c,

- Z - osna sila,
- Y - radijalna sila,
- M - meridijalni moment savijanja,

tako da vektor čvornih pomaka $\{\delta\}$ i čvornih sila $\{f\}$ glase

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \Delta_i \\ \delta_i \\ \beta_i \\ \Delta_j \\ \delta_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} Z_i \\ Y_i \\ M_{li} \\ Z_j \\ Y_j \\ M_{lj} \end{Bmatrix}$$

U unutrašnjosti elementa definirani su meridijalni i normalni pomak $\mathbf{u}$ i $\mathbf{w}$, slika 6.28b, sa slijedećim funkcijama oblika

$$\begin{aligned} u(s) &= a_1 + a_2 s \\ w(s) &= a_3 + a_4 s + a_5 s^2 + a_6 s^3 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Ovi pomaci povezani su s vektorom čvornih pomaka $\{\delta\}$ preko matrice oblika $[\mathbf{N}]$,

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}] \cdot \{\delta\} \quad (6.9)$$

Matricu oblika $[\mathbf{N}]$ čine funkcije oblika, a izvedena je u Prilogu A.

U cilju razmatranja vektora čvornih sila uslijed površinskog opterećenja $\{\mathbf{f}\}_p$ pretpostavlja se da površinsko opterećenje djeluje po jedinici površine elementa s normalnom i meridijalnom komponentom $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$, slika 6.28.c. Obzirom da ove komponente djeluju u istom smjeru kao i pomaci $\mathbf{u}$ i $\mathbf{w}$, odgovarajući vektor $\{\mathbf{f}\}_p$ određuje se takođe uz pomoću matrice oblika $[\mathbf{N}]$ kako slijedi

$$\{\mathbf{f}\}_p = -2\pi \cos \vartheta \int_0^1 [\mathbf{N}]^T \begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix} \left(\frac{r_i}{l} + \xi \right) d\xi \quad (6.10)$$

gdje je $\xi = \frac{s}{l}$

Prema tome, osnovna jednadžba konačnog elementa glasi

$$[\mathbf{k}]\{\delta\} = \{\mathbf{f}\} - \{\mathbf{f}\}_p \quad (6.11)$$

Matrica krutosti konačnog elementa $[\mathbf{k}]$ određuje se prema poznatoj relaciji iz metode konačnih elemenata

$$[\mathbf{k}] = \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{B}] dV = 2\pi \cos \vartheta \int_0^1 [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{B}] \cdot \left(\frac{r_i}{l} + \xi \right) d\xi \quad (6.12)$$

$[\mathbf{B}]$ je matrica deformacija koja povezuje vektor deformacija $\{\epsilon\}$ u elementu i vektor čvornih pomaka $\{\delta\}$,

$$\{\epsilon\} = [\mathbf{B}] \cdot \{\delta\} \quad (6.13)$$

Matrica $[\mathbf{B}]$ izvedena je u Prilogu A.

Iz izraza (6.10) i (6.12) vidljivo je, da se pojedini članovi matrice $[\mathbf{k}]$ i vektora $\{\mathbf{f}\}_p$ mogu odrediti primjenom postupka numeričke integracije.

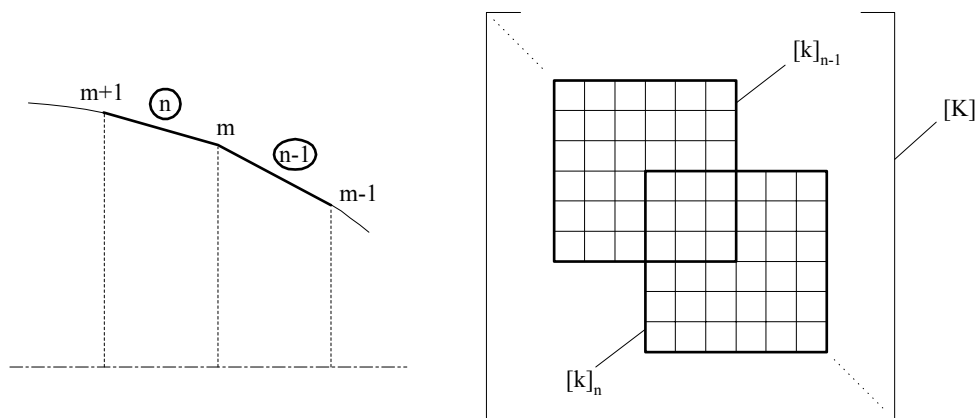
6.8.3. Model

Nakon što su definirani svi elementi jednadžbe konačnog elementa (6.11), prelazi se na određivanje globalne jednadžbe modela ljuske sastavljenog od konačnih elemenata koja glasi

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\Delta\} = \{\mathbf{F}\} - \{\mathbf{F}\}_p \quad (6.14)$$

gdje je $[\mathbf{K}]$ matrica krutosti, $\{\Delta\}$ vektor čvornih pomaka, $\{\mathbf{F}\}$ vektor čvornih sila i $\{\mathbf{F}\}_p$ vektor čvornih sila uslijed površinskog opterećenja modela.

Obzirom da je zbog osne simetrije ljuske prikazani konačni element jednodimenzionalan, matrica $[\mathbf{K}]$ se formira na identičan način kao i kod ostalih jednodimenzionalnih elemenata (štapni, gredni), tj. preklapanjem matrica krutosti pojedinih elemenata, slika 6.29.



Slika 6.29 Spajanje konačnih elemenata

Na isti način, preklapanjem vektora $\{\mathbf{f}\}_p$, dobiva se i vektor $\{\mathbf{F}\}_p$ čvornih sila uslijed površinskog opterećenja modela.

Primjena metode konačnih elemenata za analizu osnosimetričnih ljusaka nije ilustrirana riješenim primjerima. Razlog tome leži u složenosti problema, koji nije moguće riješiti bez podrške elektroničkog računala. U tu svrhu neophodno je razviti odgovarajuće algoritme za određivanje matrice krutosti $[\mathbf{k}]$ konačnog elementa i $[\mathbf{K}]$ globalnog modela ljuske, što nadilazi dimenzije ovog udžbenika.

Prilog A

Izvod matrice oblika [N] i matrice krutosti [k] za osnosimetričan konusni element

a) Matrica oblika [N]

Matrica oblika [N] povezuje pomake $\mathbf{u}$ i $\mathbf{w}$ u elementu s vektorom čvornih pomaka $\{\delta\}$, jednačba (6.9), i koristi se za određivanje vektora čvornih sila uslijed površinskog opterećenja $\{\mathbf{f}\}_p$. U postupku njenog izvođenja najprije treba transformirati vektor čvornih pomaka $\{\delta\}_i$ u svakom čvoru na slijedeći način:

$$\{\bar{\delta}\}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ -\cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_i \\ \delta_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} = [\mathbf{t}] \cdot \{\delta\}_i$$

što za cijeli element daje

$$\{\bar{\delta}\} = [\mathbf{T}] \cdot \{\delta\} = \begin{bmatrix} [\mathbf{t}] & 0 \\ 0 & [\mathbf{t}] \end{bmatrix} \{\delta\} \quad (\text{A.1})$$

gdje je [T] matrica transformacija pomaka.

Zatim, funkcije oblika (6.8) dadu se također prikazati u matričnom obliku

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [\mathbf{P}] \cdot \{\mathbf{A}\} = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix} \{\mathbf{A}\} \quad (\text{A.2})$$

gdje je $\{\mathbf{A}\}^T = \langle a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \rangle$

Vektor $\{\delta\}$ može se izraziti u ovisnosti o vektoru koeficijenata $\{\mathbf{A}\}$ ako se u funkcije oblika (6.8) uvrste rubne vrijednosti za lokalnu koordinatu s ($s_i = 0$, $s_j = 0$). Slijedi

$$\{\bar{\delta}\} = [\mathbf{L}] \cdot \{\mathbf{A}\} = [\mathbf{L}] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad \text{odnosno} \quad \{\mathbf{A}\} = [\mathbf{L}]^{-1} \{\bar{\delta}\} \quad (\text{A.3})$$

gdje je

$$[L]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{l^2} & \frac{2}{l} & 0 & \frac{3}{l^2} & \frac{1}{l} \\ 0 & \frac{2}{l^2} & -\frac{1}{l^2} & 0 & -\frac{2}{l^2} & -\frac{1}{l^2} \end{bmatrix}$$

Ako se u jednađbu (A.2) uvrsti jednađba (A.3) dobiva se

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [P] \cdot [B]^{-1} \{\bar{\delta}\} = [\bar{N}] \cdot \{\bar{\delta}\} \quad (A.4)$$

gdje je

$$[\bar{N}] = \begin{bmatrix} (1-\xi) & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & (1-3\xi^2+2\xi^3) & l(-\xi+2\xi^2-\xi^3) & 0 & (3\xi^2-2\xi^3) & l(\xi^2-\xi^3) \end{bmatrix}$$

Nadalje, ako se u jednađbu (A.4) uvrsti jednađba (A.1), tada proizlazi

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [\bar{N}] \cdot [T] \cdot \{\delta\} = \begin{bmatrix} [\bar{N}_i][t] & [\bar{N}_j][t] \end{bmatrix} \cdot \{\delta\} = [N] \cdot \{\delta\} \quad (A.5)$$

gdje je $[N]$ tražena matrica oblika. Ona se određuje na slijedeći način:

$$\begin{aligned} [N_i][t] &= \begin{bmatrix} (1-\xi) & 0 & 0 \\ 0 & (1-3\xi^2-\xi^3) & l(-\xi+2\xi^2-\xi^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ -\cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (1-\xi)\sin \vartheta & (1-\xi)\cos \vartheta & 0 \\ -(1-3\xi^2-\xi^3)\cos \vartheta & (1-3\xi^2+2\xi^3)\sin \vartheta & l(-\xi+2\xi^2-\xi^3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [N_j][t] &= \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & (3\xi^2 - 2\xi^3) & l(\xi^2 - \xi^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ -\cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \xi \sin \vartheta & \xi \cos \vartheta & 0 \\ -(3\xi^2 - 2\xi^3) \cos \vartheta & (3\xi^2 - 2\xi^3) \sin \vartheta & l(\xi^2 - \xi^3) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Čitava matrica oblika **[N]** prikazana je na stranici 136.

b) *Matrica krutosti [k]*

Matrica krutosti **[k]** definirana je izrazom (6.12). Odatle je vidljivo da prethodno treba odrediti matricu deformacija **[B]**.

Veza između vektora deformacija **{ε}** i pomaka **u** i **w** u elementu definirana je na slijedeći način:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{ds} \\ \frac{1}{r}(u \cos \vartheta + w \sin \vartheta) \\ -\frac{d^2 w}{ds^2} \\ -\frac{\cos \vartheta}{r} \frac{dw}{ds} \end{Bmatrix}$$

odnosno u matričnom obliku

$$\{\varepsilon\} = [\Lambda] \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} & 0 \\ \frac{1}{r} \cos \vartheta & \frac{1}{r} \sin \vartheta \\ 0 & -\frac{1}{l^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \\ 0 & -\frac{1}{rl} \cos \vartheta \frac{d}{d\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \quad (A.6)$$

gdje je **[Λ]** diferencijalni matrični operator.

Ako se u jednadžbu (A.6) uvrsti jednadžba (A.5) dobiva se

$$\{\varepsilon\} = [\Lambda][N]\{\delta\} = [B]\{\delta\} \quad (A.7)$$

gdje je **[B]** matrica deformacija koja je prikazana na stranici 136.

Matrica oblika [N]

$$[N] = \begin{bmatrix} (1-\xi)\sin\vartheta & (1-\xi)\cos\vartheta & 0 & \xi\sin\vartheta & \xi\cos\vartheta & 0 \\ -(1-3\xi^2+2\xi^3)\cos\vartheta & (1-3\xi^2+2\xi^3)\cos\vartheta & l(-\xi+2\xi^2-\xi^3) & -(3\xi^2-2\xi^3)\cos\vartheta & (3\xi^2-2\xi^3)\sin\vartheta & l(\xi^2-\xi^3) \end{bmatrix}$$

Matrica deformacija [B]

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{\sin\vartheta}{l} & -\frac{\cos\vartheta}{l} & 0 & \frac{\sin\vartheta}{l} & \frac{\cos\vartheta}{l} & 0 \\ \left(-\xi+3\xi^2-2\xi^3\right)\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{r} & (1-\xi)\frac{\cos^2\vartheta}{r} + \left(1-3\xi^2+2\xi^3\right)\frac{\sin^2\vartheta}{r} & \left(-\xi+2\xi^2-\xi^3\right)\frac{l\sin\vartheta}{r^2} & \left(\xi-3\xi^2+2\xi^3\right)\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{r} & \xi\frac{\cos^2\vartheta}{r} + \left(3\xi^2-2\xi^3\right)\frac{\sin^2\vartheta}{r} & \left(\xi^2-\xi^3\right)\frac{l\sin\vartheta}{r^2} \\ -\left(6-12\xi\right)\frac{\cos\vartheta}{l^2} & \left(6-12\xi\right)\frac{\sin\vartheta}{l^2} & -\frac{(4-6\xi)}{l} & \left(6-12\xi\right)\frac{\sin\vartheta}{l^2} & -\left(6-12\xi\right)\frac{\sin\vartheta}{l^2} & -\frac{(2-6\xi)}{l} \\ -\left(6\xi-6\xi^2\right)\frac{\cos^2\vartheta}{rl} & -\left(-6\xi+6\xi^2\right)\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{rl} & -\left(-1+4\xi-3\xi^2\right)\frac{\cos\vartheta}{r} & \left(6\xi-6\xi^2\right)\frac{\cos^2\vartheta}{rl} & -6\left(\xi-\xi^2\right)\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{rl} & -\left(2\xi-3\xi^2\right)\frac{\cos\vartheta}{r} \end{bmatrix}$$

Kazalo

A

Airy-eva funkcija naprezanja, 51

C

cilindrična ljuska, 103

Č

čvor konačnog elementa:

- gredni, 35
- ljuskasti, 130
- membranski, 52
- pločasti, 88
- štapni, 18

D

diferencijalni element:

- grede, 25
- ljuske, 99
- membrane, 51
- pravokutne ploče, 61
- štapa – osno opterećenje, 9
- štapa – uvijanje, 23

diferencijska jednačina

- grede, 27
- pravokutne ploče, 24
- štapa, 11

dvostruki Fourier-ov red, 64

E

elastična linija, 26

G

greda, 25

gredni konačni element, 35

I

interpolacijski polinom, 10

J

jednostruki Fourier-ov red, 72

K

konačne razlike, 9
konusna ljuska, 107
krutost grede na savijanje, 25
krutost štapa na uvijanje, 23
kut nagiba grede, 25
kut savijanja ljuske, 101
kut uvijanja štapa, 23

L

Levy-eva metoda, 72

M

matrica deformacija konačnog elementa ljuske, 131, 136
matrica elastičnosti izotropne ljuske, 129
matrica krutosti:

- grednog konačnog elementa, 35
- konačnog elementa ljuske, 131
- membranskog konačnog elementa na rastezanje, 53
- membranskog konačnog elementa na smik, 53
- štapnog konačnog elementa, 19

matrica oblika konačnog elementa ljuske, 131, 134, 136
membranski konačni element, 52
membranske sile ljuske, 100
meridijalni pomak ljuske, 101
minimum ukupne energije ploče, 78
moment savijanja:

- grede, 25
- ploče, 61

moment uvijanja:

- ploče, 61
- štapa, 23

mreža konačnih razlika:

- grede, 26
- ploče, 83
- štapa, 11

N

načelo o zanemarenju međusobnog utjecaja rubova ljuske, 102
Navier-ova metoda, 64
normalna membranska sila, 51
normalno opterećenje ploče, 61
normalni pomak ljuske, 101

O

okrugla ploča, 114
okrugla ploča s otvorom, 115
opterećenje membrane, 51
opterećenje na uvijanje, 23
osna krutost štapa, 9
osna sila ljuske, 100
osni moment tromosti grede, 25
osni pomak ljuske, 101
osno opterećenje štapa, 9
osnosimetrična ljuska, 99
osnosimetrični konusni element ljuske, 130

P

polumjeri zakrivljenosti ljuske, 99
pomaci u ravini ploče, 51
poprečna sila:

- grede, 25
- ljuske, 100
- ploče, 61

poprečno opterećenje grede, 25
pravokutni pločasti konačni element, 89
progib:

- grede, 25
- ploče, 61

puna okrugla ploča, 115

R

radijalni pomak ljuske, 101
radijalna sila ljuske, 100
rastezanje pravokutne ploče, 51
Ritz-ova metoda, 78
rubni uvjeti ploče, 63

S

savijanje pravokutne ploče, 61
sferna ljuska, 110
smična membranska sila, 51
spoj ljusaka, 119

Š

štap, 9
štapni konačni element:

- opterećen na uvijanje, 24
- osno opterećen, 18

T

tlak, 100

U

ukupna energija ploče, 78

upeta ploča, 63

uvijanje štapa, 23

uzdužni pomak štapa, 9

uzdužna sila u štapu, 9

V

vektor čvornih pomaka:

- grede, 35
- membrane, 53
- ploče, 91
- štapa, 19

vektor čvornih sila:

- grede, 36
- membrane, 53
- ploče, 91
- štapa, 19

vektor čvornih sila uslijed vanjskog opterećenja:

- grede, 35
- membrane, 53
- ljuske, 131
- ploče, 91
- štapa, 19

Z

zglobno oslonjena ploča

Literatura

- /1/ D. BAZJANAC : “Nauka o čvrstoći”, Tehnička knjiga, Zagreb 1968.
- /2/ I. ALFIREVIĆ : “Nauka o čvrstoći I dio”, Tehnička knjiga, Zagreb 1989.
- /3/ O.C. ZIENKIEWICZ : “The Finite Element Method in Engineering Science”,
Mc Graw-Hill, London 1971.
- /4/ I. SENJANOVIĆ : “Metoda konačnih elemenata u strukturnoj analizi brodskih
konstrukcija”, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb 1975.
- /5/ S. TIMOŠENKO, S. VOJNOVSKI-KRIEGER : “Teorija ploča i ljuski”, Građevinska
knjiga, Beograd 1962.
- /6/ R. SZILARD : “Theory and Analysis of Plates, Classical and Numerical Methods”,
Prentice-Hall, New York 1966.
- /7/ I. SENJANOVIĆ : “Theory of shells of revolution”, Brodarski Institut, Zagreb 1972.
- /8/ P. L. GOULD : “Finite element analysis of shells of revolution”, Pitman Publishing inc.,
London 1985.
- /9/ - : “Inženjerski priručnik IP1, temelji inženjerskih znanja”, Školska knjiga,
Zagreb 1996.

