

# 1. OSNOVNI POJMOVI IZ PRIJENOSA SNAGE I GIBANJA

Prije upoznavanja najvažnijih vrsta prijenosnika u ovom će poglavlju biti govora o osnovnim pojmovima vezanim za prijenos snage i gibanja kao što su pojmovi brzine vrtnje, prijenosnog omjera, skoka prijenosa, iskoristivosti itd. Prilikom ovih razmatranja koristit će se oznake prema [2] i [3] (vidi poglavlje 3.1). Kao primjeri gotovo će se redovito upotrebljavati najraširenije vrste prijenosnika, zupčasti prijenosnici, s konstantnim ili promjenjivim prijenosnim omjerom.

## 1.1 Označavanje

Sva priključna vratila bilo kog prijenosnika označavat će se velikim slovima abecede (A, B, C, ...). Zadnje slovo u nizu označavat će reakcijski član prijenosnika (najčešće član C). Vratila koja nisu priključna, a koja će se zvati prijenosnička, označavat će se s  $V_1, V_2, \dots, V_n$ . Glavni prijenosnički elementi (zupčanici, tarenice itd.) označavat će se brojevima 1, 2, ... n uz uobičajene skraćenice.

## 1.2 Brzina vrtnje

Brzina vrtnje ( $n$ ) i kutna brzina ( $\omega$ ) članova s jednakim smjerom vrtnje imaju isti predznak. Izbor predznaka pritom je proizvoljan, ali treba davati prednost označavanju pozitivnim (+) smjer jednak gibanju kazaljke sata, gledano u smjeru toka snage. Oznake rezultantnih brzina imat će, u načelu, dva indeksa. Prvi indeks će označavati član prijenosnika na koji se brzina odnosi, a drugi prema čemu se brzina definira. Ako se brzina definira prema mirujućoj okolini, onda će drugi član, koji će imati indeksnu oznaku 0, biti ponekad izostavljen.

Na primjer:

$\omega_{A0}$  ili  $\omega_A$  su apsolutne kutne brzine člana prijenosnika A prema mirujućoj okolini

$n_{AB} = n_A - n_B = n_{A0} - n_{B0}$  relativna je brzina vrtnje člana A prijenosnika prema članu B.

Analiza brzina kao i njihovih međusobnih odnosa dana je u sljedećoj točki.

## 1.3 Prijenosni omjer (odnos)

Prijenosni omjer prijenosnika jest omjer brzina ulaznog (pogonskog) i izlaznog člana (gonjenog, radnog):



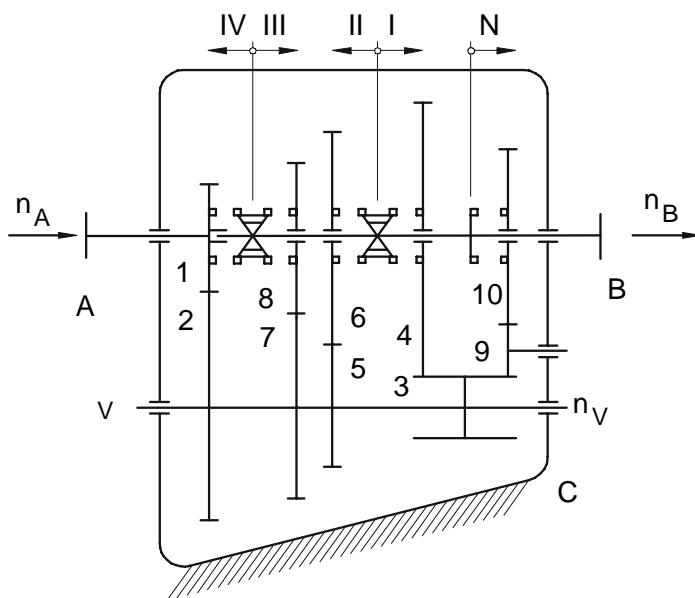


$$\text{II. stupanj:} \quad i_2 = \frac{z_2 z_6}{z_1 z_5}$$

$$\text{III. stupanj:} \quad i_3 = \frac{z_2 z_8}{z_1 z_7} \quad (3.5)$$

.....

$$\text{Suprotni smjer vrtnje:} \quad i_N = -\frac{z_2 z_{10}}{z_1 z_3}$$



Slika 3.3. Višestupanjski prijenosnik (mjenjač) vozila sa stupnjevanom promjenom prijenosnih omjera

Tablica 1.1. Moguće vrijednosti prijenosnog omjera pri različitim kombinacijama kutnih brzina

$\frac{\omega_A}{\omega_B}$	OPIS GIBANJA
$i > 1$	Prijenosnikom se kutna brzina pogonskog stroja smanjuje ili reducira. Širi naziv ovakvih prijenosnika jest reduktori
$i < 1$	Prijenosnikom se kutna brzina pogonskog stroja povećava. Širi naziv ovakvih prijenosnika jest multiplikatori
$i = \infty$	Posebnost kod bezstupnjevanih prijenosa ili kombiniranih pri pokretanju ( $n_2=0$ )
$i = 0$	Pri $n_1=0$ , kod pokretanja
$i < 0$	Negativan. Smjer okretanja pogonske i gonjene strane suprotan
$i > 0$	Pozitivan. Smjer okretanja pogonske i gonjene strane istovjetan

Pozitivan predznak (+) ovdje znači da se ulazno i izlazno vratilo prijenosnika okreće u istom smjeru, a negativan (–) u suprotnom smjeru. Uobičajeno je da se pozitivnim predznakom obilježava smjer okretanja kao kod kazaljki na satu («udesno»).

Prijenosni se omjer kreće, teoretski, u širokim granicama (vidi tablicu I).

## 1.4 Područje prijenosa

Pod pojmom područje prijenosa podrazumijevamo odnos najvećeg i najmanjeg prijenosnog omjera nekog prijenosnika s promjenjivim prijenosnim omjerom, bez obzira na to radi li se o skokovitoj ili kontinuiranoj promjeni prijenosnog omjera:

$$\rho = \frac{i_{\max}}{i_{\min}} \quad (3.6)$$

Na primjer.

$$\rho = \frac{5:1}{1:2} = 10$$

Posebno, kada se radi o *nestupnjevanoj promjeni* prijenosnog odnosa, govorimo o *podesivom području* umjesto o području prijenosa.

## 1.5 Skok prijenosa

Pod ovim pojmom podrazumijevamo odnos ili "razmak" dvaju susjednih stupnjeva prijenosa prijenosnika sa stupnjevanom promjenom prijenosnih omjera.

$$\varphi_{12} = \frac{i_1}{i_2}; \quad \varphi_{23} = \frac{i_2}{i_3}; \quad \dots \dots \quad \varphi_{ij} = \frac{i_i}{i_j} \quad (3.7)$$

$i_i, i_j$  - prijenosni omjeri dvaju susjednih stupnjeva prijenosa

U većini industrijskih prijenosnika (ne kod vozila!) sa stepenasto promjenjivim prijenosnim omjerima, a posebno kod alatnih strojeva, traži se između pojedinih stupnjeva prijenosa jednak skok prijenosa. To daje raspored područja prijenosa po geometrijskom redu. Ako se za takav prijenosnik zna najveći i najmanji prijenosni omjer te broj stupnjeva prijenosa, može se izračunati skok prijenosa prema jednadžbi:

$$\varphi = \sqrt[n-1]{\rho} = \sqrt[n-1]{\frac{i_{\max}}{i_{\min}}} \quad (3.8)$$

Na primjer, za  $i_{\max} = 8$ ,  $i_{\min} = 2$  i 5 stupnjeva prijenosa ( $n=5$ ) dobije se

$$\varphi = \sqrt[4]{\frac{8}{2}} = \sqrt{2} = 1,41$$

Pojedini prijenosni omjeri jesu :

$$i_1 = 2; \quad i_2 = 2,83; \quad i_3 = 4; \quad i_4 = 5,66; \quad i_5 = 8$$

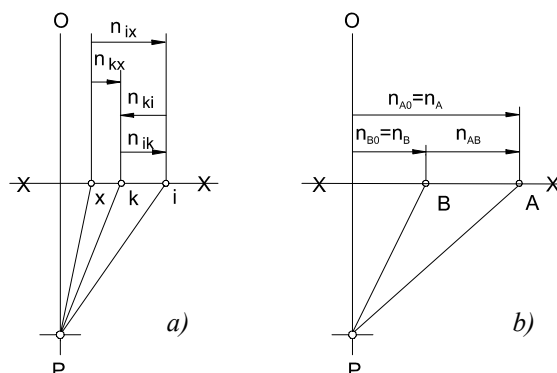
Ako se radi o mjenjačima vozila, onda se nastoji u višim stupnjevima prijenosa odabrati manji skok prijenosa nego u nižim. To je zbog toga što vozila vremenski više voze u višim stupnjevima prijenosa, ali i zbog boljih karakteristika ubrzanja u cijelom voznom području.

## 1.6 Grupni prijenosnik

Često se kod industrijskih prijenosnika sa skokovitom promjenom prijenosnog omjera, kao i kod takvih prijenosnika za vozila, dodaje u seriju (prije ili poslije prijenosnika-mjenjača) prijenosnik, obično s jednim stupnjem prijenosa ili sa dva. Ovakva kombinacija prijenosnika zove se grupni prijenosnik, a zadatak mu je, obično, podvostručenje broja stupnjeva prijenosa, odnosno broja prijenosnih omjera.

## 1.7 Relativne brzine vrtnje

Brzine vrtnje pojedinih članova prijenosnika prema mirujućoj okolini zovu se apsolutne brzine. Ako se pojedini elementi prijenosnika u dodiru gibaju jedan naspram drugog, onda govorimo o relativnoj brzini između njih. Zavisno od predznaka pojedinačnih brzina, ova (relativna) brzina može biti manja ili veća od pojedinačnih (apsolutnih) brzina. Relativna brzina kod prijenosnika vrlo je značajna pri dimenzioniranju ležaja. Određivanje relativnih brzina obavlja se grafički ili analitički, najčešće kao diferencija apsolutnih brzina (s obzirom na mirujuću okolinu). Na slici 3.4. vidi se određivanje relativnih brzina iz Kutzbachova plana brzina.



Slika 3.4. Određivanje relativnih brzina iz plana brzina: a)-opći princip; b)-za članove A i B

Vrijedi općenito:

$$n_{ik} = -n_{ki}$$

$$n_{ik} = n_{ix} + n_{xk} = n_{ix} - n_{kx}$$

ili

$$n_{AB} = -n_{BA} \quad (3.9)$$

$$n_{AB} = n_{A0} + n_{0B} = n_{A0} - n_{B0} = n_A - n_B \quad (3.10)$$

Na slici 3.3. prijenosnik vozila dobiva brzinu vrtnje  $n_A$  od pogonskog stroja, a radni stroj, vozilo, opslužuje brzinom  $n_B$ .

Kako su pogonsko A i mjenjačko vratilo V u stalnom prijenosnom omjeru, zbog stalnog zahvata zupčanika  $z_1$  i  $z_2$  (vidi sliku 3.3), brzina vrtnje  $n_V$  mjenjačkog vratila neovisna je o stupnju prijenosa i iznosi

$$n_V = (-z_1 / z_2) n_A \quad (3.11)$$

U svakom stupnju prijenosa vrte se zupčanici s brojevima orketaja  $n_A, n_V$  i odgovarajućim, zavisno od toka snage  $n_B$ . Ležaji, na gonjenom vratilu, uležištenih zupčanika, zbog stalnog zahvata sa zupčanicima mjenjačkog vratila, orkeću se relativnim brzinama vrtnje kako slijedi:

$$\text{I stupanj prijenosa: } n_{rel} = n_{4B} = n_{A0} \left( \frac{1}{i_1} - \frac{1}{i} \right)$$

$$\text{II stupanj prijenosa: } n_{rel} = n_{4B} = n_{A0} \left( \frac{1}{i_2} - \frac{1}{i} \right) \quad (3.12)$$

.....

$$\text{n-ti stupanj prijenosa: } n_{rel} = n_{kB} = n_{A0} \left( \frac{1}{i_n} - \frac{1}{i} \right)$$

U jednadžbama (3.12) za "i" treba uvrstiti prijenosni omjer stupnja prijenosa za koji se traži relativna brzina vrtnje.

Relativni brzina vrtnje između pogonskog i gonjenog vratila je (na mjestu njihova međusobnog uležištenja prijenosni omjer  $i=1$ ), na temelju jednadžbi (3.12):

$$n_{AB} = n_{A0} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{i} \right) = n_B \frac{i-1}{i} = n_A - n_B \quad (3.13)$$

Pozitivan ili negativan predznak u rezultatu proračuna relativnog broja okretaja znači da se pojedini slobodni zupčanik okreće brže ili sporije od vratila na kome je uležišten.

Za četverostupanjski prijenosnik na slici 3.3. uz  $z_1=19$ ;  $z_2=41$ ,  $z_3=12$ ;  $z_4=50$ ;  $z_5=15$ ;  $z_6=36$ ;  $z_7=22$ ;  $z_8=22$ ;  $z_9=27$ ;  $z_{10}=26$  dani su rezultati proračuna po jednadžbama od (3.1) do (3.13) u tablicama 1.2. i 1.3.

Tablica 1.2. Prijenosni omjeri i skok prijenosa za primjer na slici 3.3.

$i$	$1/i$	$\varphi$
$i_1=3,138$	0,319	
$i_2=2,078$	0,481	$\varphi_{12}=1,510$
$i_3=1,438$	0,695	$\varphi_{23}=1,445$
$i_4=1,000$	1,000	$\varphi_{34}=1,438$
$i_R=-3,430$	-0,291	

Tablica 1.3. Odnos relativnih brzina  $n_{n0}/n_{A0}$

	1.stupanj	2.stupanj	3.stupanj	4.stupanj	promjena smjera
1.stupanj	0	-0,163	-0,377	-0,681	0,61
2.stupanj	0,163	0	-0,214	-0,519	0,773
3.stupanj	0,376	0,214	0	-0,305	0,987
4.stupanj	0,681	0,519	0,305	0	1,29
promjena smjera	-0,61	-0,773	-0,987	-1,292	0

## 1.8 Okretni momenti

Za jednostupanjski zupčasti prijenosnik (sl. 3.1) mora suma vanjskih momenata biti jednaka nuli:

$$T_A + T_B + T_C = 0 \quad (3.14)$$

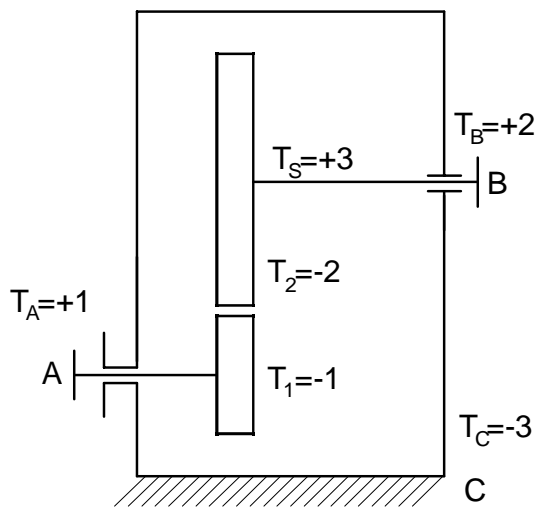
Također, za svaki pojedini element vrijedi (vidi sliku 3.5)

$$T_A + T_1 = 0; \quad T_B + T_2 = 0;$$

Iz bilance snage  $T_B n_B = -T_A n_A \eta_A$  slijedi:

$$T_b = -i \eta T_A; \quad T_C = -(T_A + T_B) = -(1 - i \eta) T_A$$

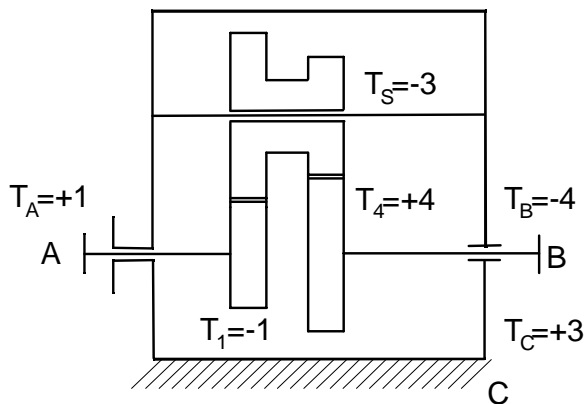




Slika 3.5. Odnosi okretnih momenata kod jedno-stupanjskih prijenosnika;  $T_A = 1$ ;  $\eta = 1$ ;  $i = -2$

Omjer momenata ulazne i izlazne strane prijenosnika zovemo stupanj pretvorbe momenta<sup>2</sup>  $\mu$  i za promatrani primjer iznosi:

$$\mu = \frac{T_B}{T_A} = -i \eta \quad (3.15)$$



Slika 3.6. Okretni momenti na dvostupanjskom prijenosniku. Brojčane su vrijednosti za  $T_A = +1$  te  $i = +4$

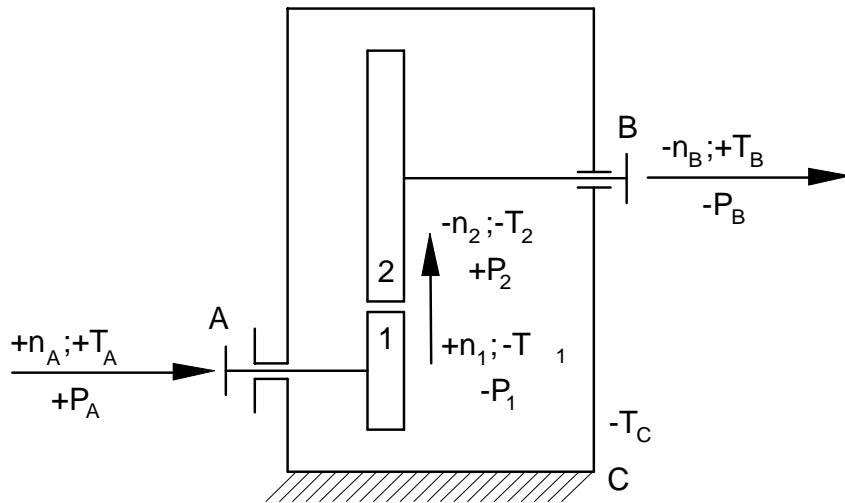
## 1.9 Snage

Za poznati okretni moment i kutnu brzinu snaga se izračunava kao njihov produkt. Pri tome razlikujemo snagu  $P_A$  kao snagu koja ulazi u prijenosnik (apsolutna) i snagu  $P_1$  koja se pojavljuje na prvom prijenosničkom elementu. Dakle, općenito vrijedi:

$$P = T \omega = T 2 \pi n = 2 \pi n T \quad (3.16)$$

U gornjoj jednadžbi snaga se dobiva u W za okretni moment u Nm i kutnu brzinu 1/s.

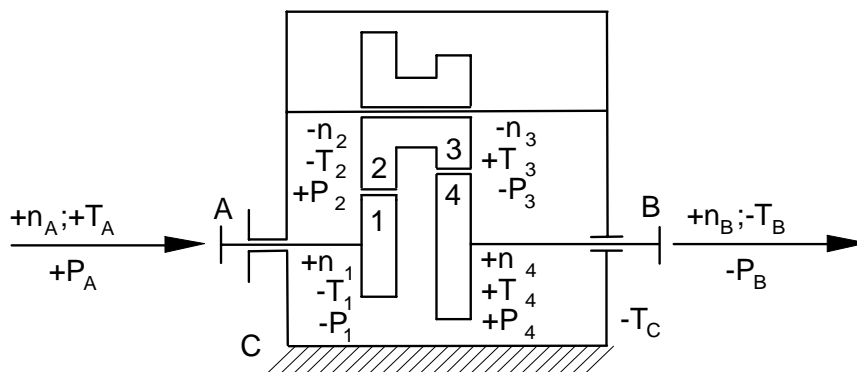
<sup>2</sup> U nekoj literaturi označava se ovaj izraz i sa  $m$



Slika 3.7. Primjer određivanja predznaka kod jednostupanjskog prijenosnika

Prilikom proračuna snaga vrijedit će konvencija o predznaku snage prema [1], i to na osnovi toga dovodi li se snaga na promatrani član prijenosnika ili se odvodi s člana. Dakle, vrijedi:

- predznak snage pozitivan je, ako snaga "dolazi" u promatrani član odnosno ako mu je ona pogonska i
- predznak snage je negativan kada snaga "odlazi" s promatranog člana, odnosno snaga je gonjena



Slika 3.8. Određivanje predznaka na primjeru dvostupanjskog prijenosnika

Ovakav način odabira predznaka vrlo je svrsishodan, osobito kod analize složenih prijenosnika bilo koje vrste, jer nam predznak u rezultatu govori odmah i o smjeru okretanja, smjeru momenta i toku snage.

Na slikama 3.7. i 3.8. dani su primjeri za određivanje predznaka na osnovi spomenute konvencije. Pritom se predznak brzine vrtnje odabire prema poglavlju 3.2.

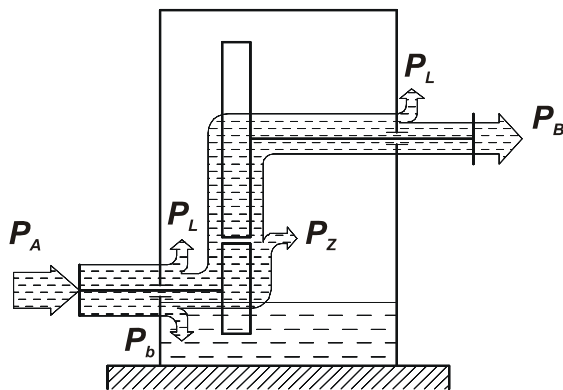
## 1.10 Iskoristivost

Faktor iskoristivosti ili stupanj korisnog djelovanja prijenosnika predstavlja, kao i kod sličnih uređaja, mjeru uspješnosti konstrukcije u pogledu što manjih gubitaka snage prilikom prolaska snage kroz uređaj. Kod mehaničkih se prijenosnika, općenito, snaga gubi na mjestu prelaska snage s jednog na drugi prijenosnički element (gubici ozubljenja, gubici proklizavanja tarenice itd.), ali i na ležajima, zatim zbog bućkanja ulja, trenja u brtvama, gubitka zupčanika mjenjačkog vratila, ventiliranja kućišta itd. Ukupni će stupanj djelovanja biti jednak produktu parcijalnih:

$$\eta = \eta_{AB} = \eta_{12} \eta_{34} \dots \eta_{xy} \eta_l \eta_b \quad (3.17)$$

U gornjoj su jednadžbi:

- $\eta = \eta_{AB}$  - ukupni stupanj djelovanja prijenosnika
  - $\eta_{12} \eta_{34} \dots \eta_{xy}$  - stupanj djelovanja pojedinih prijenosničkih parova.
- Ako se radi o zupčanicima vrijednost mu je po jednom paru oko 0,99 ( $\eta_{12} \approx 0,99 \approx \eta_{21}$ )
- $\eta_l$  - gubici u ležajima cijelog prijenosnika ili jednog vratila ili pojedinačno ( $\eta_{l1} \approx 0,9 \div 0,995$ )
  - $\eta_b$  - gubici brtvljenja, bućkanja te ostali gubici. Obično se paušalno procjenjuju



Slika 3.9. Gubici snage u jednostupanjskom zupčanom prijenosniku

Za poznate veličine momenta odnosno snaga može se faktor korisnog djelovanja izračunati (vrijednosti  $T_B / T_A$  dobivene, na primjer, mjerenjima):

$$\eta = \frac{T_B}{iT_A} = \frac{\frac{T_B}{n_B}}{\frac{T_A}{n_A}} = \frac{\mu}{\nu} \quad (3.18)$$

U gornjoj jednadžbi  $\mu$  zovemo faktorom pretvorbe momenta, a  $\nu$  faktorom pretvorbe brzine.

Ako se poznaju parcijalni gubici, može se jednadžba (3.18) pisati kao:

$$\eta = \frac{P_B}{P_A} = \frac{P_B}{P_B + P_z + P_b + P_l} \quad (3.18.a)$$

## 1.11 Osnove dinamike prijenosnika

U dinamici prijenosnika susrećemo se većinom s problemima dinamike rotora odnosno diskova, kada se radi o samom prijenosniku, a problem se proširuje i na translaciju kada prijenosnik gledamo kao dio nekog sustava. Kada se radi o planetarnim prijenosnicima i složenim gibanjima radnog stroja, može se pojaviti problem sfernog gibanja i problem efekta giroskopa. Zastupljena je i dinamika oscilatornog gibanja sustava, većinom s jednim stupnjem slobode gibanja. Važnost dinamike osobito je važna kod brzohodnih prijenosnika. U prigonskim sustavima najjednostavnijeg tipa, bez uključno-isključnih spojki, mora pogonski stroj postići nazivnu brzinu vrtnje u nekom vremenu. Za to vrijeme, osim postizanja nazivnog momenta, mora pogonski stroj proizvesti i moment za ubrzanje vlastitih masa, masa prijenosnika i masa radnog stroja. Većinu glavnih članova prijenosnika (remenice, tarenice, zupčanici itd.) smatramo krutim tijelima. Za ovaj slučaj diferencijalna jednadžba gibanja glasi:

$$J \frac{d\omega}{dt} = T_A - T_B = J\varepsilon \quad (3.19)$$

Ovdje je

$J$	- dinamički moment inercije
$\omega$	- kutna brzina
$T_A$	- moment pogonskog stroja
$T_B$	- moment otpora radnog stroja

U slučaju da je  $T_A - T_B$  neka funkcija vremena, množenjem sa  $dt$  i integriranjem od 0 do  $t$  dobit će se:

$$\omega - \omega_0 = \frac{1}{J} \int_0^t (T_A - T_B) dt$$

Kako je građa spomenutih elemenata takva da zapravo većinu momenta inercije čini masivni vijenac (zupčanika, remenice, tarenice), to se ovdje može koristiti reducirana masa. Za ovakve slučajeve reducirana masa iznosi:

$$m_{red} = \frac{J}{r^2} = \frac{mr^2}{2r^2} = \frac{m}{2} \quad (3.20)$$

a polumjer inercije:

$$i = \sqrt{\frac{mr^2}{2m}} = r\sqrt{0,5} = 0,707r$$

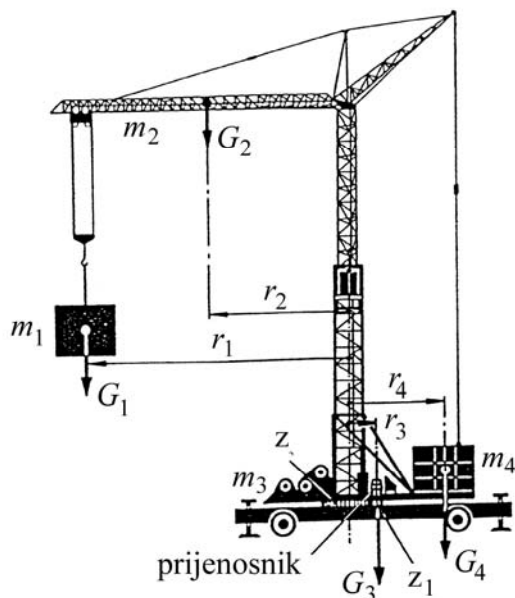
Ako se umjesto polumjera inercije uvede promjer inercije  $D_i = 2i$ , može se napisati:

$$J = mi^2 = m\left(\frac{D_i}{2}\right)^2 = \frac{GD_i^2}{4g} \quad (3.21)$$

odnosno

$$GD_i^2 = 4gJ \quad J = \frac{GD_i^2}{4g} \quad (3.22)$$

Veličina  $GD_i^2$  zove se zamašni moment i još uvijek se često koristi u praksi umjesto momenta inercije mase.



Slika 3.10. Primjer korištenja reducirane mase i zamašnih momenata

*Primjer:*

Dizalica na slici 3.10. služi kao lučki kran. Težine i pripadajući radijusi pojedinih sklopova dizalice prema toj slici jesu:

$G_1 = 2320 \text{ N}$	$r_1 = 36,6 \text{ m}$
$G_2 = 4500 \text{ N}$	$r_2 = 18,6 \text{ m}$
$G_3 = 11600 \text{ N}$	$r_3 = 1,8 \text{ m}$
$G_4 = 6600 \text{ N}$	$r_4 = 4,0 \text{ m}$

Prikazani prijenosnik služi za sva gibanja oko centralne osi u horizontalnoj ravnini. Ukupni prijenosni omjer prijenosnika jest  $i = 1375$ , a na izlazni par otpada  $i_2 = 10$ . Izlazna je brzina vrtnje  $1,6 \text{ min}^{-1}$ . Sve mase valja ubrzati za 3 sekunde. Potrebno je odabrati parametre pogonskog stroja uz pretpostavku da nema gubitaka.

S obzirom na zadane parametre sustava, može se odmah izračunati potrebna brzina vrtnje pogonskog stroja (motora):

$$\begin{aligned} n_A &= i n_B = 1,6 \cdot 1375 = 2200 \text{ min}^{-1} \\ T_B &= K_A J \varepsilon = K_A \frac{\omega}{t} \frac{1}{i_2} \sum_{j=1}^4 \frac{G_j D_{ij}^2}{4g} = K_A \frac{\pi n_2}{30 i_2 t} \sum_{j=1}^4 \frac{G_j D_{ij}^2}{4g} = \\ &= K_A \frac{\pi n_2 \sum_{j=1}^4 G_j D_{ij}^2}{120 g t i_2} \end{aligned}$$

$$G_1 D_1^2 = 2320 \cdot 51,7524^2 = 12431116 \text{ Nm}^2$$

$$G_2 D_2^2 = 4500 \cdot 26,32 = 6227280 \text{ Nm}^2$$

$$G_3 D_3^2 = 11600 \cdot 2,54522 = 150336 \text{ Nm}^2$$

$$G_4 D_4^2 = 5500 \cdot 5,6562 = 352000 \text{ Nm}^2$$

$$\sum_{j=1}^4 F_j D_{ij}^2 = 19160732 \text{ Nm}^2$$

$$\text{uz } K_A = 1,25$$

$$T_B = 1,25 \frac{\pi \cdot 1,6 \cdot 19160732}{120 \cdot 9,81 \cdot 3 \cdot 10} = 3408,9 \text{ Nm}$$

Potreban moment pogonskog motora bit će:

$$T_A = \frac{T_B}{i} = \frac{3408,9}{1375} = 2.479 \text{ Nm}$$

te za izračunatu brzinu vrtnje ( $n_1 = 2200 \text{ 1/min}$ ) snaga će biti:

$$P_A = \frac{\pi n_A}{30} T_A = \frac{\pi 2200}{30} 2.479 \approx 600 \text{ W}$$

Naravno, ovu bi snagu trebalo uvećati za gubitke, a konačna nazivna snaga pogonskog stroja zavisi i od njegove karakteristike (vidi poglavlje 5).

