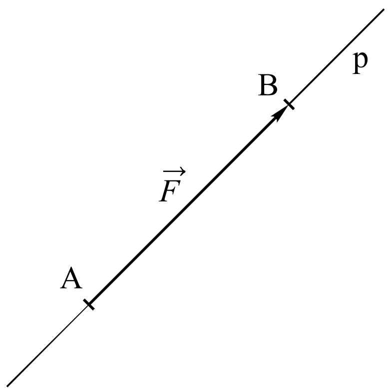
# STATIKA

Statika je grana mehanike u kojoj se predočavaju stanja mirovanja tijela, kada su opterećenja koja na njih djeluju u međusobnoj ravnoteži.

## Sila, moment i spreg sila

**Sila** je određena veličinom, pravcem djelovanja, smjerom i hvatištem. Znači sila je usmjerena veličina ili vektor.




Dužina AB predstavlja u nekom mjerilu veličinu sile F, pravac njezinog djelovanja je na pravcu p, smjer djelovanja prikazan je strelicom, a hvatište sile F je točka A.

Hvatište sile se kod krutog tijela može po volji pomicati po pravcu njezinog djelovanja.

Jedinica za veličinu sile je **newton** (njutn) – $\mathrm{N} = \dfrac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}^2}$.

Sile koje djeluju na neko tijelo izvana nazivaju se vanjskim silama, a sile koje djeluju u tijelu i opiru se djelovanju vanjskih sila – unutarnjim silama.

Vanjske sile mogu biti raspoređene na površinu (npr. hidrostatski tlak), po volumenu (gravitacijske sile, magnetske sile) ili djeluju koncentrirano u jednoj točki.

**Moment sile** (statički moment sile) je umnožak sile i udaljenosti pravca njezinog djelovanja od osi ili točke prema kojoj taj moment djeluje. Moment sile određen je veličinom i smjerom djelovanja, može se prikazati vektorom, a najčešće se opisuje veličinom i zakrivljenom strelicom oko osi ili točke u smjeru djelovanja momenta.

Veličina momenta je

$$M = F \cdot a$$

gdje je a krak sile F u odnosu na os ili točku njezinog djelovanja.

Moment rezultante obzirom na neku os ili točku jednak je sumi momenata njezinih komponenata u odnosu na istu os ili točku (momentno pravilo ili Varignonov teorem):

$$M_{\mathrm{FR}} = F_{\mathrm{R}} \cdot a_{\mathrm{R}} = M_{\mathrm{F1}} + M_{\mathrm{F2}} + ..... + M_{\mathrm{Fn}} = \sum M_{\mathrm{F}}$$

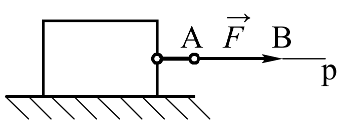
**Spreg sila** (par sila) čine dvije sile jednake po veličini s paralelnim pravcima djelovanja, a suprotnog smjera. Razmak između ovih sila naziva se krak sprega sila.

Veličina **momenta** sprega sila iznosi:

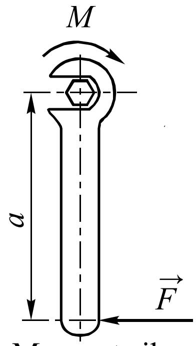
$$M = F \cdot b$$

Jedinica za moment sile i moment sprega sila je jednak, te se može pojednostavljeno reći da je jedinica za veličinu momenta – **Nm** (njutn-metar) ili **Nmm** (njutn-milimetar). Nmm ima specifičnost primjene u strojarstvu.

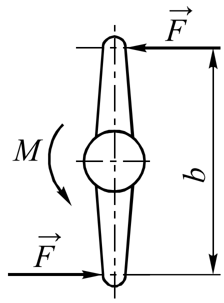
Vanjske sile i momenti koji djeluju na neko tijelo, odnosno strojni dio, predstavljaju njegovo **opterećenje**.




Sila




Moment sile



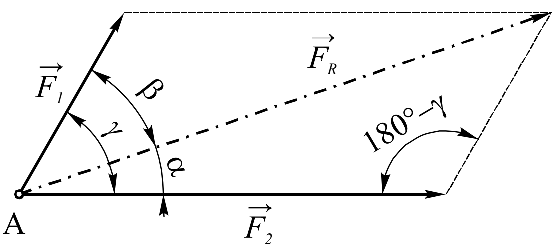

Spreg sila

## Sile u ravnini

### Sastavljanje i rastavljanje sila

Sile mogu na jedno tijelo djelovati u jednoj ili više točaka.

*1. Sile djeluju u jednoj točki*




Paralelogram sila

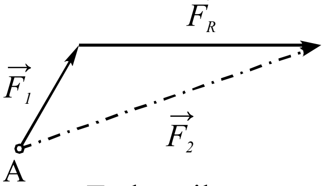
Ako u jednoj točki djeluju dvije sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ one se sastavljaju u rezultantu $\vec{F}_R$ po zakonu paralelograma. Djelovanje rezultante $\vec{F}_R$ u točki A jednako je zajedničkom djelovanju sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ u toj istoj točki. Vektorski zbroj sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ daje rezultantu $\vec{F}_R$ : $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Sile se mogu zbrajati analitički ili grafički. Zbroj sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ dobiva se analitički kao veličina rezultante $\vec{F}_R$ pomoću kosinusovog poučka:

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(180° - \gamma)} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F \cdot_1 F_2 \cdot \cos\gamma}$$

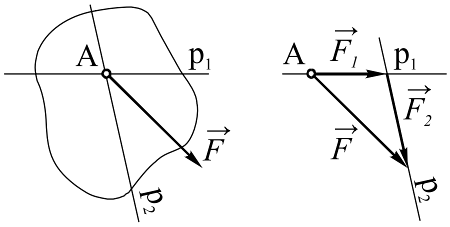
Kutevi α i β dobivaju se iz sinusovog poučka:

$$\frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{F_R}{\sin(180° - \gamma)}$$



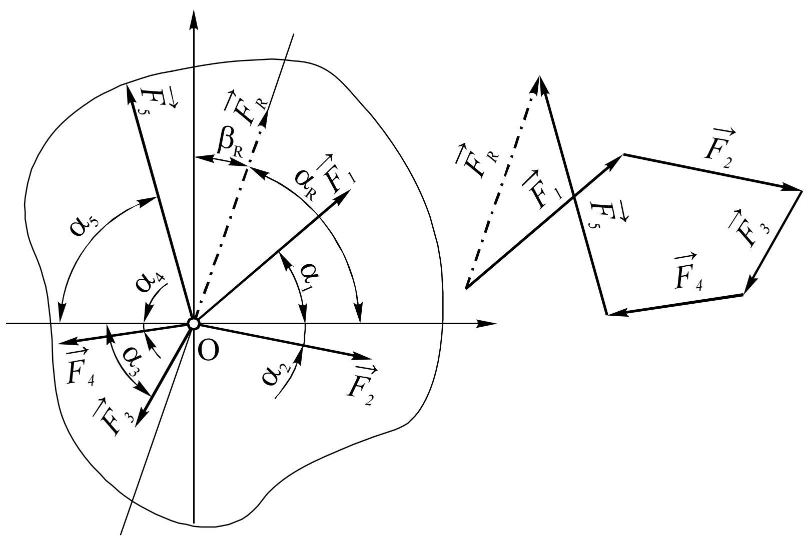

Trokut sila

Grafički se dvije sile sastavljaju u rezultantu crtanjem trokuta sila. U odabranom mjerilu crta se sila $\vec{F}_1$ po veličini, pravcu i smjeru djelovanja i na nju nadovezuje sila $\vec{F}_2$. Spojnica početka prve sile i kraja druge predstavlja rezultantu $\vec{F}_R$. Smjer rezultante suprotan je smjeru obilaženja komponenata, a pravac djelovanja i veličina rezultante $\vec{F}_R$ odgovara nacrtanom trokutu sila.




Rastavljanje sile u dva pravca

Obrnutim postupkom od prethodnog rastavlja se sila u dvije komponente. Zadana sila $\vec{F}$, koju treba rastaviti u dva pravca $p_1$ i $p_2$, nacrta se u izabranom mjerilu paralelno s njenim pravcem i smjerom djelovanja. Zatim se povlače paralele s pravcima $p_1$ i $p_2$, pri čemu treba povući jedan pravac kroz početak zadane sile, a drugi kroz vrh sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ su tražene komponente sile $\vec{F}$ u pravcima $p_1$ i $p_2$, a njihov smjer obilaženja suprotan je smjeru zadane sile.




Sastavljanje sila u rezultantu

Kada u nekoj točki djeluje više od dvije sile, rezultanta se dobiva crtanjem poligona sila. Sile se nanose u izabranom mjerilu paralelno prema **planu položaja** jedna za drugom – spojnica početka prve sile i kraja posljednje sile u **poligonu sila** je tražena rezultanta $\vec{F}_R$, čiji je smjer suprotan smjeru obilaženja zadanih sila. Hvatište rezultante u planu položaja je točka 0 (zajedničko hvatište zadanih sila), a pravac djelovanja $p$ je paralela povučena s rezultantom iz **plana sila**. Redoslijed kojim se nanose sile prilikom crtanja poligona sila može se potpuno proizvoljno izabrati.

Analitički se rezultanta od više zadanih sila dobiva pomoću metode projekcija. Suma svih projekcija zadanih sila na neku os jednaka je projekciji rezultante tih sila na tu istu os. Kroz hvatište sila odabere se pravokutni koordinatni sustav x-y i na isti se projiciraju sve sile. Ako općenito sila $\vec{F}$ zatvara s osi x kut α, veličine njenih projekcija na os x, odnosno y jesu:

$$F_x = F\cos\alpha\,,\ F_y = F\sin\alpha$$

Veličine projekcija rezultante na osi x i y dobivaju se zbrajanjem odgovarajućih projekcija zadanih sila:

$$F_{rx} = \Sigma F_x\ ,\ F_{Ry} = \Sigma F_y$$

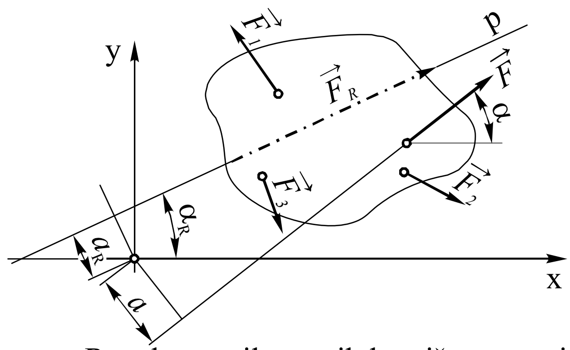
a veličina rezultante određuje se pomoću Pitagorinog poučka

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

Pravac i smjer djelovanja rezultante određeni su kutevima njezinog nagiba prema osi x i y. Kutevi nagiba $\alpha_R$ i $\beta_R$ mogu se odrediti iz odnosa:

$$\cos\alpha_R = \frac{F_{Rx}}{F_R}\ ,\ \cos\beta_R = \frac{F_{Ry}}{F_R}$$

## 2. Sile djeluju u raznim točkama



Rezultanta sila raznih hvatišta u ravnini

Sile koje djeluju u ravnini na jedno tijelo u raznim točkama mogu se također zamijeniti jednom rezultantom, a postupak za sastavjanje ovih sila u rezultantu može opet biti bilo analitički, bilo grafički.

Pri analitičkom postupku sastavljanja sila služimo se opet metodom prijiciranja sila na odabrani pravokutni (ortogonalni) koordinatni sustav s osima x i y. Projekcije zadanih sila na osi x i y iznose:

$$F_x = F\cos\alpha\,,\; F_y = F\sin\alpha$$

Komponente rezultante u pravcima osi x i y:

$$F_{Rx} = \Sigma F_x\,,\; F_{Ry} = \Sigma F_y$$

Veličina rezultante

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

Nagib pravca djelovanja rezultante $\vec{F}_R$ prema osi x:

$$\cos\alpha_R = \frac{F_{Rx}}{F_R}$$

Položaj pravca djelovanja rezultante $\vec{F}_R$ određuje se pomoću momentnog pravila:

$$a_R = \frac{\Sigma M_F}{F_R}$$

gdje je: $a_R$ - udaljenost pravca djelovanja rezultante od ishodišta koordinatnog sustava

M$_F$ – moment sile $F$ prema ishodištu ( $(M_F = F \cdot a)$

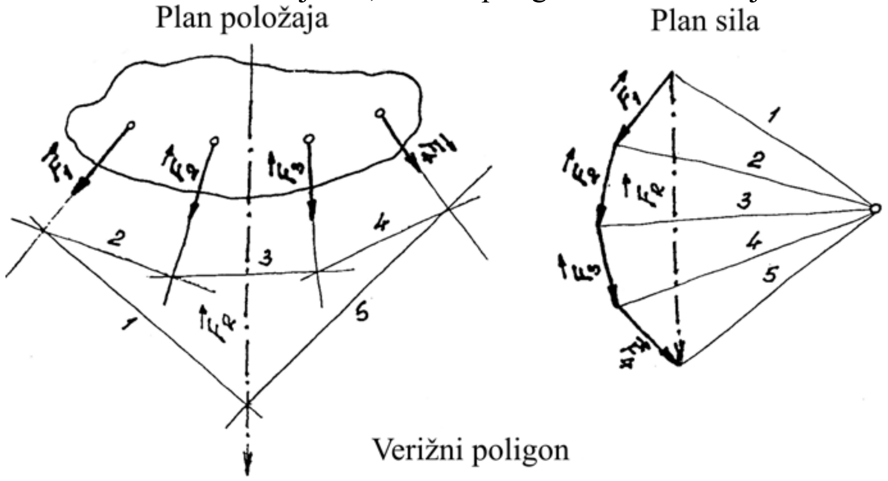
$F_R$ – veličina rezultante

Opaska: Pri zbrajanju sila koje djeluju u istom pravcu treba sile sa suprotnim smjerovima zbrajati kao veličine sa suprotnim predznacima. Tako će pri analitičkom postupku sastavljanja sila komponente tih sila, čiji se smjer poklapa sa smjerom pozitivne poluosi koordinatnog sustava imati pozitivni predznak, a komponente suprotne tom smjeru negativni.

Grafički se sile koje djeluju na jedno tijelo u jednoj ravnini, a imaju različita hvatišta, sastavljaju u rezultantu pomoću **plana sila** i **verižnog poligona**. Prema planu položaja, koji se nacrta u izabranom mjerilu, crta se poligon sila i određuje veličina i smjer rezultante. Pravac djelovanja rezultante u planu položaja određuje se crtanjem verižnogpoligona. U planu sila (poligonu sila) odabere se po volji točka ***P*** kao **pol**, a zatim se crtaju

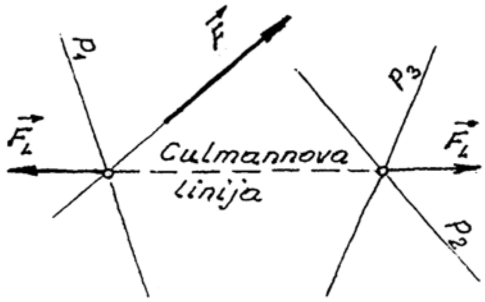
Plan položaja

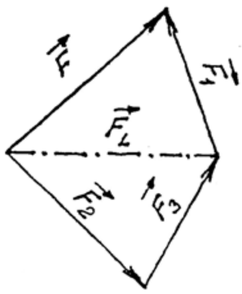
Plan sila



Verižni poligon

**polne zrake**, kao spojnice svih početaka i krajeva sila s odabranim polom *P*, koje se označe brojevima od 1 do n. U planu položaja produže se pravci djelovanja sila, te se unose polne zrake paralelno s onima u planu sila. Pri tom treba paziti da se po dvije polne zrake sijeku upravo na pravcu djelovanja one sile s kojom te polne zrake čine trokut (polne zrake u stvari su pomoćne sile). Sjecište prve polne zrake s pravcem sile $\vec{F}_1$ odabere se po volji. Kako polne zrake 1 i 5 čine s rezultantom u planu sila trokut, to će i pravac rezultante u planu položaja prolaziti kroz njihovo sjecište, a bit će paralelan s pravcem rezultante iz plana sila.



Rastavljanje poznate sile u tri zadana pravca, koji se ne sijeku u istoj točki, izvodi se grafički pomoću tzv. **Culmannove metode**. Silu $\vec{F}$ treba rastaviti u tri komponente s pravcima djelovanja $p_1$, $p_2$ i $p_3$. Sjecište pravca djelovanja sile $\vec{F}$ s jednim od zadanih pravaca spaja se sa sjecištem preostalih dvaju pravaca (Culmannova linija). Sila $\vec{F}$ rastavlja se najprije u komponente $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_L$, a zatim se sila $\vec{F}_L$ rastavlja u komponente $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$.

Sile $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ su tražene komponente sile $\vec{F}$.

## Ravnoteža

Sustav sila koje djeluju na neko tijelo nalazi se u ravnoteži ako njihovo zajedničko djelovanje neće pokrenuti tijelo iz stanja mirovanja ili jednolikog pravocrtnog gibanja.

**Analitički uvjeti ravnoteže** u općem slučaju sila **u ravnini** dani su jednadžbama:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_R = 0 \qquad \sum \vec{M} = \vec{M}_{rez} = 0$$

**Grafički uvjeti ravnoteže** ispunjeni su ako je poligon sila i verižni poligon zatvoren. U poligonu sila moraju sve sile imati isti smisao obilaženja. Pri ravnoteži triju sila trokut sila mora biti zatvoren (s istim smjerom obilaženja), a u planu položaja sve tri sile moraju se sjeći u jednoj točki.

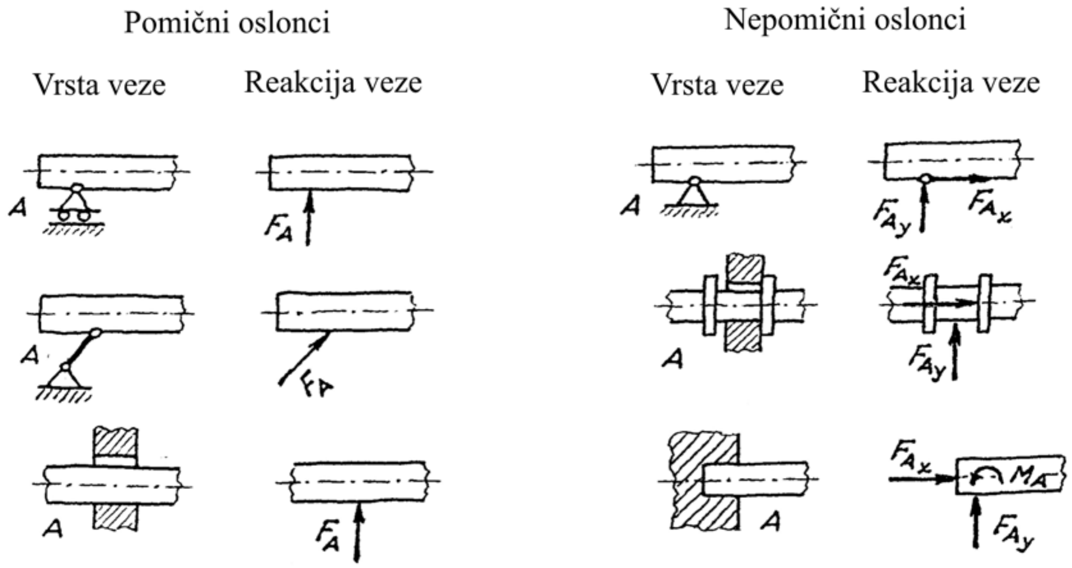
Za svako tijelo koje se nalazi u statičkoj ravnoteži mogu se iz postavljenih statičkih uvjeta ravnoteže određivati nepoznate veličine. Ako broj nepoznatih veličina nije veći od broja uvjeta ravnoteže, onda promatrani sustav smatramo statički određenim. Suprotno, ako je broj nepoznatih veličina veći od mogućeg broja postavljenih uvjeta ravnoteže sustav je statički neodređen.

Za analitičko pronalaženje nepoznatih veličina statički određenih sustava potrebno je primijeniti slijedeći redoslijed zahvata:

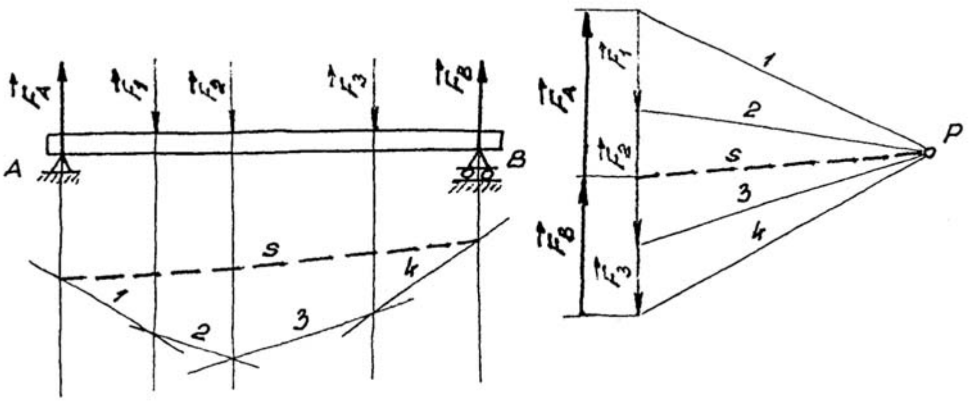
- oslobođiti tijelo njegovih veza s okolinom;
- odabrati koordinatni sustav i ucrtati reakcije veza;
- odabrati i napisati jednadžbe koje na najjednostavniji način izražavaju uvjete ravnoteže;
- riješiti potrebne geometrijske odnose;
- rješavanjem jednadžbi ravnoteže izračunati nepoznate veličine.

Oslobađanje tijela njegovih veza s okolinom znači zamisliti da su sve veze (oslonci) uklonjene, a iste zamijenjene silama (reakcijama veza), koje se putem veza prenose na tijelo. Te sile drže umjesto uklonjenih veza tielo u ravnoteži. Oslonci (veze) mogu biti pomični i nepomični.

Neke osnovne vrste oslonaca, te za njih ucrtane reakcije veza:




Pri grafičkom određivanju nepoznatih reakcija veza koriste se grafički uvjeti ravnoteže. Kod sustava paralelnih sila koje djeluju na tijelo, grafičko određivanje reakcija vrši se pomoću verižnog poligona. Spajanjem presjecišta prve i posljednje polne zrake u planu položaja s pravcima djelovanja reakcija $F_A$ i $F_B$ dobiva se završna stranica ili tzv. zaključnica verižnog poligona. Paralela sa zaključnicom povučena kroz polnu točku P u poligonu sila (planu sila) određuje veličine reakcija $F_A$ i $F_B$.




Zaključnica verižnog poligona

## Sile u prostoru

Sila se u prostoru može rastaviti u tri međusobno okomite komponente prema odabranom prostornom ortogonalnom koordinatnom sustavu. Ako su kutevi nagiba sile $\vec{F}$ prema osima x, y i z odabranog koordinatnog sustava α, β i γ, onda su njezine komponente:

$$F_x = F\cos\alpha$$

$$F_y = F\cos\beta$$

$$F_z = F\cos\gamma$$

Inverzno se veličina sile $\vec{F}$ može odrediti iz njezinih triju poznatih međusobno okomitih komponenata prema izrazu:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Rezultanta više sila koje djeluju u prostoru u istoj točki određuje se preko komponenata rezultante na osi x, y i z:

$$F_{Rx} = \sum F_x \qquad F_{Ry} = \sum Fy \qquad F_{Rz} = \sum F_z$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2}$$

U općem slučaju sila u prostoru analitički uvjeti ravnoteže određeni su sa šest jednadžbi:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum M_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad \sum M_y = 0$$

$$\sum F_z = 0 \qquad \sum M_z = 0$$

## Težište

Ako zamislimo tijelo rastavljeno u mnogo malih dijelova, na svaki takav dio djeluje njegova težina $\Delta G$. Rezultanta svih paralelnih sila $\Delta G$ je težina tijela $G = \sum \Delta G$. Bez obzira na položaj tijela, pravac djelovanja sile $G$ probada tijelo uvijek u istoj točki – u težištu tijela. Kod homogenih tijela (tijela koja imaju u svim točkama ista mehanička svojstva) težište se tijela poklapa s težištem volumena. Pri određivanju težišta koriste se statički uvjeti ravnoteže, koji vrijede za sustav paralelnih sila.

### Analitičko određivanje težišta

Pri određivanju težišta materijalne linije zamisli se linija rastavljena na više dijelova, čija težišta su nam poznata. U nekom odabranom koordinatnom sustavu dobivaju se koordinate težišta:

$$x_0 = \frac{\sum xl}{l_0} \qquad y_0 \frac{\sum yl}{l_0}$$

gdje je l dužina svakog pojedinog dijela materijalne linije ukupne dužine $l_0$, a, x i y su koordinate težišta pojedinih dijelova.

Slično se određuju koordinate težišta površina

$$x_0 = \frac{\sum x\mathrm{A}}{\mathrm{A}_0} \qquad y_0 = \frac{\sum y\mathrm{A}}{\mathrm{A}_0}$$

gdje su A dijelovi površine $A_0$, čije se težište traži, a, x i y koordinate njihovih težišta.

Koordinate težišta volumena $V_0$:

$$x_0 = \frac{\sum xV}{V_0} \qquad y_0 = \frac{\sum yV}{V_0} \qquad z_0 = \frac{\sum zV}{V_0}$$

x, y i z koordinate su težišta pojedinih volumena V.

Pri upotrebi navedenih izraza za izračunavanje koordinata težišta površina i volumena izrezani dijelovi (rupe, provrti i sl.) uzimaju se s negativnim predznakom. Ako je poznata jedna os simetrije, ona je ujedno i pravac na kojem leži težište.

U općem slučaju, kada rastavlja na jednostavnije dijelove nije moguće, upotrebljavaju se izrazi u integralnom obliku za određivanje koordinata težišta. Primjerice za težište površine će u tom slučaju vrijediti

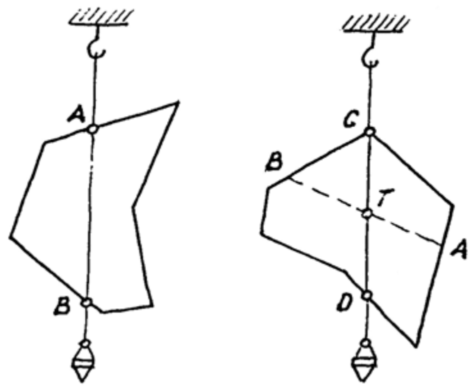
$$x_0 = \frac{\int x dA}{A_0} \qquad y_0 = \frac{\int y dA}{A_0}$$

**Grafičko određivanje težišta**

Zadana površina rastavi se na dijelove s poznatim težištem. Od pojedinih težišta povlače se paralele (pravci djelovanja sila) u dva međusobno okomita pravca. U određenom mjerilu crta se plan u oba međusobno okomita pravca. Sile predstavljaju površine pojedinih dijelova. Pomoću verižnih poligona određuju se pravci djelovanja rezultanata u planovima položaja za oba pravca djelovanja sila (veličina površina). U sjecištu oba pravca djelovanja rezultantnih sila površina nalazi se traženo težište površine.

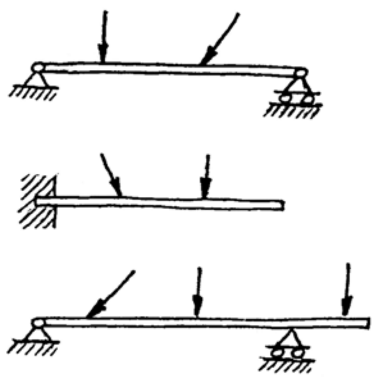
**Eksperimentalno određivanje težišta**

Tijelo se objesi o tanku savitljivu nit i ispod objesišta se zacrta na tijelu vertikala. Promjenom položaja objesišta i ponovnim zacrtavanjem vertikala, dobiva se u zajedničkom sjecištu svih tako ucrtanih vertikala težište tog tijela.




## Puni nosači

U mehanici se gredom naziva konstrukcijski element, čije su uzdužne dimenzije velike prema dimenzijama poprečnog presjeka, a koji je opterećen na savijanje. Tri su osnovna tipa grede: jednostavna greda s jednim pomičnim i jednim nepomičnim osloncem, uklještena greda ili konzola i greda s prepustom.



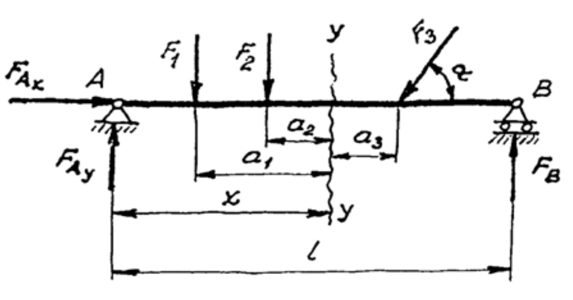
Jednostavna greda

Uklještena greda (konzola)

Greda s prepustom

Opterećenje grede može biti koncentriranom silom, jednolikim ili nejednolikim raspodijeljenim opterećenjem uzduž grede (kontinuirano opterećenje) ili u obliku sprega sila (moment).

Uzduž opterećene grede (npr. osovine, vratila) javljaju se momenti savijanja, poprečne sile i uzdužne sile. Veličine navedenih opterećenja najčešće se mijenjaju uzduž grede.



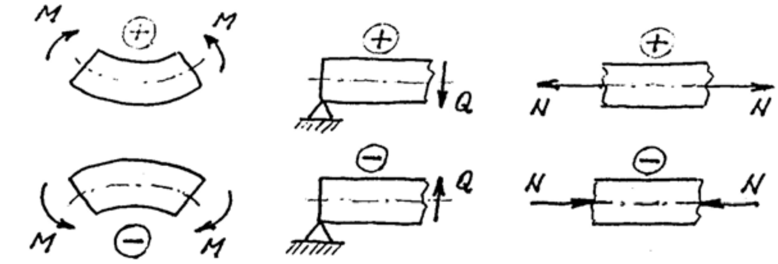

U nekom promatranom presjeku y-y grede bit će **moment savijanja** jednak algebarskoj sumi statičkih momenata svih vanjskih sila lijevo ili desno od tog presjeka. Dakle

$$M_x = F_{Ay} \cdot x - F_1 \cdot a_1 - F_2 \cdot a_2$$

odnosno

$$M_x = F_B(l - x) - F_3 \cdot a_3 \cdot \sin\alpha$$

Moment savijanja smatramo pozitivnim, ako se pod njegovim djelovanjem greda savija s izbočenom stranom prema dolje, a negativnim ako je izbočena strana prema gore.




Moment savijanja Poprečne sile Uzdužne sile

Definicije predznaka opterećenja

**Poprečna sila** u nekom presjeku, jednaka je sumi projekcija svih vanjskih sila (lijevo ili desno od promatranog presjeka) na os, koja stoji okomito na uzdužnu os grede. U presjeku y-y grede poprečna sila iznosi:

$$Q=F_{Ay}-F_1-F_2$$

odnosno

$$Q=F_B-F_3 \sin \alpha$$

Poprečna sila je pozitivna ako je za dio lijevo od presjeka usmjerena prema gore, a za desni dio grede prema dolje.

**Uzdužna sila** u nekom presjeku grede jednaka je sumi projekcija svih vanjskih sila lijevo ili desno od tog presjeka grede na njezinu uzdužnu os. Uzdužnu silu, koja opterećuje gredu na vlak, smatramo pozitivnom, a na tlak negativnom. U promatranom presjeku y-y uzdužna sila iznosi

$$N=-F_{Ax} \text{ odnosno } N=F_3 \cos \alpha$$

Promjena momenta savijanja, poprečne sile i uzdužne sile uzduž grede prikazuje se dijagramima.

Međusobna zavisnost momenta savijanja, poprečne sile i relativnog opterećenja u smjeru uzdužne osi grede (osi x) dana je derivacijskim matematičkim izrazima:

$$Q=\frac{dM}{dx} \qquad Q=-\frac{dQ}{dx}=-\frac{d^2M}{dx^2}$$

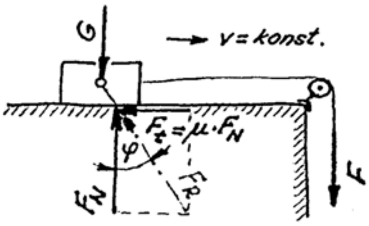
Na mjestima gdje djeluju koncentrirane sile M-dijagram se lomi. Ako na gredi između dvije sile nema drugog opterećenja, M-dijagram je pravac. Momentni dijagram jednolikog kontinuiranog opterećenja je parabola drugog reda. Na mjestu gdje Q-dijagram prolazi kroz nulu M-dijagram ima maksimum ili minimum.

Grafički momentni dijagram predstavlja u nekon određenom mjerilu površina verižnog poligona nacrtanog za promatrano opterećenje grede (Culmannova momentna površina). Ordinate y (mjerene vertikalno od zaključnice) pomnožene polnom udaljenošću H daju momente savijanja u pojedini presjecima.

$$M=H\cdot y$$

Ordinatu y treba izmjeriti u mjerilu za dužine, a H u mjerilu za sile.

## Trenje




Pri klizanju tijela težine *G* konstantnom brzinom po ravnoj podlozi javlja se na dodirnoj površini tijela s podlogom sila trenaj $F_t$, koja je usmjerena suprotno gibanju tijela. Tijelo prema slici giba se pod dijelovanjem sile *F*, koja je upravo tolika da savladava silu trenja. Vertikalna komponenta reakcija podloge $F_N$ i horizontalna $F_T$ (sila trenja) stoje u omjeru

$$\frac{F_t}{F_N} = \tan q$$

Uz tan q=μ slijedi:

$$F_t = \mu \cdot F_N$$

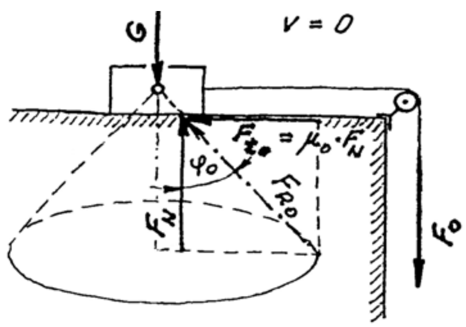
U ovom izrazu **μ** je **faktor trenja klizanja** koji zavisi od:

- vrste materijala dodirnih površina;
- stanja dodirnih površina (hrapavosti);
- podmazivanja dodirnih površina (suho, polusuho ili mješovito i tekuće trenje);
- površinskog pritiska $p = \frac{F_N}{A}$ (A=dodirna površina)
- brzine klizanja.

Faktor trenja μ određuje se eksperimentalno.

Budući da je **faktor trenja mirovanja μ₀**, kako su to pokusi pokazali, veći od faktora trenja klizanja, to će za tijelo u stanju mirovanja vrijediti

$$F_o \le \mu_o \cdot F_N$$




a najveća sila pri kojoj tijelo još miruje

$$F_o = F_{to} = \mu_o \cdot F_N$$

Kako je $\mu_o > \mu$, to je i $F_o > F$.

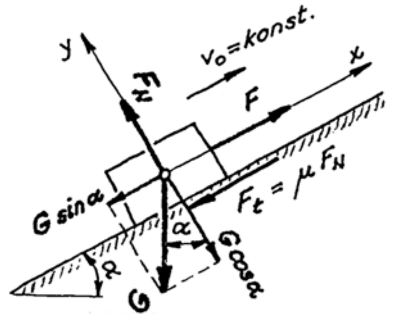
Poveća li se sila $F_o$ za mali iznos, tijelo će se početi gibati jednoliko ubrzano, dok će za održavanje jednolikog gibanja tijela silu trebati smanjit na iznos $F = \mu F_N$.

U graničnom slučaju ravnoteže ukupna reakcija podloge je:

$$F_{Ro} = \sqrt{F_N^2 + F_{to}^2} = F_N \sqrt{1 + \mu_o{}^2}$$

Kutevi $\varphi$ i $\varphi_o$ što ga reakcije $F_R$ i $F_{ro}$ zatvaraju s normalom nazivaju se **kutevi trenja**. Rotacijom pravca reakcije $F_{Ro}$ oko vertikale opisuje pravac konusnu plohu s vršnim kutem 2 $\varphi_o$- tzv. **konus trenja**. Ako se pravac ukupne reakcije nalazi unutar konusa trenja ili na njegovu plaštu (granični slučaj), tijelo je u statičkoj ravnoteži.

## Trenje na kosini



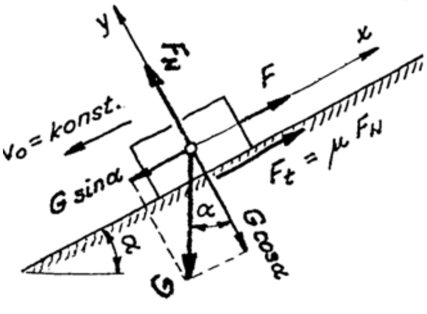

Sila koja je potrebna da tijelo težine $G$ vuče konstantnom brzinom uz kosinu nagiba α dobiva se iz uvjeta ravnoteže:

$$\sum F_x = 0 \qquad F - G\sin\alpha - Ft = 0$$

$$\sum Fy = 0 \qquad F_N - G\cos\alpha = 0$$

Odatle slijedi:

$$F = G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$



Za jednoliko spuštanje tijela niz kosinu jednadžbe ravnoteže glasit će:

$$\sum F_x = 0 \qquad F + \mu F_N - G\sin\alpha = 0$$

$$\sum Fy = 0 \qquad F_N - G\cos\alpha = 0$$

a potrebna sila za to spuštanje tijela konstantnom brzinom prema tim jednadžbama iznosit će

$$F = G\left(\mu\cos\alpha - \sin\alpha\right)$$

Najmanja sila koja će spriječavati da tijelo ne klizi niz kosinu

$$F_o = G\left(\mu_o\cos\alpha - \sin\alpha\right)$$

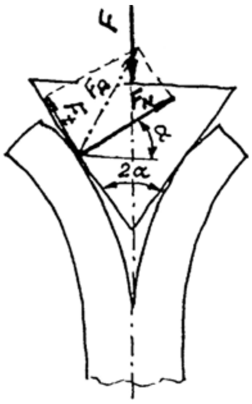
Da tijelo samo zbog sile trenja ostane u mirovanju na kosini (samokočnost kosine) mora biti ispunjen uvjet, koji slijedi iz

$$F_o = 0 \rightarrow G\left(\mu_o\cos\alpha - \sin\alpha\right) = 0$$

$$\mu_o \geq \tan\alpha \qquad \text{odnosno} \qquad \alpha \leq \varphi_o$$

**Trenje klina**

Sila potrebna za zabijanje klina iznosi



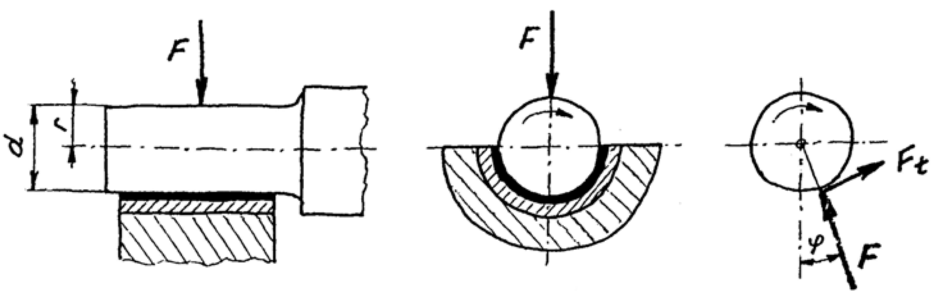

$$\begin{aligned} F &= 2F_N \cdot \sin\alpha + 2F_t\cos\alpha = \\ &= 2F_N \cdot \sin\alpha\alpha + 2\cdot\mu\cdot F_N\cos\alpha = \\ &= 2F_N(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \end{aligned}$$

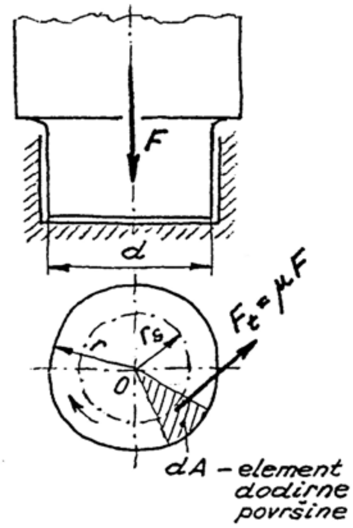
Sila potrebna za izvlačenje klina

$$\begin{aligned} F &= 2F_N \cdot \sin\alpha + 2F_t\cos\alpha = \\ &= 2F_N(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \end{aligned}$$

Sila $F_N$ je sila pritiska okomita na površinu klina, a $F_t = \mu \cdot F_N$ je sila trenja na površini klina.

**Trenje u kliznom ležaju**




Za **radijalni klizni ležaj** sila trenja na obodu rukavca iznosi $F_t = \mu \cdot F$.

$F$ je radijalna sila na ležaj, a μ faktor trenja klizanja.

Moment zbog trenja (moment trenja) bit će

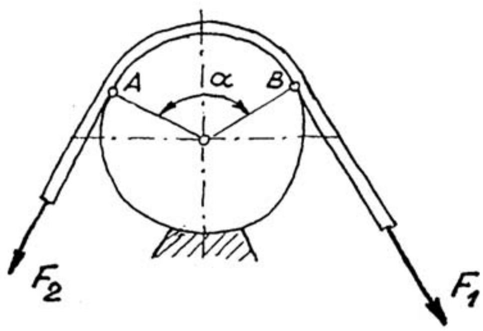
$$M_t = F_t \cdot \frac{d}{2} = \mu \cdot F \cdot r$$

Elementarna sila trenja kod **aksijalnog kliznog ležaja** prolazi kroz težište elementa dA dodirne površine. Za punu površinu A dodira rukavca s ležajem element površine je trokut spolumjerom udaljenosti njegovog težišta od osi vrtnje $r_s = 2r/3$, a ukupni moment trenja iznosi

$$M_t = r_s \cdot F_S \cdot F_r = \frac{2}{3} r \cdot \mu F$$

Ako je dodirna površina oslabljena (zbog utora i sl.) $r_S$ ima drugu vrijednost, no opet predstavlja udaljenost težišta elementa površine od osi vrtnje rukavca 0.

**Trenje užeta**




Za potpuno savitljivo uže prebačeno preko nepomičnog valjka neka su sile $F_1$ i $F_2$ u početnom trenutku jednake. Postupnim povećanjem sile $F_1$, uže ostaje još neko vrijeme u ravnoteži (zbog trenja između užeta i valja) do trenutka kada sila $F_1$ pretegne (granični slučaj ravnoteže). Ako se s $F_t$ označi ukupna sila trenja između užeta i valjka na luku AB, bit će:

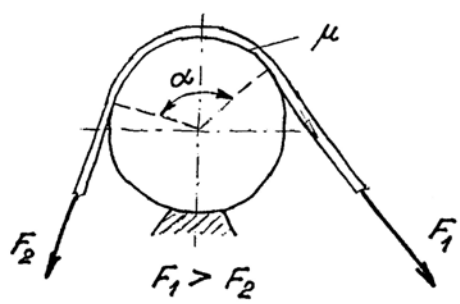
$$F_1 = F_2 + F_t$$

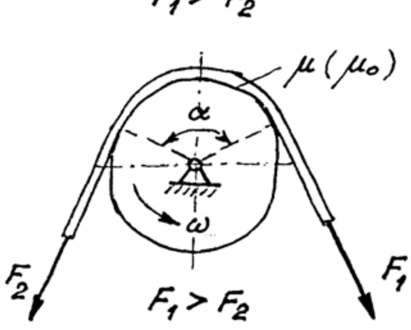
Razmatranjem ravnoteže elementarne dužine užeta i integriranjem ovih uvjeta ravnoteže po cijelom luku AB dobiva se međuzavisnost između sila $F_1$ i $F_2$, faktora trenja između užeta i valjka i obuhvatnog kuta užeta na valjku, izraženu **Eytelweinovom jednadžbom.**

$$F_1 = F_2 \cdot e^{\mu o \hat{\alpha}}$$

gdje je $\hat{\alpha}$ obuhvatni kut izražen u radijanima, $\mu_o$ faktor statičkog trenja između užeta i valjka, a e=2,718 … baza prirodnog ligaritma.

Obzirom na relativno gibanje užeta i valjka mogu nastupiti slijedeća tri slučaja:




1. Valjak miruje, a uže klizi po valjku. Između užeta i valjka je prisutan faktor trenja $\mu$. Sila u smjeru gibanja je veća i iznosi prema Eytelweinovoj jednadžbi

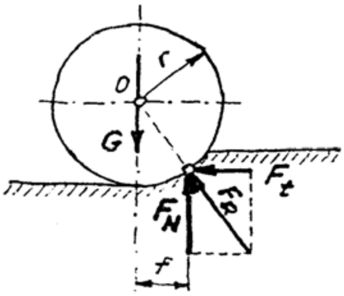
   $$F_1 = F_2 \cdot e^{\mu o \hat{\alpha}}$$

2. Uže miruje, a valjak se okreće (npr. pojasna kočnica). $\mu$ je faktor trenja klizanja. Sila u užetu usmjerena suprotno gibanju valjka veća je i opet iznosi

   $$F_1 = F_2 \cdot e^{\mu o \hat{\alpha}}$$

3. Uže i valjak miruje ili su u međusobnom relativnom mirovanju. Klizanja između užeta i valjka nema, te se računa s faktorom trenja mirovanja $\mu_o$. Primjena npr. kod remenskog prijenosa, užetnog prijenosa.

## Trenje valjanja




Pri valjanju valjka po podlozi javlja se otpor, koji se može prikazati momentom

$$M_v = F_N \cdot f$$

gdje je *f* faktor trenja valjanja s dimenzijom dužine, a određuje se eksperimentalno.

Valjanje je moguće ako je $\frac{f}{r} < \mu_o$

Faktor trenja valjanja u pravilu je bitno niži i od faktora trenja mirovanja i od faktora trenja klizanja.