

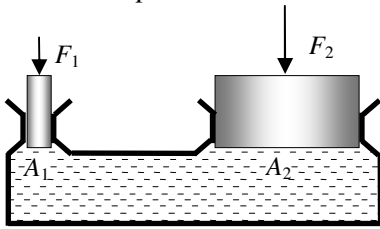
3. STATIKA FLUIDA

Osnovna jednažba statike (slučaj $a_i = 0$)

$$\rho f_i = \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad \text{ili} \quad \rho \vec{f} = \text{grad} p \quad (\text{izražava ravnotežu masenih sila i sila tlaka}).$$

Iz osnovne jednažbe statike imajući na umu svojstva gradijenta zaključuje se:

1) *Ako nema masenih sila ($f_i = 0$) slijedi da je tlak p konstantan. Pascalov zakon: Tlak narinut izvana na fluid u mirovanju širi se jednoliko u svim smjerovima. Ilustracija: hidraulička preša*



Tlakovi ispod stapova su jednaki, što znači da je

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \text{ili} \quad F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

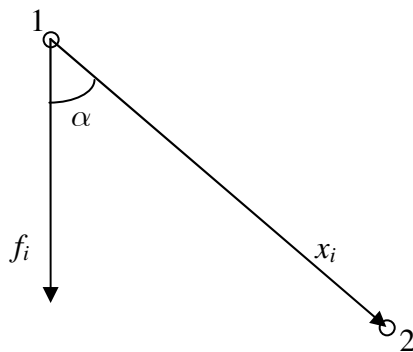
Što znači da dolazi do pojačanja sile.

- 2) *Tlak najbrže raste u smjeru grad p tj. u smjeru masene sile, a najbrže opada u smjeru $-\text{grad} p$ tj. u smjeru suprotnom od masene sile,*
- 3) *Budući da je grad p okomit na površinu $p = \text{konst.}$ promjena tlaka u okomitom smjeru na vektor masene sile je jednaka nuli. Drugim riječima, vektor masene sile je okomit na površine konstantnog tlaka (izobare).*

Također vrijedi:

- 4) *Granica dvaju fluida u mirovanju poklapa se s izobarom, te je vektor masene sile u svakoj točki okomit na razdjelnu površinu,*
- 5) *Vektor masene sile je usmjeren od razdjelne površine prema fluidu veće gustoće,*
- 6) *Na granici dvaju fluida tlak je neprekidan, ako se zanemare učinci površinske napetosti.*

Promjena tlaka između dvije točke (uz $\rho = \text{konst.}$ i $f_i = \text{konst.}$)



Iz osnovne jednažbe statike slijedi:

$$p_2 = p_1 + \rho f_i x_i$$

ili

$$p_2 = p_1 + \rho \vec{f} \cdot \vec{r} = p_1 + \rho |\vec{f}| |\vec{r}| \cos(\alpha)$$

Iz svojstva skalarnog produkta je jasno da se pri određivanju promjene tlaka može ili put projicirati na silu ili silu na put.

Očito je, ako se poveća tlak p_1 u točki 1, povećat će se i tlak p_2 u točki 2, odnosno u svim drugim točkama, što je bit Pascalova zakona koji kaže da se tlak narinut izvana na fluid u mirovanju širi jednoliko u svim smjerovima.

Promjena tlaka u mirujućem fluidu u polju sile teže ($f_i = -g\delta_{i3}$, $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$)

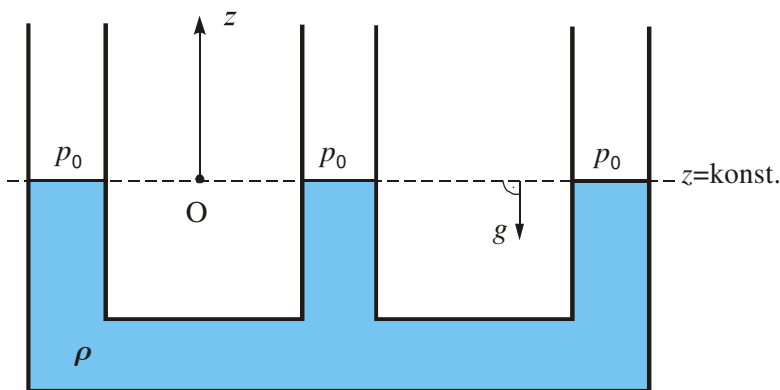
$$p = p_0 - \rho gz = p_0 + \rho gh \quad \text{ili} \quad \frac{p}{\rho g} + z = \frac{p_0}{\rho g} = \text{konst.}$$

gdje z označuje visinu, h dubinu, a p_0 tlak u ishodištu koordinatnog sustava.

$$\frac{p}{\rho g} = \text{visina tlaka}, \quad \left[\frac{p}{\rho g} \right] = L, \quad \left[\frac{p}{\rho g} \right]_{\text{SI}} = \text{m stupca fluida,}$$

$$\frac{p}{\rho g} + z = \text{piezometrička visina.}$$

Princip spojenih posuda

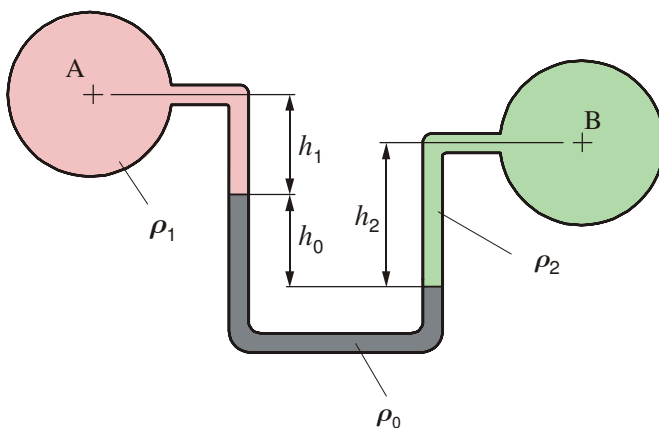


Ako homogena kapljevinna miruje u više međusobno spojenih posuda, tada će slobodne površine otvorene prema istom atmosferskom tlaku p_0 ležati u istoj izobari (za mirujući fluid to je horizontalna ravnina).

Hidrostatski manometri

Postupak za postavljanje jednadžbe manometra (jednadžbe promjene tlaka između dviju točaka koje se mogu međusobno spojiti kroz mirujući fluid)

Polazi se s tlakom u jednoj točki i tom se tlaku dodaju sve promjene tlaka oblika ρgh , (idući od meniskusa do meniskusa) i to s pozitivnim predznakom ako se ide prema dolje, a s negativnim ako se ide prema gore. Kada se dođe do druge točke tako dobiveni izraz se izjednačuje s tlakom u toj točki.



Primjer diferencijalnog manometra:

- jednadžba od točke B do točke A
 $p_B + \rho_2 gh_2 - \rho_0 gh_0 - \rho_1 gh_1 = p_A$

- jednadžba od točke A do točke B
 $p_A + \rho_1 gh_1 + \rho_0 gh_0 - \rho_2 gh_2 = p_B$

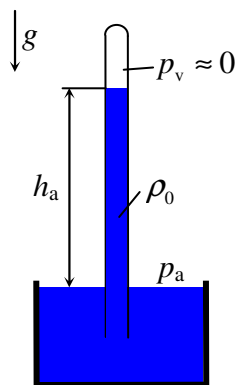
Napomena: Jednadžba manometra se može pisati i s manometarskim tlakovima u obje točke.

Apsolutni tlak p se mjeri od apsolutne nule (100% vakuum).

Manometarski tlak p_M je razlika apsolutnog p i atmosferskog tlaka p_a (mjeri se u odnosu na atmosferski tlak). Pozitivni manometarski tlak $p_M > 0$ se naziva pretlak, a negativni $p_M < 0$ podtlak.

$$p_M = p - p_a$$

Živin barometar je instrument za mjerenje atmosferskog tlaka (apsolutnog).



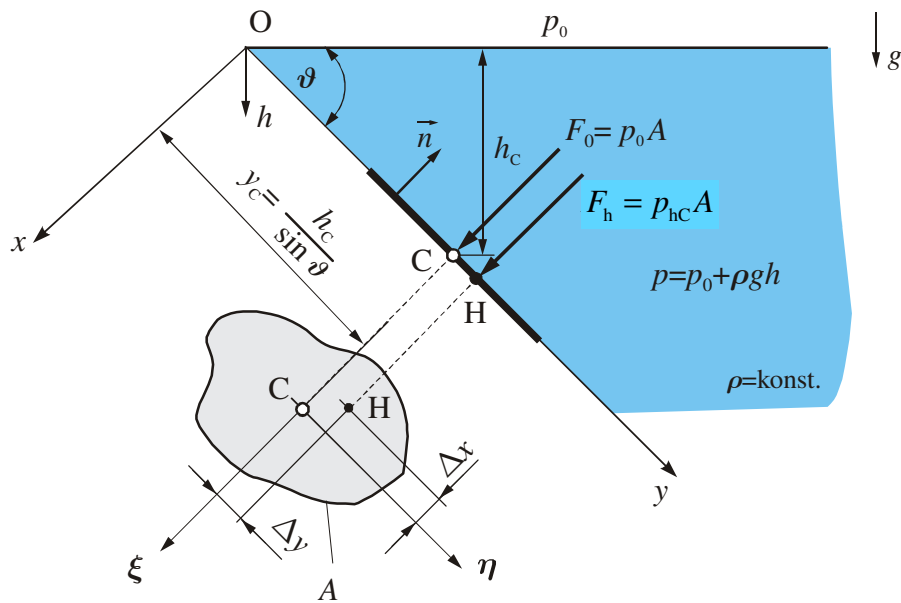
Slika shematski prikazuje živin barometar. Zamislimo da je cijevčica u trenutku uranjanja u posudu bila potpuno ispunjena živom, gustoće ρ_0 . Nakon uspostavljanja ravnoteže visina žive će se u cijevčici ustaliti na visini h_a , a iznad žive, u zatvorenom dijelu cijevčice bi teorijski bio vakuum. Realno će zbog vakuuma doći do „isisavanja“ molekula žive koje će se slobodno gibati u prostoru iznad kapljevite faze, čineći živinu paru. Naravno, čitavo vrijeme će neki atomi „iskakati“ iz kapljevite faze, a neki slobodni bivati privučeni u kapljevitu fazu, a kada se brojevi tih molekula izjednače, postići će se ravnotežno stanje, pri čemu će u prostoru iznad žive vladati tlak živinih para (tlak zasićenja) p_v .

Jednadžba hidrostatskog manometra, uz oznake prema slici glasi:

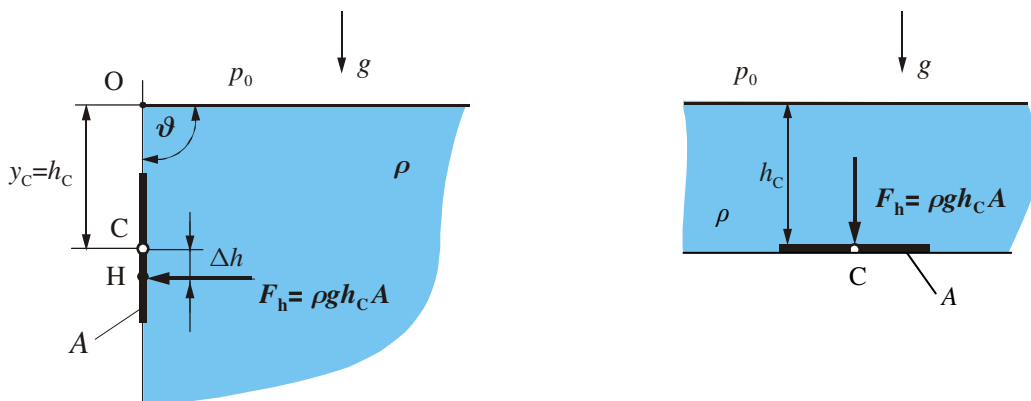
$$p_a = p_v + \rho_0 g h_a$$

Tlak zasićenja ovisi o temperaturi (raste s temperaturom), a za živu on iznosi 0,021 Pa kod temperature 0°C i 0,841 Pa pri temperaturi 40°C , što je zanemarivo u odnosu na mjereni atmosferski tlak koji je reda veličine 100000 Pa. Zbog toga se tlak p_v zanemaruje, tj. vrijedi $p_a = \rho_0 g h_a$.

Kao što je uvedena dogovorena (standardna) vrijednost gravitacije, tako se uvodi i dogovoreni atmosferski tlak, koji iznosi 760 mmHg ili 101325 Pa (izračunato s gustoćom žive 13595 kg/m^3 i standardnom gravitacijom $g=9,80665 \text{ m}^2/\text{s}$).

Sila tlaka na ravne površine

- Sila F_0 uslijed konstantnog tlaka p_0 okomita je na ravnu površinu A i djeluje od fluida prema površini u njenom težištu, a po veličini je: $F_0 = p_0 A$
- Sila F_h uslijed promjenjivog hidrostatskog tlaka $p_h = \rho gh$ okomita je na ravnu površinu A i djeluje od fluida prema površini u točki H , a po veličini je: $F_h = p_{hc} A = \rho gh_c A$ gdje je h_c dubina na kojoj se nalazi težište C površine A .
- Položaj točke H je u odnosu na težište C površine A definiran pomacima Δx i Δy za koje vrijedi: $\Delta y = \frac{I_{\xi\xi}}{y_c A}$ i $\Delta x = \frac{I_{\xi\eta}}{y_c A}$ gdje je $y_c = h_c / \sin \vartheta$ udaljenost težišta C od slobodne površine, mjereno u ravnini u kojoj se nalazi površina (udaljenost \overline{OC} prema slici), a $I_{\xi\xi}$ i $I_{\xi\eta}$ su glavni i centrifugalni moment inercije površine A u odnosu na osi ξ i η kroz težište, prema slici. Pomak Δx je za površine s barem jednom osi simetrije jednak nuli (vidjeti kao primjer tablicu koja prikazuje podatke o centrifugalnom momentu inercije $I_{\xi\eta}$).
- Za vertikalno uronjenu površinu prema slici vrijedi $y_c = h_c$. Za horizontalno uronjenu površinu ($\vartheta = 0$) $y_c \rightarrow \infty$ pa su prema gornjim izrazima $\Delta x = \Delta y = 0$, te će sila F_h djelovati u težištu površine, kao i za slučaj konstantnog tlaka p_0 .

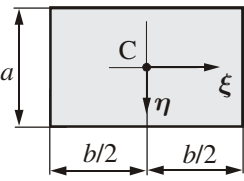
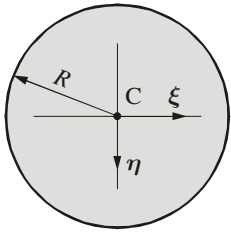
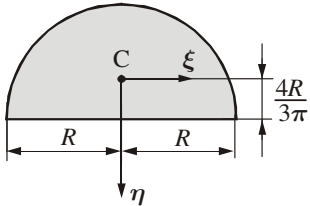
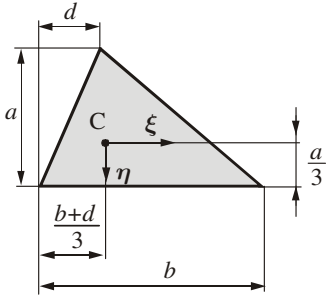
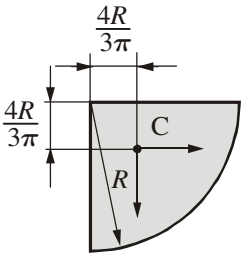


Momenti M_x i M_y sile hidrostatskog tlaka u odnosu na težište C površine ne zavise od dubine na kojoj se težište nalazi

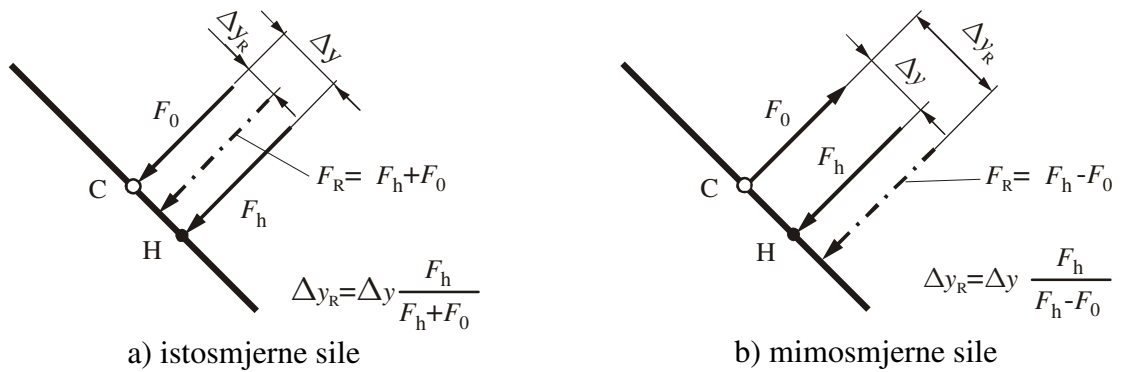
$$M_x = F_h \cdot \Delta y = \rho g h_c A \cdot \frac{I_{\xi\xi}}{y_c \cdot A} = \rho g I_{\xi\xi} \sin \vartheta$$

$$M_y = F_h \cdot \Delta x = \rho g h_c A \cdot \frac{I_{\xi\eta}}{y_c \cdot A} = \rho g I_{\xi\eta} \sin \vartheta$$

Geometrijska svojstva nekih površina

Geometrijski lik	Površina	$I_{\xi\xi}$	$I_{\eta\eta}$	$I_{\xi\eta}$
	$A = ab$	$\frac{ba^3}{12}$	$\frac{ab^3}{12}$	0
	$A = R^2\pi$	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	0
	$A = \frac{1}{2}R^2\pi$	$0,1098R^4$	$0,3927R^4$	0
	$A = \frac{ab}{2}$	$\frac{ba^3}{36}$		$\frac{ba^2}{72}(b-2d)$
	$A = \frac{1}{4}R^2\pi$	$0,05488R^4$	$0,05488R^4$	$-0,01647R^4$

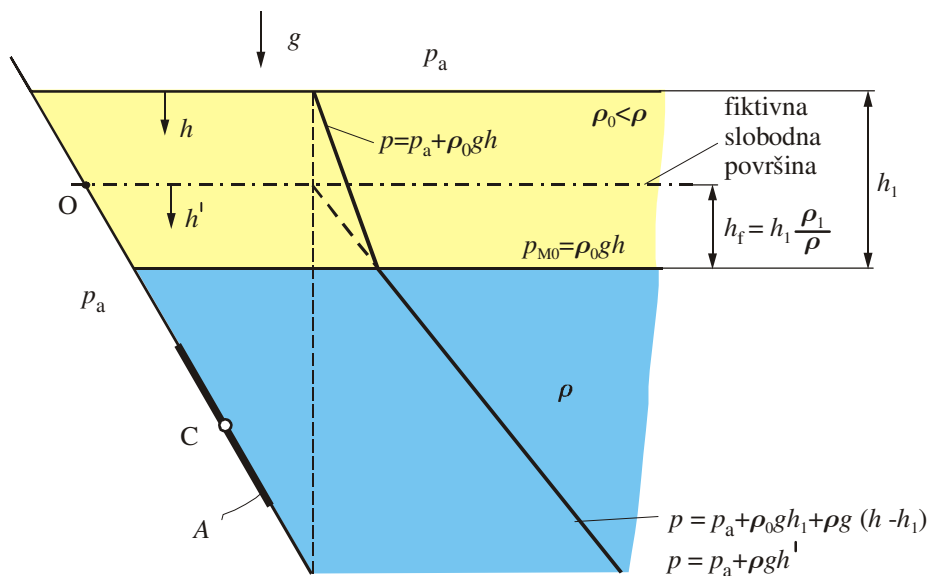
Položaj rezultantne sile $F_R = F_h + F_0$ za slučaj istosmjernih i mimosmjernih sila F_0 i F_h .



Fiktivna slobodna površina

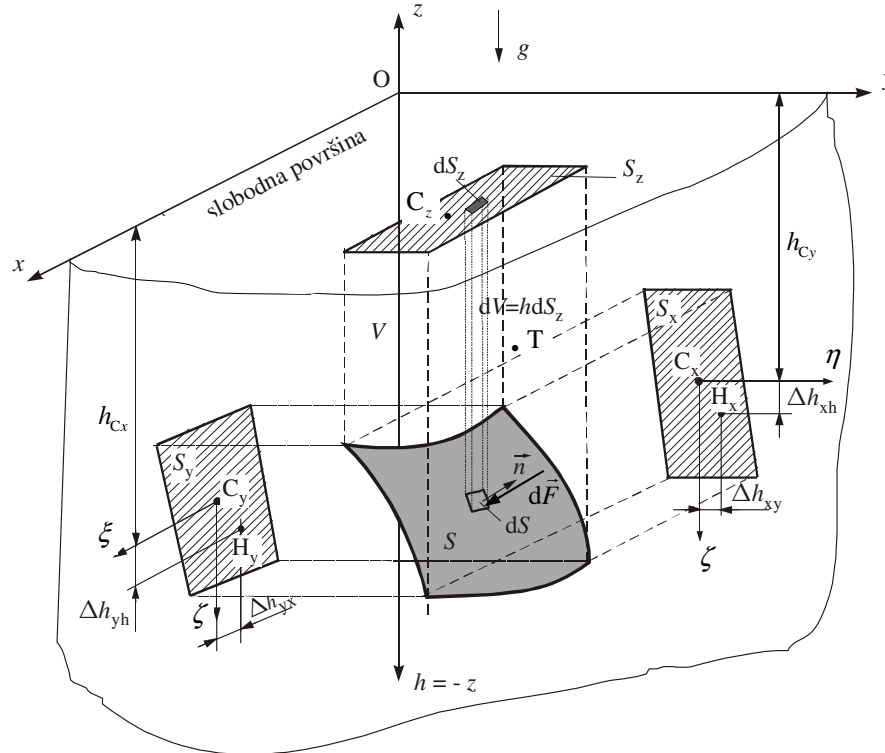
Ako je tlak s obje strane površine isti (slučaj otvorenog spremnika), sile konstantnog tlaka se poništavaju. Za slučaj zatvorenog spremnika rezultatna sila konstantnog tlaka se računa s manometarskim tlakom p_{M0} u spremniku. Računanje sile konstantnog tlaka (slučaju da je površina potpuno uronjena u fluid) može se izbjeći uvođenjem fiktivne slobodne površine. Fiktivna slobodna površina je udaljena od stvarne slobodne površine za visinu manometarskog tlaka $h_f = p_{M0} / \rho g$ (za slučaj pretlaka je iznad, a za slučaj podtlaka ispod stvarne slobodne površine). Ako fiktivna slobodna površina padne ispod težišta C površine, dubina h postaje negativna, a svi izrazi i dalje vrijede.

Fiktivna slobodna površina se može uvesti i za slučaj mirovanja dvaju fluida različitih gustoća prema slici.



Sila tlaka na zakrivljene površine

Sila tlaka na zakrivljenu površinu se razlaže na komponente u smjerovima osi. Zakrivljena površina S se projicira na koordinatne ravnine. Projekcija površine je pozitivna ako je kut između vektora normale i pozitivnog smjera osi manji od 90° (fluid je ispred površine S gledano iz pozitivnog smjera osi).



- Izrazi za komponente F_{0x} , F_{0y} , F_{0z} sile \vec{F}_0 uslijed konstantnog tlaka

$$F_{0x} = -p_0 S_x; \quad F_{0y} = -p_0 S_y; \quad F_{0z} = -p_0 S_z$$
- Izrazi za horizontalne komponente F_{hx} i F_{hy} sile uslijed promjenjivog hidrostatskog tlaka $p_h = \rho gh$ i za pomake hvatišta tih komponenti u odnosu na težišta projekcija su:

$$F_{hx} = -p_{hCx} \cdot S_x = -\rho gh_{Cx} S_x \quad F_{hy} = -p_{hCy} \cdot S_y = -\rho gh_{Cy} S_y$$

$$\Delta h_{xh} = \frac{I_{\eta\eta}}{h_{Cx} \cdot |S_x|} \quad \Delta h_{xy} = \frac{I_{\eta\xi}}{h_{Cx} \cdot |S_x|} \quad \Delta h_{yh} = \frac{I_{\xi\xi}}{h_{Cy} \cdot |S_y|} \quad \Delta h_{yx} = \frac{I_{\xi\xi}}{h_{Cy} \cdot |S_y|}$$

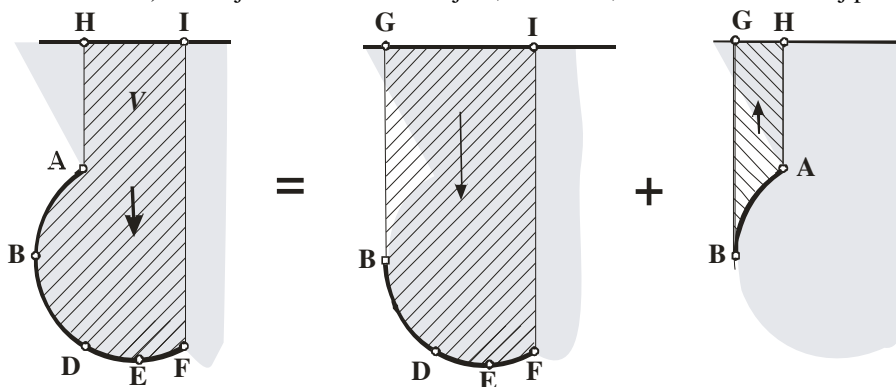
- Vertikalna komponenta F_{hz} sile hidrostatskog tlaka na površinu S je po veličini jednaka težini fluida koji se nalazi ili bi se nalazio u volumenu V između površine S i slobodne površine. Sila F_{hz} prolazi težištem volumena V . Predznak komponente sile F_{hz} ovisi o predznaku projekcije S_z , te se može pisati da je

$$F_{hz} = \mp \rho g V$$

Negativni predznak se odnosi na slučaj pozitivne projekcije površine S_z (fluid je iznad površine S), a pozitivan predznak za slučaj negativne projekcije S_z (fluid je ispod površine S).

- Ako se zakrivljena površina nalazi ispod slobodne površine sve komponente sile hidrostatskog tlaka djeluju od fluida prema površini.

Primjer: Vertikalna i horizontalna komponenta sile na zakrivljenu površinu ABDEF (prema slici) širine B (okomito na ravninu slike). Fluid je označen sivom bojom, a točke G, H i I su na slobodnoj površini.



Vertikalna komponenta jednaka je po veličini težini fluida u šrafiranom volumenu V , djeluje prema dolje i prolazi težištem tog volumena. Na dijelu površine BDEF fluid je iznad površine, te sila djeluje prema dolje, a po veličini je jednaka težini fluida u volumenu BDEFIGB. Na dijelu površine AB fluid je ispod površine pa sila djeluje prema gore, a po veličini je jednaka težini fluida u volumenu AHGBA.

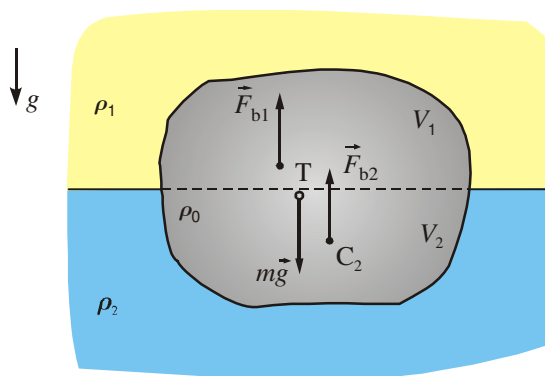
Horizontalne komponente sile tlaka na dijelovima površine EF i ED se međusobno poništavaju. Projekcija površine s kojom se računa horizontalna sila tlaka je dakle jednaka umnošku visine \overline{AD} sa širinom B površine. Horizontalna komponenta sile tlaka djeluje od fluida prema dijelu površine ABD, dakle s desna u lijevo.

Sila uzgona

Sila uzgona je rezultat djelovanja sile tlaka po površini tijela uronjenog u fluid. Sila uzgona je jednaka težini fluida istisnutog tijelom (težini istisnine), djeluje vertikalno u vis i prolazi težištem istisnine.

Sila uzgona na granici dvaju fluida

Slika prikazuje slučaj plivanja tijela mase m , gustoće ρ_0 na razdjelnoj površini dvaju fluida gustoća ρ_1 i ρ_2 . Točke C_1 i C_2 su težišta volumena istisnine V_1 i V_2 , a T je težište tijela.



Sila F_b uzgona je zbroj $F_b = F_{b1} + F_{b2} = \rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2$

Uvjet plivanja (ravnoteže) je da su resultantna sila (tj. $F_b = mg$) i resultantni moment na tijelo jednaki nuli (tj. suma momenata sile F_{b1} i F_{b2} u odnosu na težište tijela mora biti jednaka nuli). Jasno je da vrijedi $\rho_2 > \rho_0 > \rho_1$. Za slučaj $\rho_2 \gg \rho_1$ sila F_{b1} se zanemaruje.